Seiches et marées

MEC567 : SCIENCES DE L'EAU ET ENVIRONNEMENT

Olivier THUAL, 3 janvier 2011

Introduction

1. Phénomène de seiche

Les phènomènes de réflexion et de diffraction des ondes de surface sont décrits en prenant en compte les frontières. Pour une fréquence donnée on se ramène à une équation d'Helmoltz.

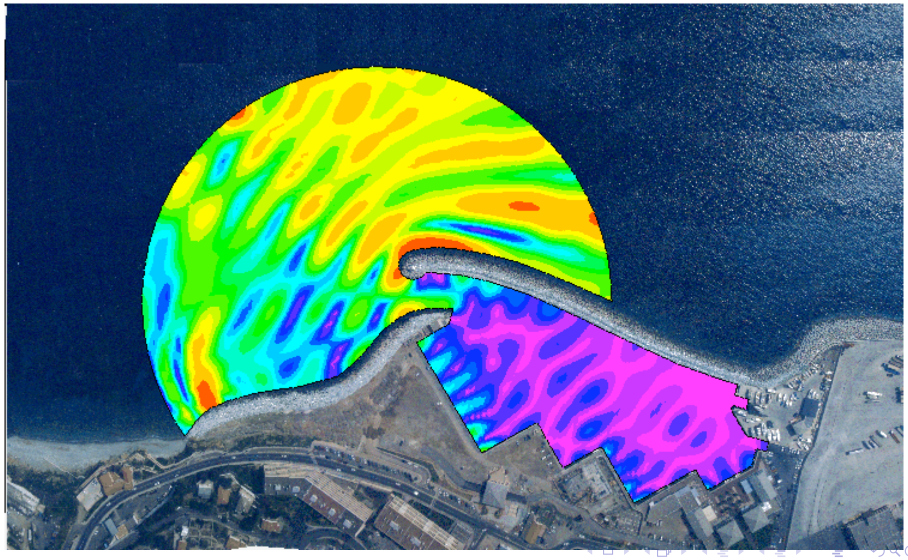
2. Modélisation de la marée

Le potentiel de marée dû à l'attraction de la Lune s'obtient en supposant que la Terre décrit une rotation solide autour du centre de gravité des deux astres. Le potentiel dû au Soleil s'y ajoute.

2. Ondes d'inertie

Les ondes de marées peuvent être modélisées à l'aide des équations de Saint-Venant linéaires en rotation : ondes de Poincaré, ondes de Proudman, ondes de Kelvin de bord, amphidromie de Kelvin, ...

Oscillations et seiches dans un port



Équations de Saint-Venant 2D linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Conditions aux limites

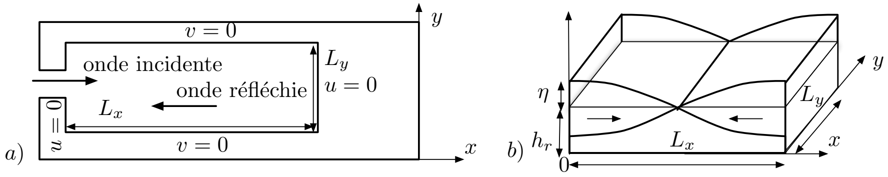
- Réfléchissantes : $\underline{U}\cdot\underline{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$
- Absorbantes : $\eta = 0$

Elimination de la vitesse

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g\,h_r\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) = 0$$

Piégeage d'une onde (seiche) en milieu peu profond ($c_r = \sqrt{g\, h_r}$)

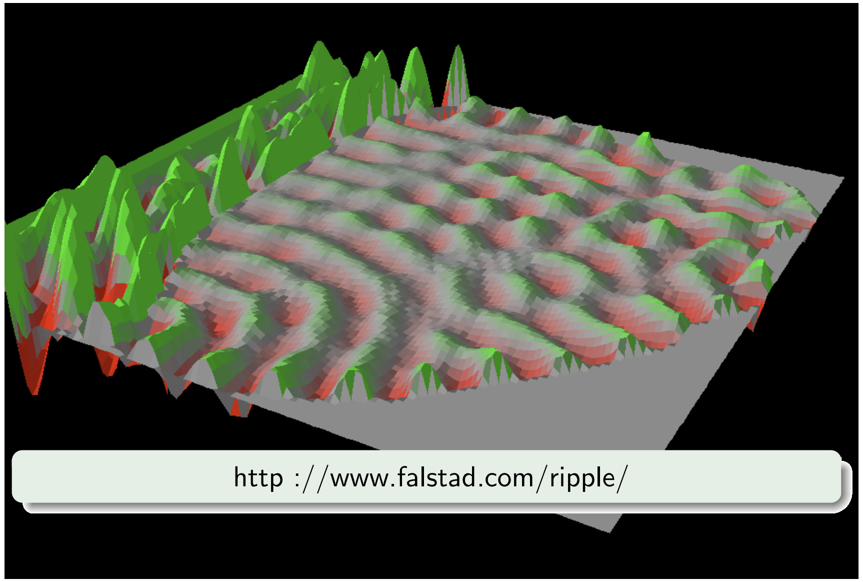
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2\, \Delta \eta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les bords}$$



