Réfraction de la houle

MEC567 : SCIENCES DE L'EAU ET ENVIRONNEMENT

Olivier THUAL, 3 janvier 2011

Introduction

1. Propriétés des ondes de surface

La houle linéaire est ici décrite par les équations d'Euler avec une bathymétrie homogène ou inhomogène. On calcule l'énergie de la houle et le flux d'énergie à travers une section.

2. Tracé de rayons

La notion de paquet d'ondes dispersés et la méthode WKB permettent de généraliser la relation de dispersion au cas inhomogène. Le tracé des rayons obéit à un système hamiltonien.

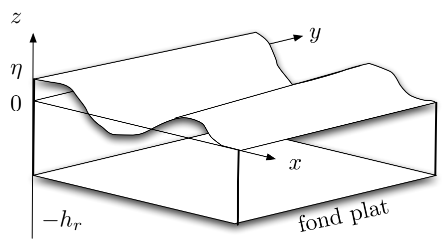
3. Transport de l'énergie

La conservation de l'énergie le long des rayons permet de calculer la "réfraction" et le "shoaling" de la houle qui arrive sur la plage. Cette énergie se dissipe principalement par déferlement des vagues.

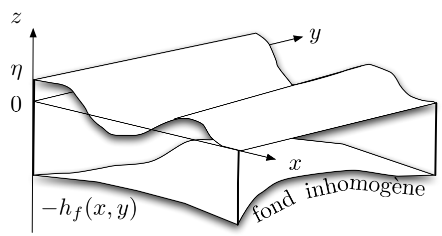
Les crêtes des vagues s'alignent sur les isobathes

Ondes de surface sur fond homogène ou inhomogène

Cas homogène



Cas inhomogène



Équations d'Euler incompressibles à surface libre :

Conditions aux limites en surface : $z = \eta(x, y, t)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_H \cdot \underline{\text{grad}}_H\, \eta = w \qquad \text{et} \qquad p = p_{atm}$$

$$\text{div}\ \underline{U} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U}\cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{U}\right) = -\underline{\text{grad}}\ p - \rho\, g\, \underline{e}_z$$

Conditions aux limites au fond : $z = -h_f(x, y, t)$

$$\underline{U}\cdot\underline{n} = 0$$

Petites oscillations irrotationnelles, fond HOMOGÈNE :

Surface libre : en $z = 0$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\,\eta$$

$$\underline{\text{rot}}\ \underline{U} = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \underline{U} = \underline{\text{grad}}\ \phi$$

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho\,\frac{\partial \phi}{\partial t} = \tilde{p}$$

Fond HOMOGÈNE (plat) : en $z = -h_r$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Solutions complexes de la forme :

$$\phi(\underline{x}) = \Phi(z)\, e^{i\,\underline{k}\cdot\underline{x} - i\,\omega\, t} \quad \text{avec} \quad \underline{x} = (x, y) \quad \text{et} \quad \underline{k} = (k_x, k_y)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\omega^2\,\Phi(0) + g\,\Phi'(0) = 0$$

$$\Delta\phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi''(z) - k^2\,\Phi(z) = 0$$

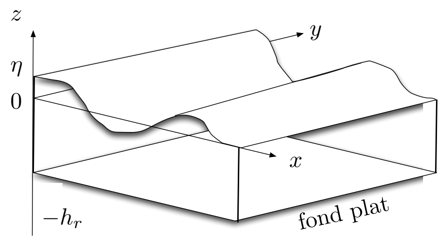
Fond HOMOGÈNE : $\Phi'(-h_r) = 0$

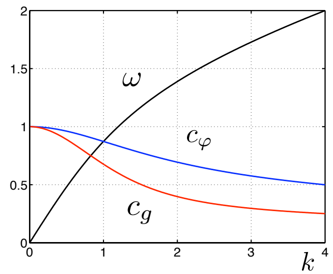
Relation de dispersion :

$$\Longrightarrow \quad \Phi(z) = \Phi_m\ \cosh[k(z + h_r)]$$

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\, h_r)} \qquad \text{avec} \qquad k = \|\underline{k}\|$$

- Vitesse de phase : $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_\varphi(\underline{k})\,\underline{e}_k(\underline{k})$ avec $\underline{e}_k = \underline{k}/k$
- Vitesse de groupe : $\underline{c}_g(\underline{k}) = \underline{\text{grad}}_k\ \Omega(\underline{k}) = c_g(\underline{k})\,\underline{e}_k(\underline{k})$





