Intumescences et ressauts

MEC567 : SCIENCES DE L'EAU ET ENVIRONNEMENT

Olivier THUAL, 3 janvier 2011

Introduction

1. Résolution des équations de Saint-Venant

Les ondes de la dynamique linéaire des équations de Saint-Venant propagent l'information sans dispersion. La méthode des caractéristiques généralise cette propriété au cas non linéaire.

2. Ondes de détente

L'écoulement engendré par la vidange d'un canal se résout graphiquement en traçant les deux familles de courbes caractéristiques.

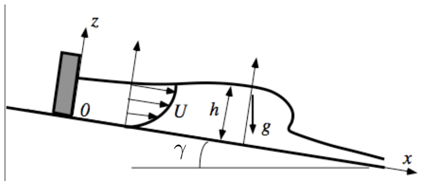
3. Onde de compression

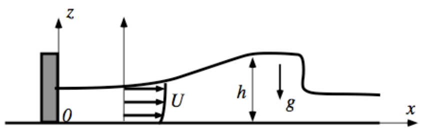
Lorsque les caractéristiques se coupent, il se forme un ressaut hydraulique dont la vitesse est déterminée par des relations de saut issues des lois de conservation.

Équations de Saint-Venant ($I = \sin\gamma$, $g' = g\,\cos\gamma$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} = -h\,\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h}$$





Équations de Saint-Venant sans pente ni frottement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} = -h\,\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

Équilibres

(U_n, h_n) quelconques

Petites perturbations de l'équilibre

$h = h_n + \widetilde{h}$ et $U = U_n + \widetilde{U}$

Équations de Saint-Venant linéarisées

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + U_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = -h_n\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} + U_n\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} = -g\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x}$$

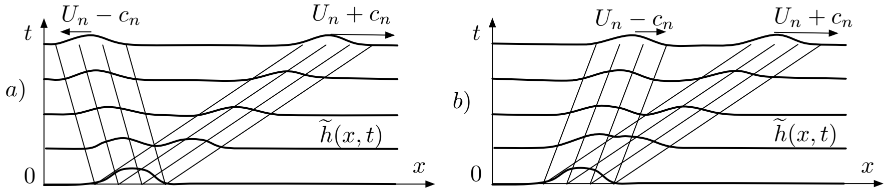
$$(\widetilde{h}, \widetilde{U}) = (\widetilde{h}_m, \widetilde{U}_m)e^{i\,k_x x + s\,t} \quad \text{avec} \quad s = \sigma - i\,\omega \in \mathbb{C}$$

Relation de dispersion et forme des ondes ($\sigma = 0$)

$$\omega_\pm = (U_n \pm c_n)\, k_x \quad \text{et} \quad \frac{\widetilde{h}_m}{h_n} = \pm \frac{\widetilde{U}_m}{c_n} \quad \text{avec} \quad c_n = \sqrt{g\ h_n}$$

Fluvial : $F_n = \frac{U_n}{c_n} < 1$

Torrentiel : $F_n = \frac{U_n}{c_n} > 1$



$$\begin{array}{rcl} \widetilde{h}(x,t) & = & \frac{1}{2}\ \widetilde{H}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2}\ \widetilde{H}_-[x - (U_n - c_n)t] \\ \widetilde{U}(x,t) & = & \frac{1}{2}\ \widetilde{U}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2}\ \widetilde{U}_-[x - (U_n - c_n)t] \end{array}$$

Équations de Saint-Venant 1D

$$\begin{array}{rrcl} \pm\sqrt{\dfrac{g'}{h}}\ * & \dfrac{\partial h}{\partial t} + U\,\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\,\dfrac{\partial U}{\partial x} & = & 0 \\ + & \dfrac{\partial U}{\partial t} + U\,\dfrac{\partial U}{\partial x} + g'\,\dfrac{\partial h}{\partial x} & = & g\ I - \dfrac{C_f}{2}\,\dfrac{U|U|}{h} \end{array}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(U \pm \sqrt{g'\,h}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(U \pm 2\sqrt{g'\,h}\right) = E(h,U)$$

Caractéristiques $\mathcal{C}_1$: $\dot{x} = \lambda_1(x,t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\ J_1 = N(J_1, J_2)$$