Oscillations propres de la cavité

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_0\, \cos(k_x\, x)\, \cos(k_y\, y)\, \cos(k\, c\, t)\\
u &= \eta_0\, [g\, k_x/(c\, k)]\, \sin(k_x\, x)\, \cos(k_y\, y)\, \sin(k\, c\, t)\\
v &= \eta_0\, [g\, k_y/(c\, k)]\, \cos(k_x\, x)\, \sin(k_y\, y)\, \sin(k\, c\, t)
\end{aligned}$$

Résonances pour les pulsations $\omega_n = c\, \pi\, \sqrt{n_1^2/L_x^2 + n_2^2/L_y^2}$

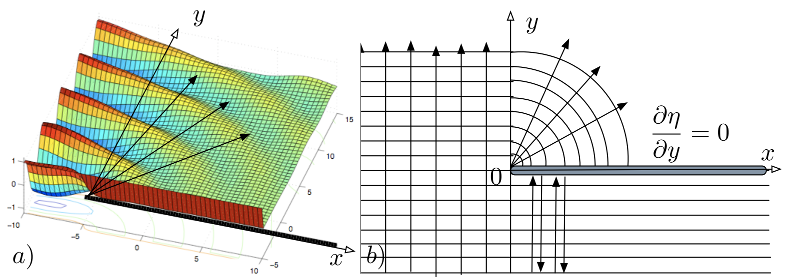


Recherche de solutions complexes :

$$\eta(x,y,t) = F(x,y)\, e^{-i\,\omega\, t} \qquad \text{solution de} \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2\, \Delta \eta = 0$$

Équation d'Helmoltz pour le cas peu profond :

$$\Delta F + k^2\, F = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega = c_r\, k$$



Houle en profondeur quelconque

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\, \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{en } z = 0$$

$$\Delta\, \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{en } z = -h_r$$

Recherche de solutions complexes :

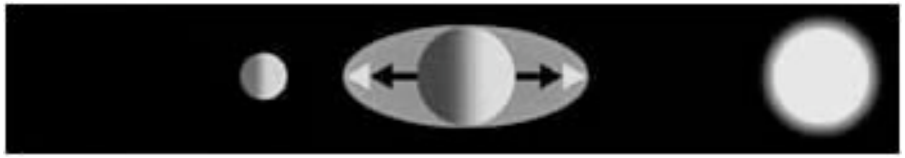
$$\{\eta(x,y,t), \phi(x,y,z,t)\} = \left\{1, \frac{g}{i\,\omega}\, \frac{\cosh[k\,(z+h_r)]}{\cosh(k\, h_r)}\right\} F(x,y)\, e^{-i\,\omega\, t}$$

Équation d'Helmoltz pour les profondeurs quelconques :

$$\Delta F + k^2\, F = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = g\, k\, \tanh(k\, h_r)$$

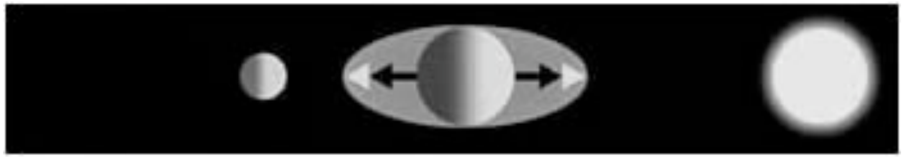
Origine de la marée :

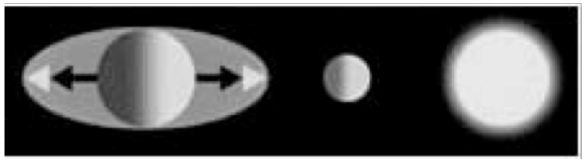
L'attraction de la Lune et du Soleil



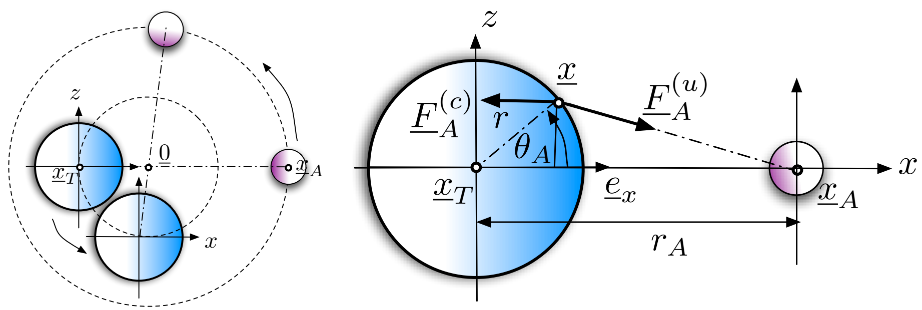
Origine de la marée :