$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g\ k\ \tanh(k\, h_r)} \ \sim_{k\,h_r \to 0}\ c_r\ k$$

$$c_\varphi(\underline{k}) = \frac{\Omega(\underline{k})}{k} \quad \text{et} \quad c_g = c_\varphi\left[\frac{1}{2} + \frac{k\, h_r}{\sinh(2\,k\,h_r)}\right] \ \sim_{k\,h_r \to 0}\ c_r$$

Petites oscillations irrotationnelles, fond INHOMOGÈNE :

Surface libre : en $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

$$\underline{U} = \underline{\mathrm{grad}}\ \phi, \qquad \Delta\phi = 0$$

Fond INHOMOGÈNE : en $z = -h_f(x,y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial h_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial h_f}{\partial y} = 0$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\right)\left[\rho\left(\frac{1}{2}\underline{U}^2 + g\,z\right)\right] + \mathrm{div}\,(p\,\underline{U}) = 0$$

Intégration sur la verticale ($\underline{U}_H$, div_H sont "horizontaux")

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}_H\ (\underline{N} + \underline{I}) \sim \frac{\partial W}{\partial t} + \mathrm{div}_H\ \underline{I} = 0$$

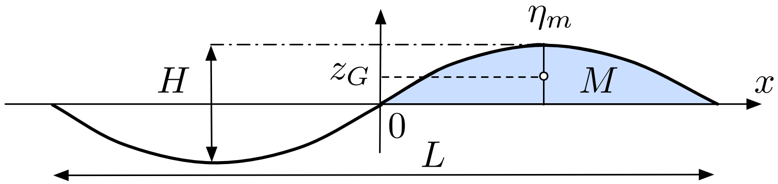
avec $\quad W = W_{\mathrm{cin}} + W_{\mathrm{pot}} \quad$ et $\quad \underline{N} = \int_{-h_f}^{\eta}\left(\frac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2\right)\,\underline{U}_H\,dz$

Notations ($\tilde{p} = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}$ est l'écart la pression hydrostatique) :

$$W_{\mathrm{cin}} = \int_{-h_f}^{\eta}\frac{1}{2}\rho\,\underline{U}^2\,dz\ ,\quad W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}\,\rho\,g\,\eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = \int_{-h_f}^{\eta}\tilde{p}\,\underline{U}_H\,dz$$

Cas d'une onde monochromatique (donc sur fond plat)

$$\begin{aligned} \eta &= \Phi_m\ \cosh(k\,h_r)\ (\omega/g)\ \cos(k\,x - \omega t) \\ u &= \Phi_m\ k\ \cosh[k(z+h_r)]\ \ \cos(k\,x - \omega t) \\ w &= \Phi_m\ k\ \sinh[k(z+h_r)]\ \sin(k\,x - \omega t) \end{aligned}$$



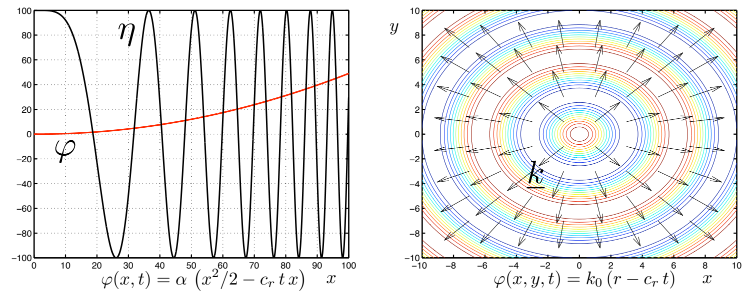
Énergie linéique d'une vague

$$\int_0^L W_{\mathrm{cin}}\,dx = \int_0^L W_{\mathrm{pot}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^L W\,dx = \frac{1}{8}\,\rho\,g\,H^2\,L = 2\,M\,g\,z_G$$

où z_G est le centre de gravité de la bosse et M sa masse linéique

$$\eta(\underline{x},t) = \eta_m(\underline{x},t)\ e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$$

$$\omega(\underline{x},t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\mathrm{grad}}\ \varphi(\underline{x},t)$$



$$\mathcal{L} \gg L(\underline{x},t) = \frac{2\pi}{k(\underline{x},t)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T} \gg T(\underline{x},t) = \frac{2\pi}{\omega(\underline{x},t)}$$

Équation de Korteweg de Vries (KdV) HOMOGÈNE

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta_0 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

