

Intumescences et ressauts

HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT, O. THUAL

28 septembre 2011



Introduction

1. Résolution des équations de Saint-Venant

Les ondes de la dynamique linéaire des équations de Saint-Venant propagent l'information sans dispersion. La méthode des caractéristiques généralise cette propriété au cas non linéaire.

2. Ondes de détente

L'écoulement engendré par la vidange d'un canal se résout graphiquement en traçant les deux familles de courbes caractéristiques.

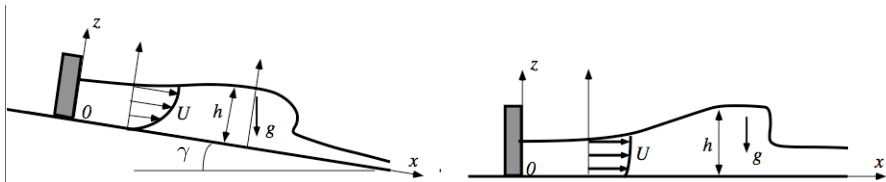
3. Onde de compression

Lorsque les caractéristiques se coupent, il se forme un ressaut hydraulique dont la vitesse est déterminée par des relations de saut issues des lois de conservation.

Équations de Saint-Venant ($l = \sin \gamma$, $g' = g \cos \gamma$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g l - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$$



Équations de Saint-Venant sans pente ni frottement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Équilibres

(U_n, h_n) quelconques

Petites perturbations de l'équilibre

$$h = h_n + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_n + \tilde{U}$$

Équations de Saint-Venant linéarisées

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$$

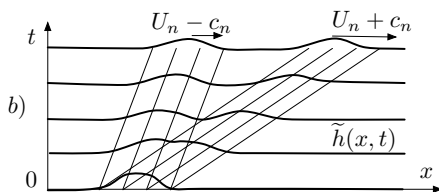
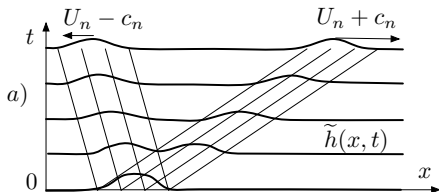
$$(\tilde{h}, \tilde{U}) = (\tilde{h}_m, \tilde{U}_m) e^{i k_x x + s t} \quad \text{avec} \quad s = \sigma - i \omega \in \mathbb{C}$$

Relation de dispersion et forme des ondes ($\sigma = 0$)

$$\omega_{\pm} = (U_n \pm c_n) k_x \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{h}_m}{h_n} = \pm \frac{\tilde{U}_m}{c_n} \quad \text{avec} \quad c_n = \sqrt{g h_n}$$

Fluvial : $F_n = \frac{U_n}{c_n} < 1$

Torrentiel : $F_n = \frac{U_n}{c_n} > 1$



$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{H}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{H}_-[x - (U_n - c_n)t] \\ \tilde{U}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{U}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{U}_-[x - (U_n - c_n)t] \end{aligned}$$

Équations de Saint-Venant 1D

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{g'}{h}} * \quad & \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ + \quad & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g' l - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(U \pm \sqrt{g' h} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(U \pm 2\sqrt{g' h} \right) = E(h, U)$$

Caractéristiques $C_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_1 = N(J_1, J_2)$$

$$\lambda_1 = U + c \quad \text{et} \quad J_1 = U + 2c$$

Caractéristiques $C_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_2 = N(J_1, J_2)$$

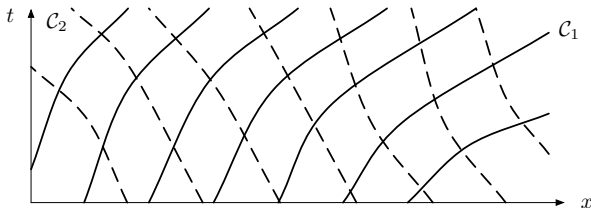
$$\lambda_2 = U - c \quad \text{et} \quad J_2 = U - 2c$$

Caractéristiques $C_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_1} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$

Caractéristiques $C_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_2} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$



Fonction de Riemann J_1

$$\left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_{C_1} = N(J_1, J_2)$$

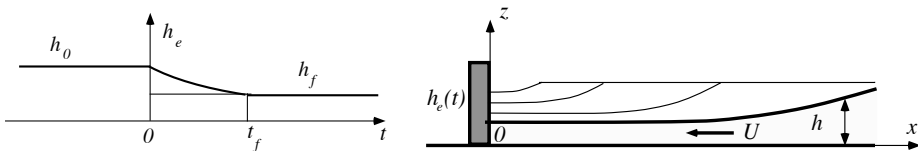
Fonction de Riemann J_2

$$\left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_{C_2} = N(J_1, J_2)$$