L'attraction de la Lune et du Soleil





$$\underline{F}_A^{(u)}(\underline{x}) = GM_A \frac{\underline{x}_A - \underline{x}}{\|\underline{x}_A - \underline{x}\|^3} \quad \text{et} \quad \underline{F}_A^{(c)} = -\frac{GM_A}{r_A^2}\,\underline{e}_x$$

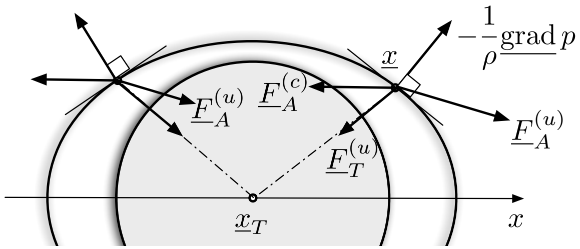


Potentiel de la marée dû à l'astre A : $\underline{F}_A^{(c)} + \underline{F}_A^{(u)} = -\underline{\text{grad}}\ V_A$

$$V_A(\underline{x}) = G\,M_A \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\|\underline{x}_A - \underline{x}\|} + \frac{(\underline{x} - \underline{x}_T)\cdot\underline{e}_x}{r_A^2}\right]$$

Aquaplanète sans rotation et avec gravité : $\underline{F}_T^{(u)} = -\underline{\text{grad}}\ V_T^{(u)}$

$$\underline{0} = -\frac{1}{\rho}\,\underline{\text{grad}}\ p + \underline{F}_A^{(c)} + \underline{F}_A^{(u)} + \underline{F}_T^{(u)}$$

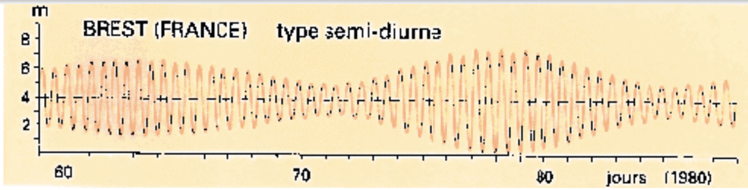


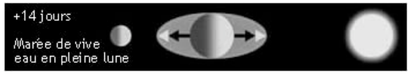
Surface iso-pression pour $r/r_A \ll 1$ et $V_T^{(u)} \sim -g\,r$

$$\frac{p}{\rho} + V_A + V_T^{(u)} = \frac{p}{\rho} + \frac{3\,G\,r^2\,M_A}{2\,r_A^3}\left(\cos^2\theta_A - \frac{1}{3}\right) - g\,r = C$$

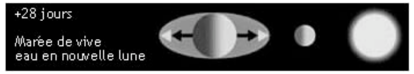
Hauteur de la surface libre en un point :

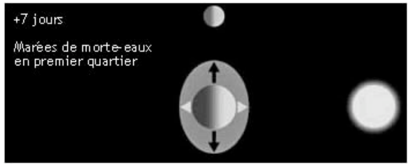
$$\eta(\underline{x}, t) = \sum_n \eta_n(\underline{x})\ \cos[\omega_n\,t - \phi_n(\underline{x})]$$



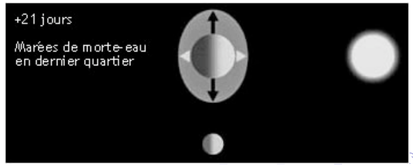


Vive-eaux





Morte-eaux



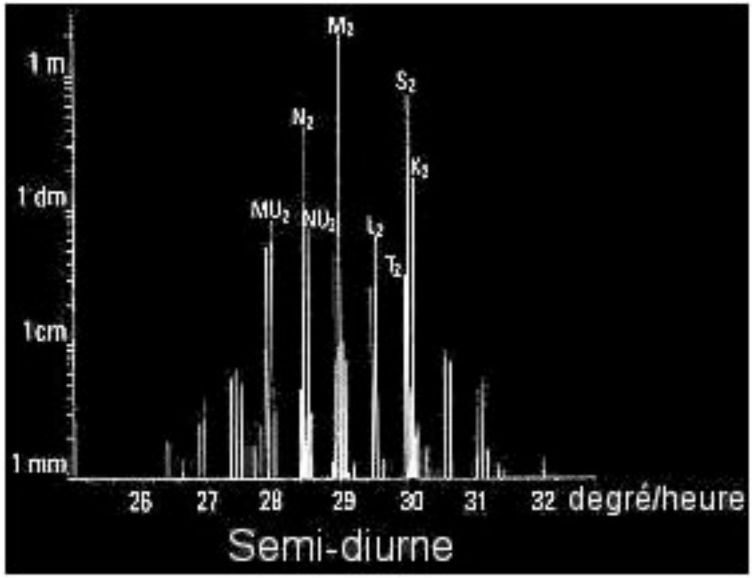
Force de marée due à la Lune et au Soleil :

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\underline{\text{grad}}\ V(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad V(\underline{x}) = V_L(r, \theta_L) + V_S(r, \theta_S)$$

Distances zénitales $\theta_L(t)$ et $\theta_S(t)$ et rotation de la Terre :