$\lambda_1 = U + c$ et $J_1 = U + 2\,c$

Caractéristiques $\mathcal{C}_2$: $\dot{x} = \lambda_2(x,t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\ J_2 = N(J_1, J_2)$$

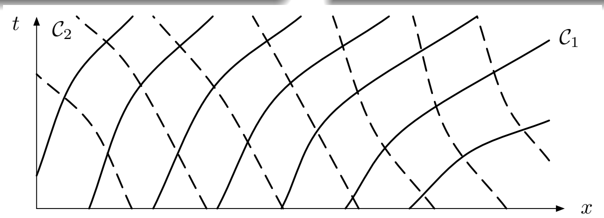
$\lambda_2 = U - c$ et $J_2 = U - 2\,c$

Caractéristiques $\mathcal{C}_1$: $\dot{x} = \lambda_1(x,t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_1} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}$$

Caractéristiques $\mathcal{C}_2$: $\dot{x} = \lambda_2(x,t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_2} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2(x,t)\,\frac{\partial}{\partial x}$$



Fonction de Riemann J_1

$$\left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_{\mathcal{C}_1} = N(J_1, J_2)$$

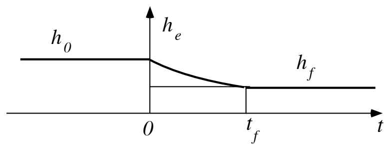
Fonction de Riemann J_2

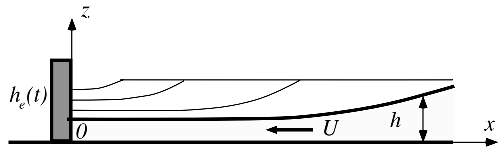
$$\left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_{\mathcal{C}_2} = N(J_1, J_2)$$

$\boxed{\text{Invariants de Riemann}}$ si $C_f = 0$ et $I = 0$ donc $N = 0$

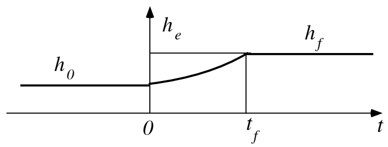
Exemples d'applications lorsqu'il existe des invariants de Riemann

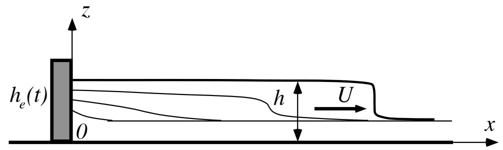
1) Onde de détente : $h_e(t)$ décroissante

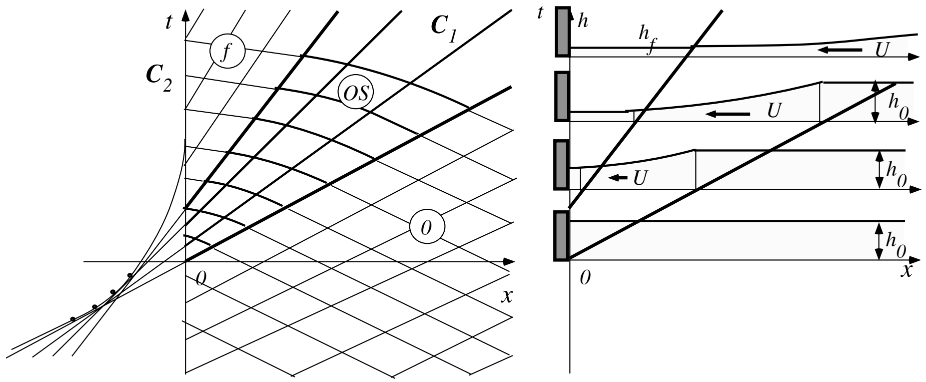




2) Onde de compression : $h_e(t)$ croissante





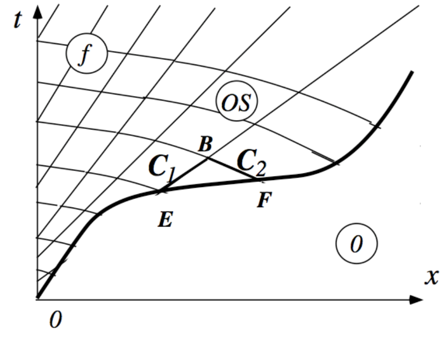


- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de détente $h(x,t)$ et $U(x,t)$ variable
- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