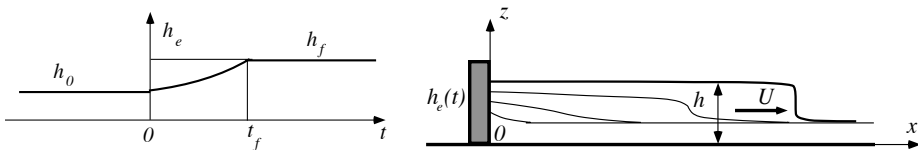
Invariants de Riemann si $C_f = 0$ et $l = 0$ donc $N = 0$

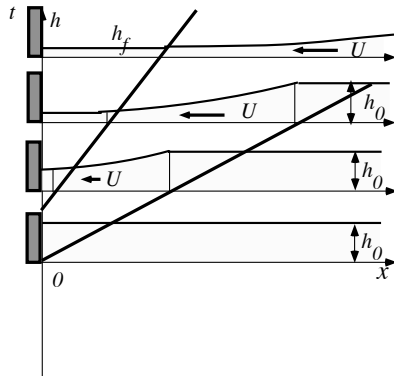
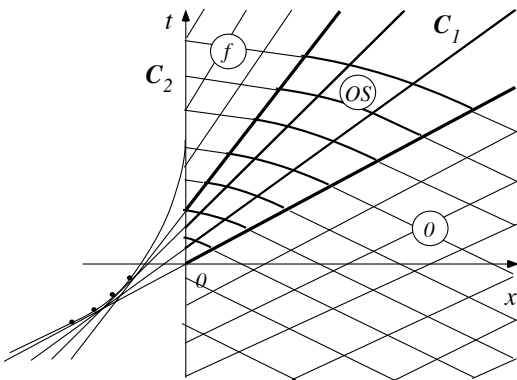
Exemples d'applications lorsqu'il existe des invariants de Riemann

1) Onde de détente : $h_e(t)$ décroissante



2) Onde de compression : $h_e(t)$ croissante

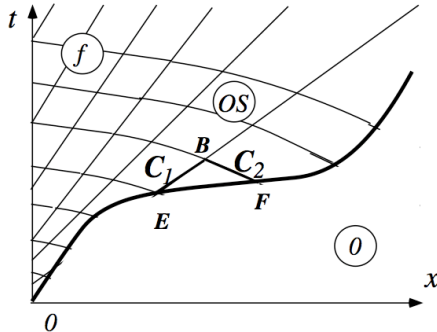




- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de détente $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variable
- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

Théorème 1

La frontière de la région 0 est une droite caractéristique C_1



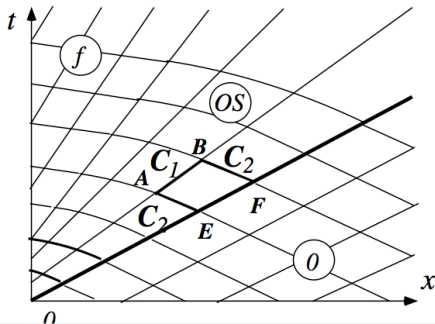
$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(U_B, c_B) &= \mathcal{J}_1(U_E, c_E) = \mathcal{J}_1(U_0, c_0) \\ \mathcal{J}_2(U_B, c_B) &= \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) \end{aligned}$$

\implies

$$\begin{aligned} U_B + 2c_B &= U_0 + 2c_0 \\ U_B - 2c_B &= U_0 - 2c_0 \end{aligned}$$

Théorème 2

Les caractéristiques C_1 de la région OS sont des droites



$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(U_A, c_A) &= & & = \mathcal{J}_1(U_B, c_B) \\ \mathcal{J}_2(U_A, c_A) &= \mathcal{J}_2(U_E, c_E) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_B, c_B) \end{aligned}$$

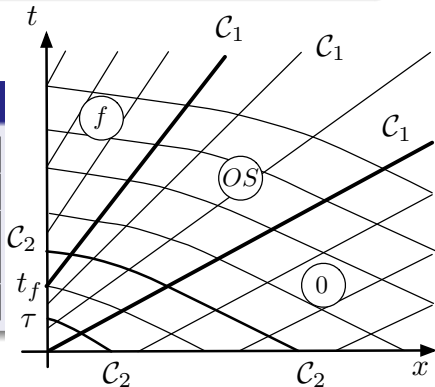
On a donc $U_A = U_B$ et $c_A = c_B$ le long de ces C_1

Solution sur l'axe Ot

$$\mathcal{J}_2[U(0, \tau), c_e(\tau)] = \mathcal{J}_2(0, c_0) \iff U(0, \tau) - 2c_e(\tau) = -2c_0$$