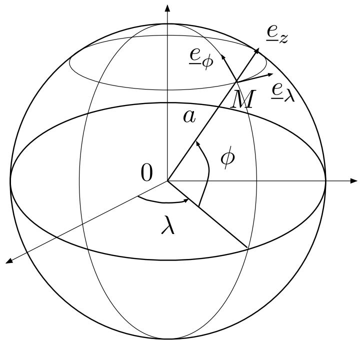
$$V(\underline{x}, t) = \sum_n A_n(\underline{x})\ \cos[\omega_n\,t - \phi_n(\underline{x})]$$

Onde	Dénomination	A_n	T_n
M_2	lunaire moyenne	0,4543	12,420 h
S_2	solaire moyenne	0,2120	12,000 h
N_2	elliptique majeure lunaire	0,0880	12,658 h
k_x	déclinationnelle	0,2655	23,934 h
O_1	lunaire principale	0,1826	25,819 h
P_1	solaire principale	0,0880	24,065 h
M_b	bi-mensuelle	0,0783	18,77 j
M_m	mensuelle	0,0414	27,55 j



Équations de Saint-Venant linéaires sur la sphère :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + f\, \underline{e_z} \wedge \underline{U} = -\underline{\mathrm{grad}}\,(g\,\eta + V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}\,(h_f\, \underline{U}) = 0$$



Notations :

Vitesse horizontale : $\underline{U}(\lambda, \phi, t)$
Profondeur de la bathymétrie : $h_f(\lambda, \phi)$
Elévation de la surface libre : $\eta(\lambda, \phi, t)$
Paramètre de Coriolis : $f(\phi) = 2\,\Omega\,\sin\phi$

Potentiel des marées :

$$V(\lambda, \phi, t) = \sum_l \sum_n \widehat{V}_{l,n}(\phi)\ e^{i(\lambda\, l - \omega_n\, t)}$$

Réponse d'une aquaplanète au forçage astral :

$$(u, v, \eta) = \sum_{l,n} [\widehat{u}(\phi), \widehat{v}(\phi), \widehat{\eta}(\phi)]\ e^{i(\lambda\, l - \omega_n\, t)}$$

Potentiel des marées :

$$V(\lambda, \phi, t) = \sum_{l,n} \widehat{V}_{l,n}(\phi)\ e^{i(\lambda\, l - \omega_n\, t)}$$

Pour chaque $(l, n) \in \mathbb{N}_+^2$:

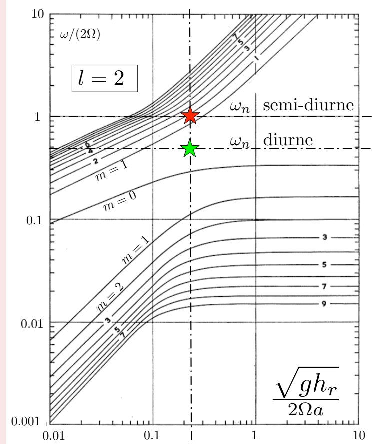
$$\mathcal{L}(l, \omega_n)\, [g\, \widehat{\eta}(\phi) + \widehat{V}_{l,n}(\phi)] = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(L_1 + L_2\, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) + \left(L_3 - L_1\, \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$L_1 = \frac{2\Omega\, f(\phi)\, l}{\omega^2 - f^2(\phi)}, \quad L_2 = \frac{2\,\omega\,\Omega\,\cos\phi}{\omega^2 - f^2(\phi)},$$

$$L_3 = \frac{2\,\omega\,\Omega\, l^2}{[\omega^2 - f^2(\phi)]\,\cos\phi} - \frac{2\,a^2\,\omega\,\Omega\,\cos\phi}{g\,h_r}$$

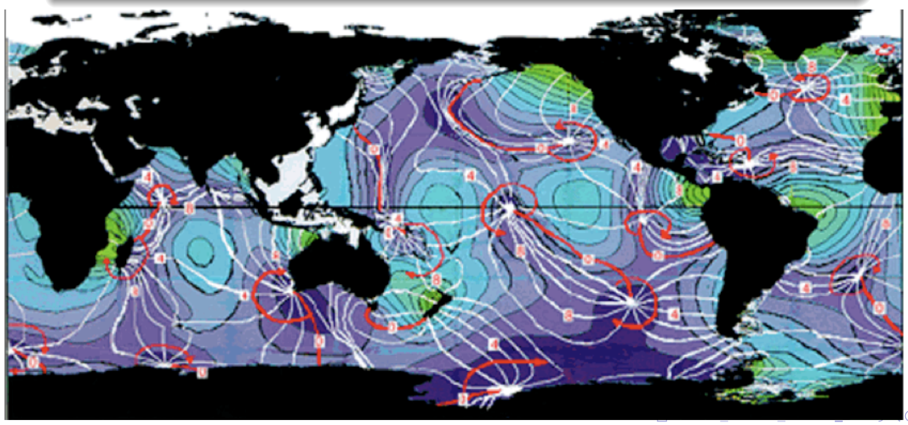
Spectre $\omega(l, m)$ de $\mathcal{L}(l, \omega)$:

