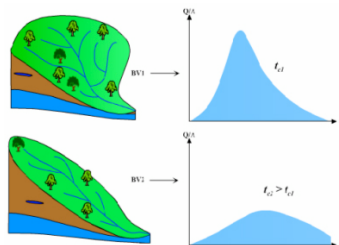


Ondes de crues

HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT, O. THUAL

28 septembre 2011



Influence de la forme du bassin versant sur l'hydrogramme de crue

Introduction

1. Équations de Navier-Stokes à surface libre

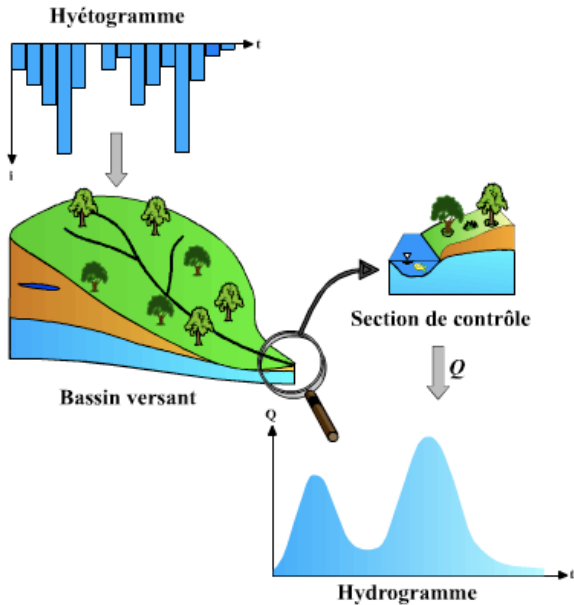
L'adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes turbulentes permet de mettre en évidence les nombres sans dimension dont les ordres de grandeur sont déterminants pour les approximations.

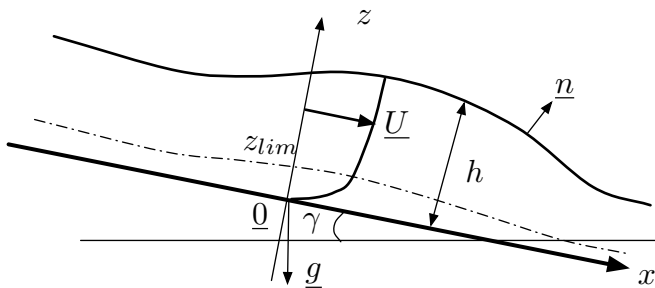
2. Dérivation des équations de Saint-Venant

Dans le cas des écoulements peu profonds, la classification des approximations permet de dériver les équations de l'approximation des ondes de crues et les équations de Saint-Venant.

3. Dynamique des ondes de crues

La notion d'onde de la dynamique linéaire se généralise au cas non linéaire à l'aide de la théorie des caractéristiques. Les chocs sont modélisés par des relations de sauts issues des lois de conservation.





Modèle à viscosité turbulente constante ν_t :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

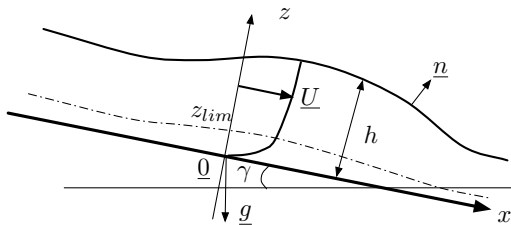
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x} + g \sin \gamma + \nu_t \Delta u$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial z} - g \cos \gamma + \nu_t \Delta w$$

Conditions aux limites à la surface $z = h(x, t)$

cinématiques :
$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$$

dynamiques :
$$\underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{n} = -p_{atm} \underline{n} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}_t = -p_t \underline{\underline{1}} + 2\rho\nu_t \underline{\underline{d}}$$



Modélisation au fond $z = 0$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{e}_z = \tau_*$$

Choix d'unités (en notant $g' = g \cos \gamma$) :

$$x = L_0 x^+, \quad z = h_0 z^+, \quad u = U_0 u^+, \\ t = \frac{L_0}{U_0} t^+, \quad w = U_0 \frac{h_0}{L_0} w^+ \quad \text{et} \quad p_t = \rho g' h_0 p^+$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} = 0 \\ \frac{\partial u^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{\tan \gamma}{\epsilon Fr^2} + \frac{1}{\epsilon Rt} \Delta^+ u^+ \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial w^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p^+}{\partial z^+} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{\epsilon}{Rt} \Delta^+ w^+ \\ \text{avec} \quad \Delta^+ = \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{+2}}$$

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' h_0}}, \quad Rt = \frac{h_0 U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan \gamma$$

	$\tan \gamma \ll \epsilon$	$\tan \gamma = O(\epsilon)$	$\tan \gamma = O(1)$
$Fr^2 = O(1)$			
$\frac{1}{Rt} \ll \epsilon$	Saint-Venant sans pente ni frottement	Saint-Venant sans frottement	
$\frac{1}{Rt} = O(\epsilon)$	Saint-Venant sans pente	Équations de Saint-Venant complètes	
$\frac{1}{Rt} = O(1)$			Ondes de crues
$Fr^2 = O(\epsilon)$			
$\frac{1}{Rt} = O(1)$		Ondes de crues diffusantes	