Résolution des équations de Saint-Venant | Vidange d'un canal
Ondes de détente | Propriétés d'une onde simple
Onde de compression | Détermination de la solution

Théorème 1

La frontière de la région 0 est une droite caractéristique $\mathcal{C}_1$

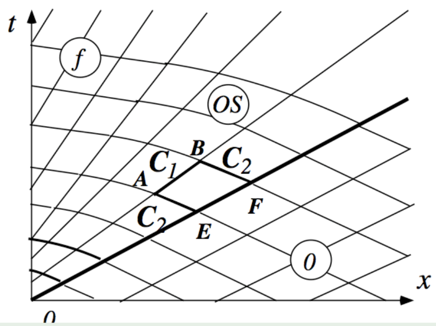


$$\mathcal{J}_1(U_B, c_B) = \mathcal{J}_1(U_E, c_E) = \mathcal{J}_1(U_0, c_0)$$
$$\mathcal{J}_2(U_B, c_B) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0)$$
$$\Longrightarrow \quad U_B + 2\,c_B = U_0 + 2\,c_0 \qquad U_B - 2\,c_B = U_0 - 2\,c_0$$

Résolution des équations de Saint-Venant | Vidange d'un canal
Ondes de détente | Propriétés d'une onde simple
Onde de compression | Détermination de la solution

Théorème 2

Les caractéristiques $\mathcal{C}_1$ de la région OS sont des droites



$$\mathcal{J}_1(U_A, c_A) = \qquad\qquad = \mathcal{J}_1(U_B, c_B)$$
$$\mathcal{J}_2(U_A, c_A) = \mathcal{J}_2(U_E, c_E) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_B, c_B)$$

On a donc $\boxed{U_A = U_B}$ et $\boxed{c_A = c_B}$ le long de ces $\mathcal{C}_1$

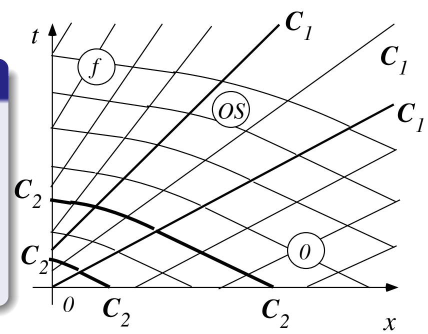
Résolution des équations de Saint-Venant | Vidange d'un canal
Ondes de détente | Propriétés d'une onde simple
Onde de compression | Détermination de la solution

Solution sur l'axe Ot

$$\mathcal{J}_2[U(0,\tau), c_e(\tau)] = \mathcal{J}_2(0, c_0) \quad \Longleftrightarrow \quad U(0,\tau) - 2\,c_e(\tau) = -2\,c_0$$

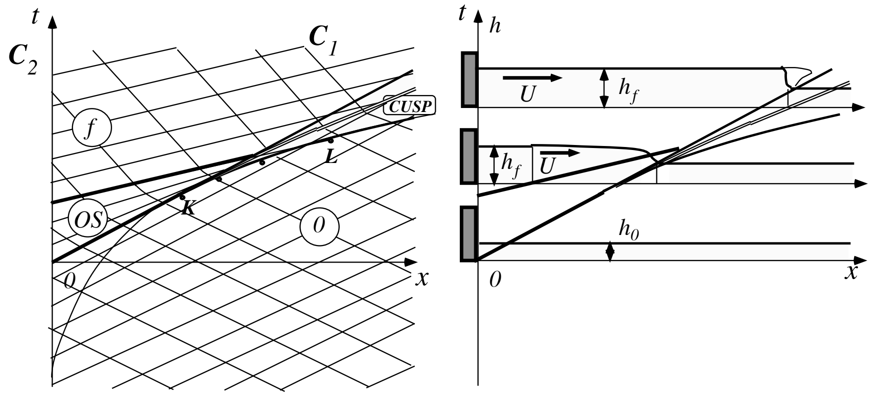
Solution dans le plan (x,t)