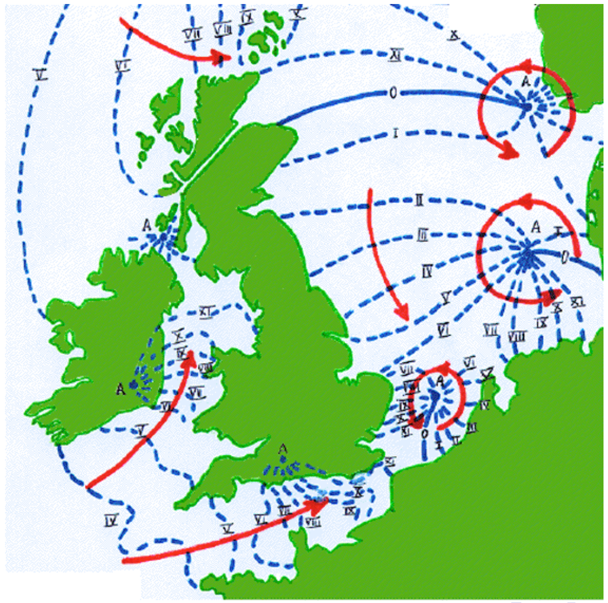


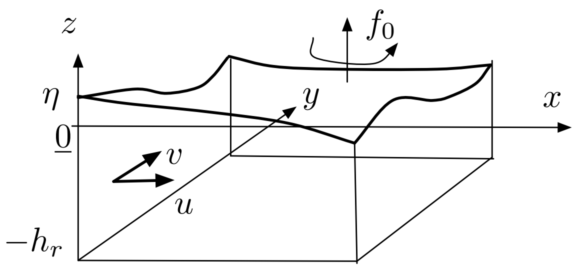
Marée en présence de continents :

$\eta = \eta_{aqua} + \eta_{libre}$ avec η_{aqua} la marée de l'aquaplanète et η_{libre} les oscillations libres ($V = 0$) forcées par les conditions aux limites :

$$\underline{U} \cdot \underline{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{U}_{libre} \cdot \underline{n} = -\underline{U}_{aqua} \cdot \underline{n}$$





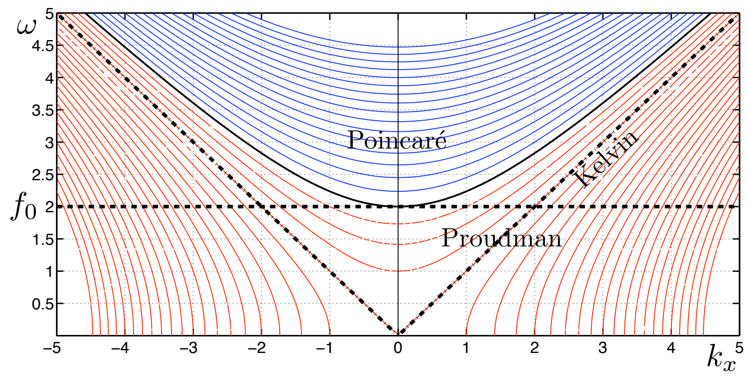


Équations de Saint-Venant 2D linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0\, v = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0\, u = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Coefficient constants

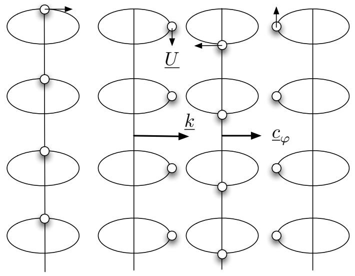
Paramètre de Coriolis :
$f = f_0$
Profondeur de l'océan :
$h_f = h_r$
Notation de vitesse :
$c = \sqrt{g\, h_r}$



- Ondes de Poincaré : $\omega = \sqrt{f_0^2 + c^2\,(k_x^2 + k_y^2)}$
- Ondes de Proudman : $\omega = \sqrt{f_0^2 + c^2(k_x^2 - \alpha_2^2)}$
- Ondes de Kelvin de de bord : $\omega = k_x\, c$

Ondes de Poincaré

$$(u, v, \eta) = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\eta})\, e^{i\,k_x\,x + i\,k_y\,y - i\,\omega\,t}$$



Propriétés d'une onde :