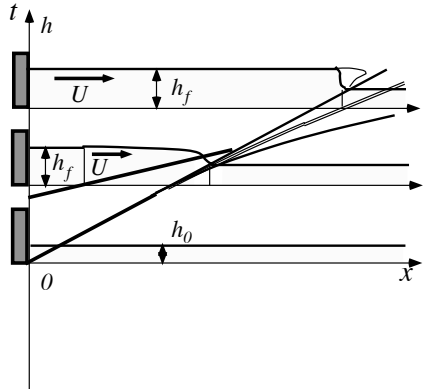
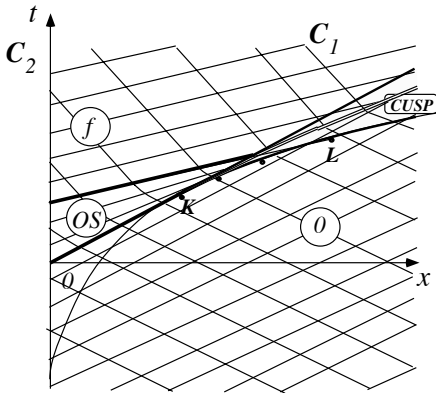
Solution dans le plan (x, t)

Région	$c(x, t)$	$U(x, t)$
f	c_f	$2(c_f - c_0)$
OS	$c_e[\tau(x, t)]$	$U[0, \tau(x, t)]$
0	c_0	0



avec $\tau(x, t)$ solution de l'équation implicite :

$$x = [U(0, \tau) + c_e(\tau)](t - \tau) = [3c_e(\tau) - 2c_0](t - \tau)$$



- Région 0 : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de compression $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variables
- Région $CUSP$: intérieur de la fronce
- Région f : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

Modèle de Saint-Venant sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [hU]_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h U \, dx + \left[hU^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} E(h, U) h \, dx$$

Bilans locaux

=

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (h U) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hU) + \frac{\partial}{\partial x} (h U^2) + \frac{1}{2} g' \frac{\partial}{\partial x} h^2 = E(h, U) h$$

+

Relations de sauts

$$\llbracket h(U - W) \rrbracket = 0$$

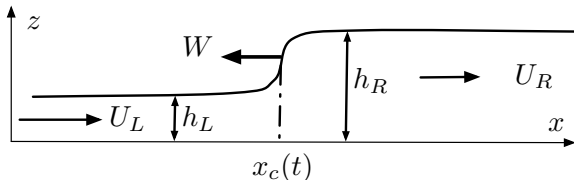
$$\llbracket h U(U - W) + \frac{1}{2} g' h^2 \rrbracket = 0$$



Relations de saut pour un ressaut hydraulique mobile

$$h_L(U_L - W) = h_R(U_R - W)$$

$$h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2}g' h_L^2 = h_R U_R(U_R - W) + \frac{1}{2}g' h_R^2$$



h_L , h_R et $U_R = 0$ sont connus

$$U_L = W \left(1 - \frac{h_R}{h_L}\right)$$

$$W = \pm \sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2}\right)}$$

h_L , h_R et $W = 0$ sont connus

$$U_L = \pm \sqrt{g' \frac{h_R}{h_L} \left(\frac{h_L + h_R}{2}\right)}$$

$$U_R = \pm \sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2}\right)}$$

Bilan global de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) dx + \left[\frac{1}{2} h^2 U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 U \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{1}{2} g' h^2 U \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [E(h, U) h U - D] dx$$

Bilan local

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} h U^2 + g' h^2 U \right) = E(h, U) h U - D$$

Inégalité de saut

$$\left[\left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) (U - W) + \frac{1}{2} g' h^2 U \right] = -D_0 < 0$$

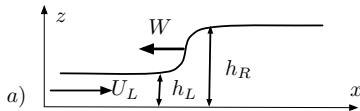
Applications de l'inégalité de saut pour l'énergie

$$Fr_n > 1 \text{ (torrentiel)} \rightarrow Fr_n < 1 \text{ (fluvial)} \quad \text{avec } Fr_n = \frac{U-W}{\sqrt{g'h}}$$

h_L, h_R et $U_R = 0$ sont connus

$$U_L = W \left(1 - \frac{h_R}{h_L}\right)$$

$$W = -\sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

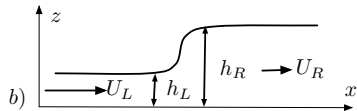


$$W < 0$$

h_L, h_R et $W = 0$ sont connus

$$U_L = +\sqrt{g' \frac{h_R}{h_L} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$

$$U_R = +\sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$$



$$U_L > 0 \text{ et } U_R > 0$$