Solutions élementaires complexes :

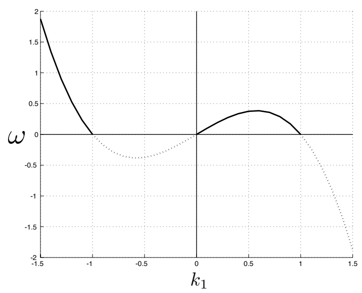
$$\eta(x,t) = \eta_m \, e^{i\,k_x\,x - i\,\omega\,t}$$

Relation de dispersion :

$$\omega = \Omega(k_x) = \alpha_0\,k_x - \beta_0\,k_x^3$$

Dispersion des grandes ondes de surface :

$$\sqrt{g\;k\;\tanh(k\,h_r)} = \alpha_0\,k - \beta_0\,k^3 + O(k^5)$$



Équation de Korteweg de Vries (KdV) INHOMOGÈNE

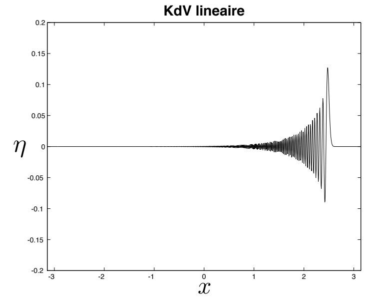
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha(x)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta(x)\,\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \qquad \Omega(k_x, x) = \alpha(x)\,k_x - \beta(x)\,k_x^3$$

Paquets d'ondes dispersés

$$\eta(x,t) = \eta_m(x,t)\;e^{i\,\varphi(x,t)}$$

Petit paramètre ϵ : $\chi = \epsilon\,x$ et $\tau = \epsilon t$

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon}\,\Phi(\chi,\tau), \qquad \eta_m = \eta_d\;e^{\Sigma(\chi,\tau)}$$



Ordre dominant de l'approximation WKB :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \alpha\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} - \beta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}\right)^3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, x\right)$$

Paquets d'ondes dispersés :

$$\eta(\underline{x},t) = \eta_m(\underline{x},t)\;e^{i\,\varphi(\underline{x},t)}$$

$$\omega(\underline{x},t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x},t) \qquad \text{et} \qquad \underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\;\varphi(\underline{x},t)$$

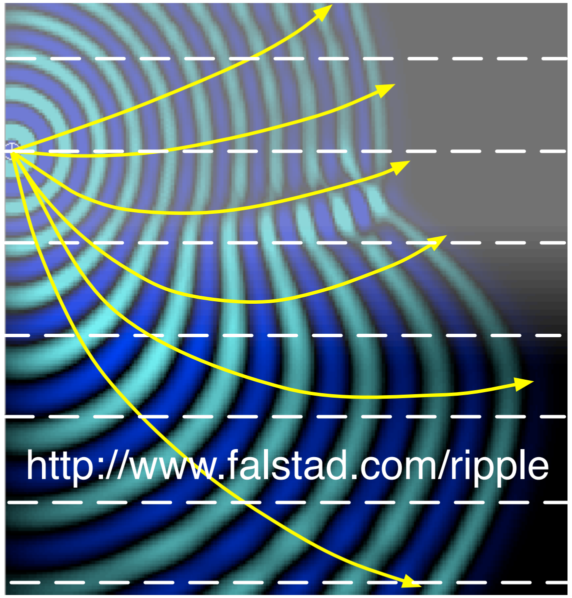
Équation de l'Eikonale :

$$\omega(\underline{x},t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x},t),\underline{x}] \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x},t) = \Omega[\underline{\text{grad}}\;\varphi(\underline{x},t),\underline{x}]$$

La relation de dispersion est vérifiée localement

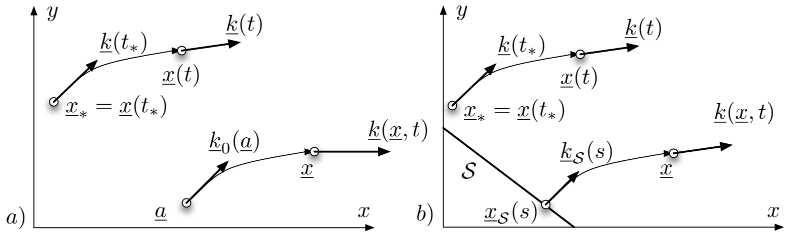
Exemple des ondes de surface :