Relation de dispersion :

$$\omega^2 = f_0^2 + c^2\,(k_x^2 + k_y^2)$$

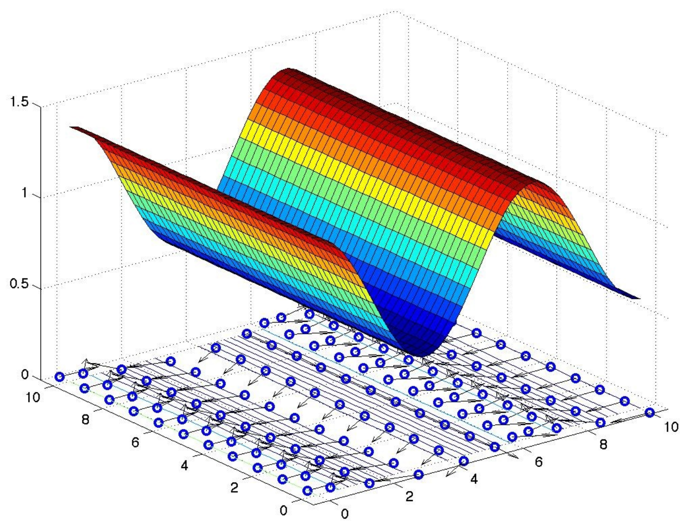
Surface libre :

$$\eta = \eta_m\,\cos(k_x\,x - \omega\,t)$$

$$u = \frac{g\,\omega}{c^2\,k_x}\,\eta_m\,\cos(k_x\,x - \omega\,t)\,, \qquad v = \frac{g\,f_0}{c^2\,k_x}\,\eta_m\,\sin(k_x\,x - \omega\,t)$$

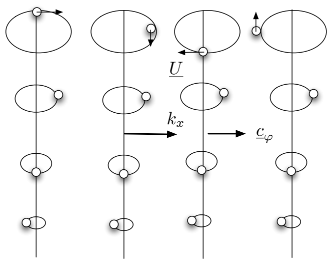
$\Longrightarrow$ ellipses, rapport entre les axes : $\omega / f_0 > 1$

Ondes de Poincaré



Ondes de Proudman

$$(u, v, \eta) = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{\eta})\, e^{i\,k_x\,x + \alpha_2\,y - i\,\omega\,t}$$



Propriétés d'une onde :

Relation de dispersion :

$$\omega = \sqrt{f_0^2 + c^2(k_x^2 - \alpha_2^2)}$$

Surface libre :

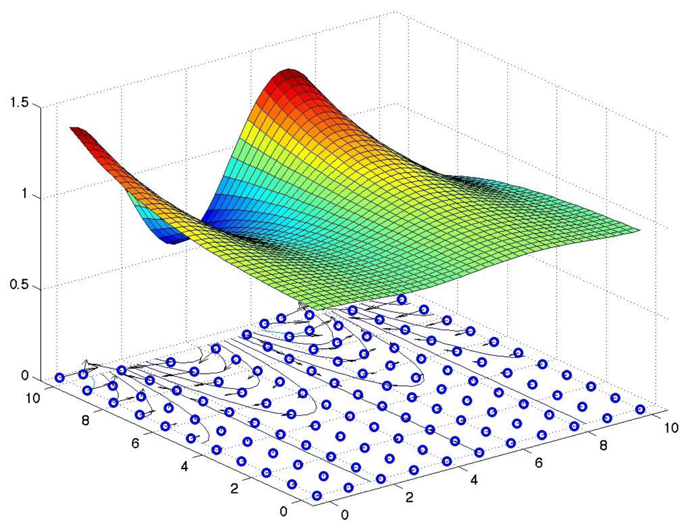
$$\eta = \eta_m\,\cos(k_x\,x - \omega\,t)\,e^{\alpha_2\,y}$$

$$u = \frac{g}{c^2}\,\frac{\omega\,k_x + f_0\,\alpha_2}{k_x^2 - \alpha_2^2}\,\eta_m\,\cos(k_x\,x - \omega\,t)\,e^{\alpha_2\,y}$$

$$v = \frac{g}{c^2}\,\frac{\omega\,\alpha_2 + f_0\,k_x}{k_x^2 - \alpha_2^2}\,\eta_m\,\sin(k_x\,x - \omega\,t)\,e^{\alpha_2\,y}$$

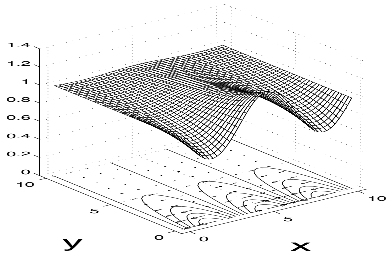
$\Longrightarrow$ ellipses, rapport entre les axes : $\frac{\omega\,k_x + f_0\,\alpha_2}{\omega\,\alpha_2 + f_0\,k_x}$

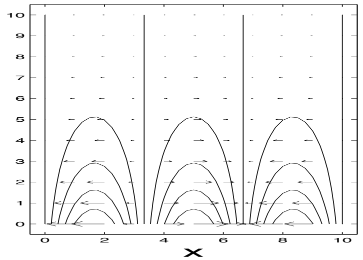
Ondes de Proudman



Ondes de Kelvin de bord

$$(u, v, \eta) = (\widehat{u}, 0, \widehat{\eta})\, e^{i\,k_x\,x+\alpha_2\,y-i\,\omega\,t} \qquad \text{avec} \qquad \omega\,\alpha_2 + f_0\,k_x = 0$$