Région	$c(x,t)$	$U(x,t)$
f	c_f	$2(c_f - c_0)$
OS	$c_e[\tau(x,t)]$	$U[0,\tau(x,t)]$
0	c_0	0



avec $\tau(x,t)$ solution de l'équation implicite :

$$x = [U(0,\tau) + c_e(\tau)](t-\tau) = [3\,c_e(\tau) - 2\,c_0](t-\tau)$$



- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de compression $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variables
- Région $CUSP$: intérieur de la fronce
- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

Modèle de Saint-Venant sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} h\,dx + [hU]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} h\,U\,dx + \left[hU^2 + \frac{1}{2}g'\,h^2\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} E(h,U)\,h\,dx$$

$=$

Bilans locaux

$$\frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\partial}{\partial x}(h\,U) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hU) + \frac{\partial}{\partial x}(h\,U^2) + \frac{1}{2}g'\frac{\partial}{\partial x}h^2 = E(h,U)\,h$$

$+$

Relations de sauts

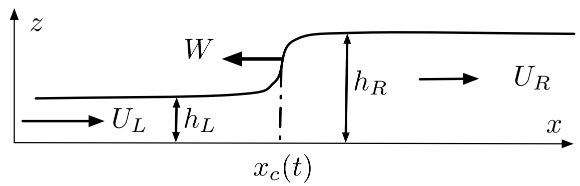
$$[\![h(U-W)]\!] = 0$$

$$\left[\!\!\left[h\,U(U-W) + \frac{1}{2}g'\,h^2\right]\!\!\right] = 0$$

Relations de saut pour un ressaut hydraulique mobile

$$h_L(U_L - W) = h_R(U_R - W)$$

$$h_L\,U_L(U_L - W) + \frac{1}{2}g'\,h_L^2 = h_R\,U_R(U_R - W) + \frac{1}{2}g'\,h_R^2$$



h_L, h_R et $U_R = 0$ sont connus

$$U_L = W\left(1 - \frac{h_R}{h_L}\right)$$

$$W = \pm\sqrt{g'\,\frac{h_L}{h_R}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

h_L, h_R et $W = 0$ sont connus

$$U_L = \pm\sqrt{g'\,\frac{h_R}{h_L}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

$$U_R = \pm\sqrt{g'\,\frac{h_L}{h_R}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

Bilan global de l'énergie

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}\,h\,U^2+\frac{1}{2}\,g'\,h^2\right)\,dx+\left[\frac{1}{2}g'\,h^2\,U\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2}\left[E(h,U)\,h\,U-D\right]\,dx$$

Bilan local

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}h\,U^2+\frac{1}{2}\,g'\,h^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}h\,U^3+g'\,h^2\,U\right)=E(h,U)\,h\,U-D$$

Inégalité de saut

$$\left[\!\left[\left(\frac{1}{2}h\,U^2+\frac{1}{2}g'\,h^2\right)(U-W)+\frac{1}{2}g'\,h^2\,U\right]\!\right] = -D_0 \quad < \quad 0$$

$$\text{si} \quad h_L(U_L-W)=h_R(U_R-W) \quad > \quad 0$$

Applications de l'inégalité de saut pour l'énergie

$Fr_n > 1$ (torrentiel) $\longrightarrow$ $Fr_n < 1$ (fluvial) avec $Fr_n = \frac{U-W}{\sqrt{g'\,h}}$

h_L, h_R et $U_R = 0$ sont connus

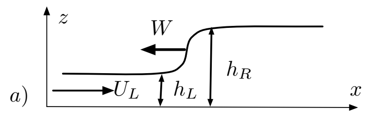
$$U_L = W\left(1-\frac{h_R}{h_L}\right)$$

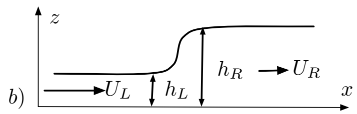
$$W = -\sqrt{g'\,\frac{h_L}{h_R}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

h_L, h_R et $W = 0$ sont connus

$$U_L = +\sqrt{g'\,\frac{h_R}{h_L}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

$$U_R = +\sqrt{g'\,\frac{h_L}{h_R}\left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$





$W < 0$

$U_L > 0$ et $U_R > 0$