- Profondeurs quelconques : $\Omega(\underline{k},\underline{x}) = \sqrt{g\,k\,\tanh[k\,h_f(\underline{x})]}$
- Faibles profondeurs : $\Omega(\underline{k},\underline{x}) = c(\underline{x})\;k = \sqrt{g\,h_f(\underline{x})}\;\;k$



Gradient de $\boxed{\omega(\underline{x},t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x},t),\underline{x}]}$ avec $\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\underline{k} = \underline{\text{grad}}\ \varphi$

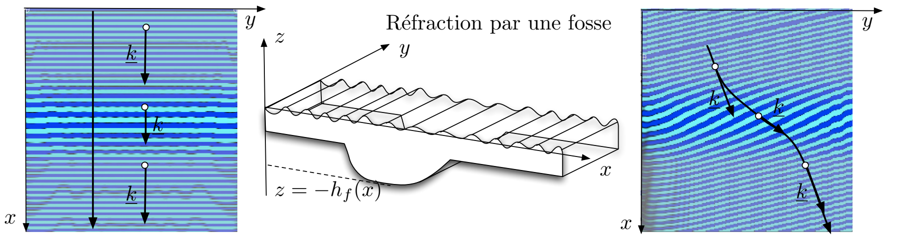
$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x}) \cdot \underline{\text{grad}}\ \underline{k} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k},\underline{x})$$



Tracé de rayons : système hamiltonien avec $\mathcal{H} = \Omega(\underline{k},\underline{x})$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x}) = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k},\underline{x}) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k},\underline{x})$$

Propriétés des ondes de surface | Paquets d'ondes dispersés
Tracé de rayons | Méthode WKB (Wentzel, Kramer et Brillouin)
Transport de l'énergie | Équation de l'Eikonale

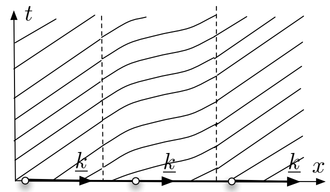


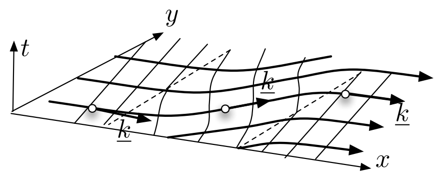
Cas 1D : $\eta = \eta_m(x)\, e^{i\,\varphi(x,t)}$

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} + c_g(k_x,x)\frac{\partial k_x}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}(k_x,x)$$

Cas 2D : $\eta = \eta_m(x,y)\, e^{i\,\varphi(x,y,t)}$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k},\underline{x}) = \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x}) \\ \dot{\underline{k}} &= -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k},\underline{x}) \end{aligned}$$





Propriétés des ondes de surface | Paquets d'ondes dispersés
Tracé de rayons | Méthode WKB (Wentzel, Kramer et Brillouin)
Transport de l'énergie | Équation de l'Eikonale

Dérivée de $\boxed{\omega(\underline{x},t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x},t),\underline{x}]}$ avec $\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\underline{k} = \underline{\text{grad}}\ \varphi$

Invariance de la pulsation le long des rayons

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k},\underline{x}) \cdot \underline{\text{grad}}\ \omega = 0$$

Tracé de rayons : système hamiltonien avec $\mathcal{H} = \Omega(\underline{k},\underline{x})$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k},\underline{x}) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{k}} = -\underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k},\underline{x})$$

Invariance de $\mathcal{H}$ pour les systèmes hamiltoniens autonomes

$$\frac{d}{dt}\left\{\Omega\left[\underline{k}(t),\underline{x}(t)\right]\right\} = \dot{\underline{k}} \cdot \underline{\text{grad}}_k \Omega(\underline{k},\underline{x}) + \dot{\underline{x}} \cdot \underline{\text{grad}}_x \Omega(\underline{k},\underline{x}) = 0$$

Propriétés des ondes de surface | Paquets d'ondes dispersés
Tracé de rayons | Méthode WKB (Wentzel, Kramer et Brillouin)
Transport de l'énergie | Équation de l'Eikonale

Paquet d'ondes dispersé et cas inhomogène :

$$\eta(\underline{x},t) = \eta_m(\underline{x},t)\, e^{i\,\varphi(\underline{x},t)} \quad \text{avec} \quad \omega(\underline{x},t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x},t),\underline{x}]$$

$$\underline{k}(\underline{x},t) = \underline{\text{grad}}\ \varphi(\underline{x},t) \quad \text{et} \quad \omega(\underline{x},t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x},t)$$