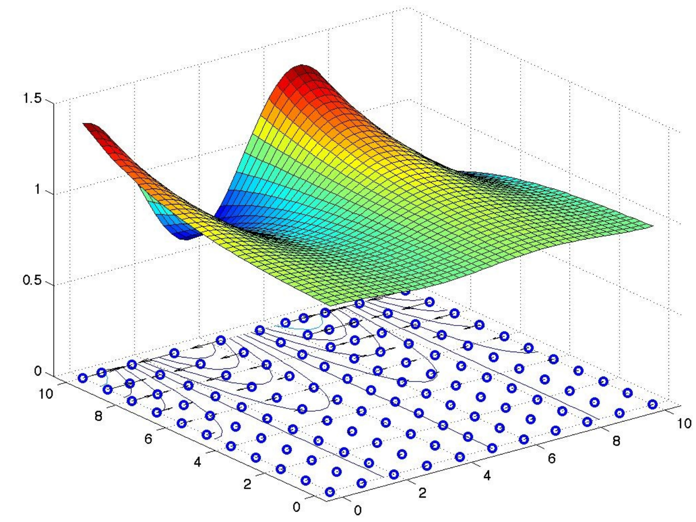


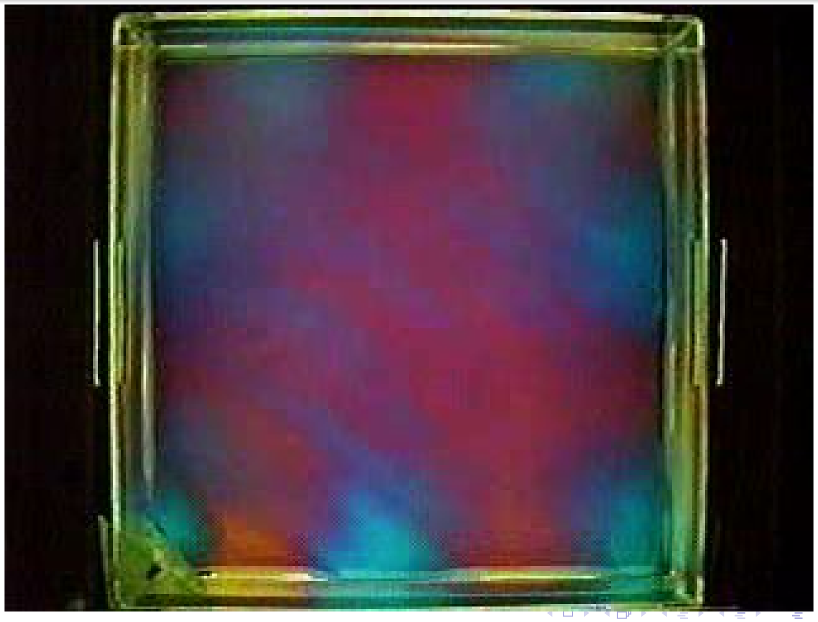
Propriétés de l'onde :

Relation de dispersion : $\omega = k_x\,c$

Surface libre : $\eta = \eta_m\,\cos[k_x(x - c\,t)]\,e^{-\frac{f_0}{c}y}$

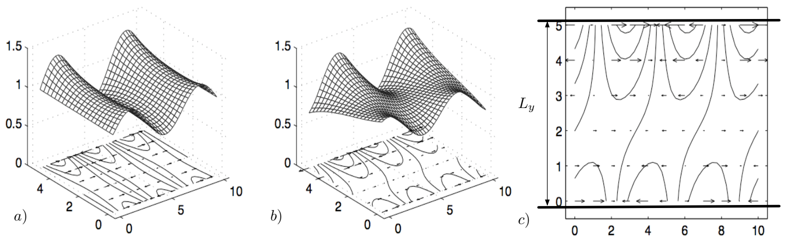
Champ de vitesse : $u = \frac{g}{c}\,\eta_m\,\cos[k_x(x - c\,t)]\,e^{-\frac{f_0}{c}y}$ et $v = 0$





Superposition de deux ondes de Kelvin de bord :

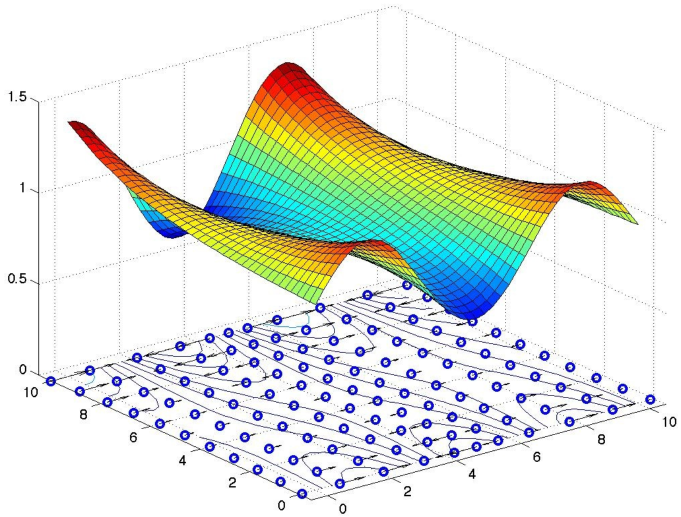
$$\begin{aligned}
\eta &= \widehat{\eta}_g \cos(k\,x + \omega\,t)\, e^{\frac{f_0}{k} y} - \widehat{\eta}_d \cos(k\,x - \omega\,t)\, e^{-\frac{f_0}{k} y} \\
u &= -\frac{g\,\widehat{\eta}_g}{c} \cos(k\,x + \omega\,t)\, e^{\frac{f_0}{k} y} - \frac{g\,\widehat{\eta}_d}{c} \cos(k\,x - \omega\,t)\, e^{-\frac{f_0}{k} y} \\
v &= 0
\end{aligned}$$