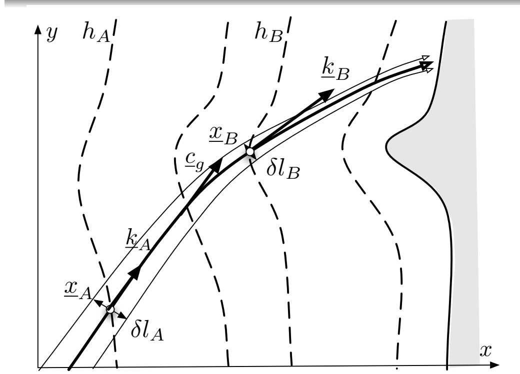
$$\Omega(\underline{k},\underline{x}) = \sqrt{g\,k\,\tanh[k\,h_f(\underline{x},t)]}$$

Moyenne sur une période T : $\langle b \rangle^T = \frac{1}{T}\int_0^T b\,dt$

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \left\langle W_{\text{pot}} \right\rangle^T , \qquad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2}\rho\, g\, |\eta_m|^2 = \frac{1}{8}\rho\, g\, H^2$$

Flux moyen d'énergie :

$$\text{div}\ \langle \underline{I} \rangle^T = 0 \qquad \text{avec} \qquad \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g\ \langle W \rangle^T$$



Conservation de l'énergie

$$\langle W \rangle^T = \frac{1}{8}\rho\, g\, H^2(\underline{x})$$

$$\langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g\ \langle W \rangle^T$$

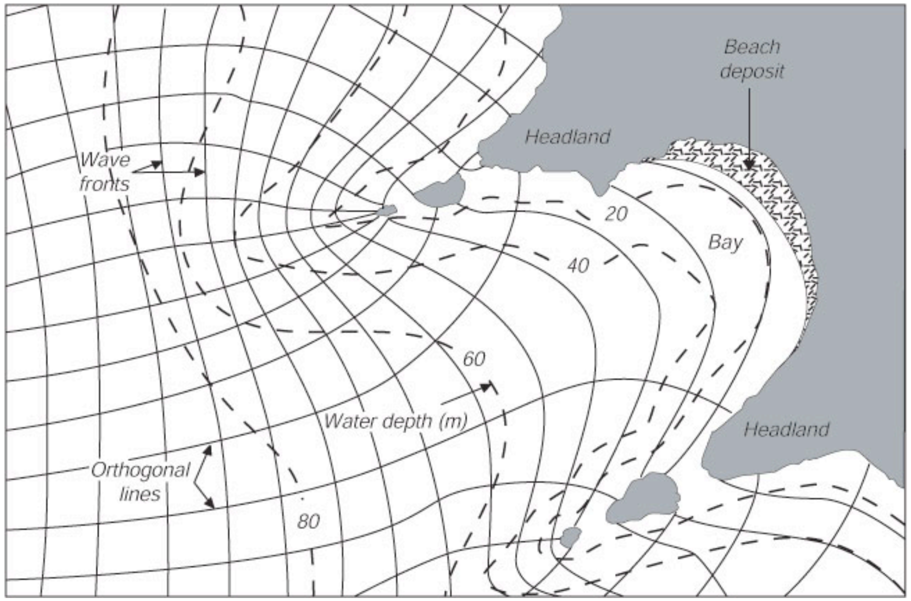
$$\text{div}\ \langle \underline{I} \rangle^T = 0$$

$$\iint_S \text{div}\ \langle \underline{I} \rangle^T\, da = \int_{\partial S} \langle \underline{I} \rangle^T \cdot \underline{n}\, dl$$

Coefficient de shoaling K_s et de réfraction K_r :

$$\delta l_A\ c_{gA}\ \langle W \rangle_A^T = \delta l_B\ c_{gB}\ \langle W \rangle_B^T$$

$$\frac{H_B}{H_A} = K_s\, K_r \quad \text{avec} \quad K_s = \sqrt{\frac{c_{gA}}{c_{gB}}} \quad \text{et} \quad K_r = \sqrt{\frac{\delta l_A}{\delta l_B}}$$



- Critère de Michell : $H/L > 0.142$ en eau profonde.
- Critère de Miche : $H/L > 0.14\tanh(k\,h)$ en eau intermédiaire
- Critère de Munk : $H/h_f > 0.78$ en eau peu profonde.