Conditions aux limites : $v = 0$ en $y = 0$ et $y = L_y$

Automatiquement satisfaites car $v = 0$ partout

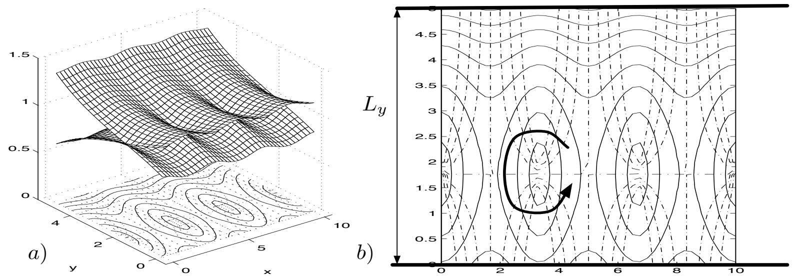
Amphidromie de Kelvin



Points amphidromiques et lignes cotidales :

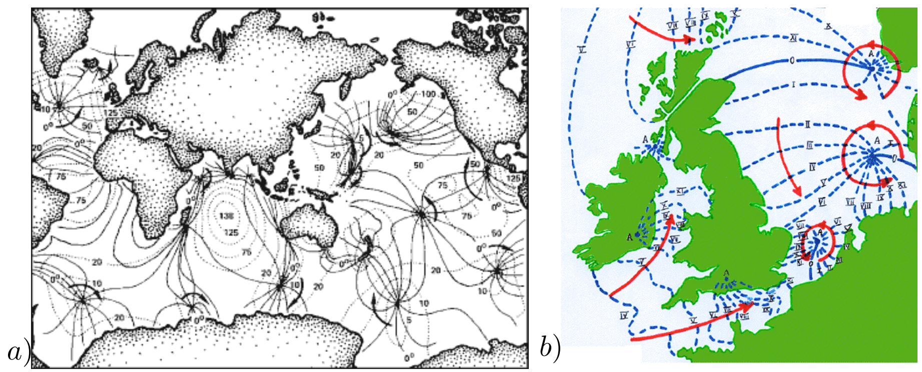
$$\eta = \widehat{\eta}_0 \left[\cos(X + T)\, e^{Y} - \cos(X - T)\, e^{-Y}\right]$$

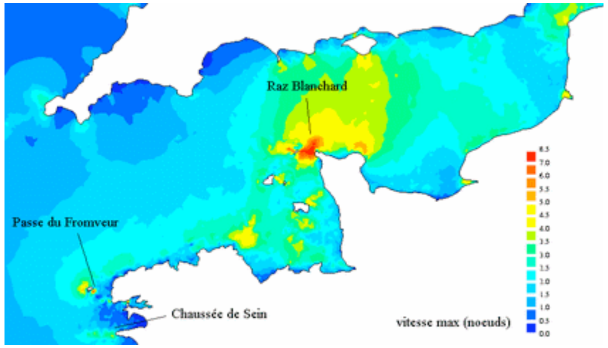
$X = k\,x$, $\quad T = \omega\,t$, $\quad Y = \frac{f_0}{c} y - \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\, \frac{\widehat{\eta}_d}{\widehat{\eta}_g}$ $\quad$ et $\quad \widehat{\eta}_0 = \sqrt{\widehat{\eta}_d\, \widehat{\eta}_g}$

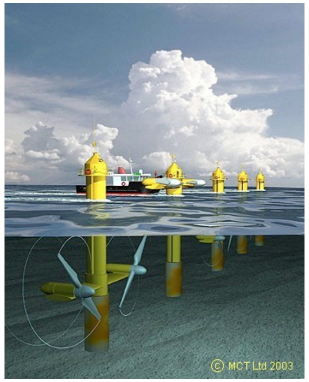


On montre que : $\eta = \widehat{\eta}_0\, R\, \cos(T - \Theta)$

avec $R = \sqrt{2}\, \sqrt{\cosh(2Y) - \cos(2X)}$ $\quad$ et $\quad \tanh \Theta = \frac{\tanh Y}{\mathrm{tg}\, X}$.




Raz Blanchard
Passe du Fromveur
Chaussée de Sein
vitesse max (noeuds)


© MCT Ltd 2003