Équation en w pour toutes ces approximations :

$$\frac{\partial p^+}{\partial z^+} = -1 \quad \text{avec} \quad p^+ = p_{atm}^+ \quad \text{pour} \quad z^+ = h^+(x^+, t^+).$$

La pression turbulente est donc hydrostatique :

$$p_t(x, z, t) = p_{atm} - \rho g' [z - h(x, t)]$$

Autres conditions aux limites :

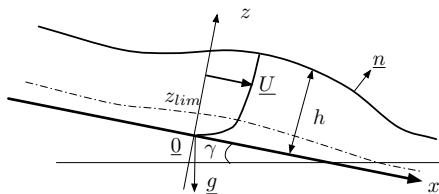
$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w & \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \quad \text{pour} \quad z = h \\ w = 0 & \quad \text{et} \quad \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_* & \quad \text{pour} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Conservation de la masse $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ intégrée en z

$$\frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz$$

Conservation de la quantité de mouvement intégrée en z

$$\frac{\partial (U h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz + g' h \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \gamma - \frac{\tau_*}{\rho}$$



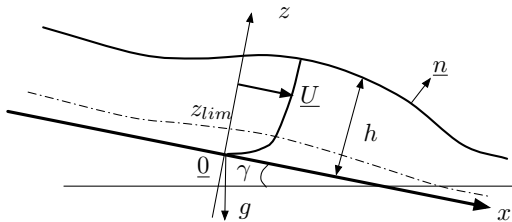
Paramétrisations :

$$\int_0^h u^2 dz = \alpha U^2 h \quad \text{avec} \quad \alpha = 1$$

$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho U |U|$$

Équations de Saint-Venant ($l = \sin \gamma$, $g' = g \cos \gamma$)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g l - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$$



Manning-Strickler

$$C_f(h) = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}$$
$$= \frac{1}{4} \Phi_{MS} \left(\frac{k_s}{4h} \right)^{1/3}$$

Approximation des ondes de crues ...

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0 \quad \text{et} \quad \dots$$

... non diffusantes ($Fr^2, l) = O(1)$

$$0 = g l - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h}$$

... diffusantes ($Fr^2, l) = O(\epsilon)$

$$0 = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g l - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h}$$

Paramétrisation de Strickler $C_f(h) = 2 g / (K_s^2 h^{1/3})$

$$\text{Équilibre : } U_n = K_s l^{1/2} h_n^{2/3}$$

Petites perturbations de l'équilibre

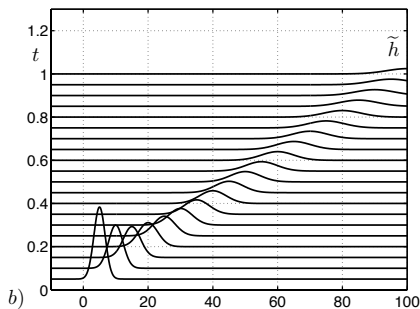
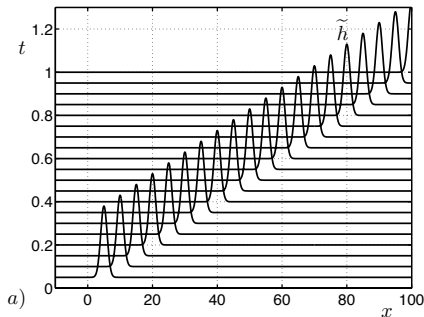
$$h = h_n + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_n + \tilde{U}$$

ondes de crues non diffusantes ...

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5 U_n}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$$

... et diffusantes avec $k_n = \frac{U_n h_n}{2 \tan \gamma}$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5 U_n}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = k_n \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2}$$



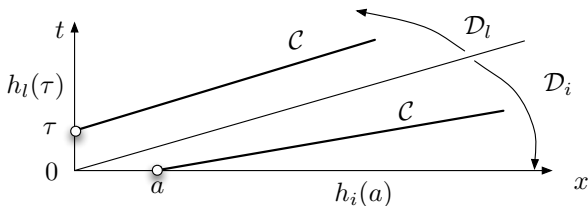
$$\tilde{h}(x, t) = h_m \frac{l_0}{l(t)} \exp \left[-\frac{(x - \frac{5 U_n}{3} t)^2}{2 l^2(t)} \right] \quad \text{avec} \quad l^2(t) = l_0^2 + 2 k_n (t - t_0)$$

Approximation des ondes de crues

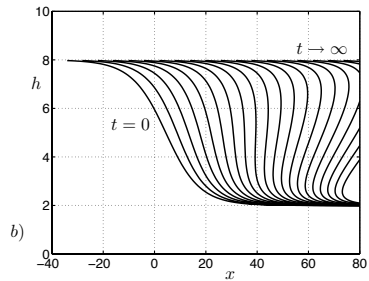
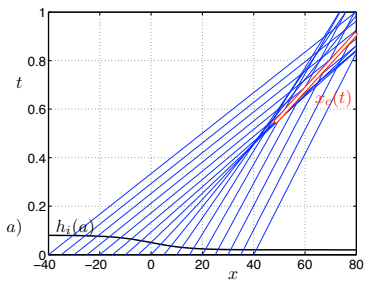
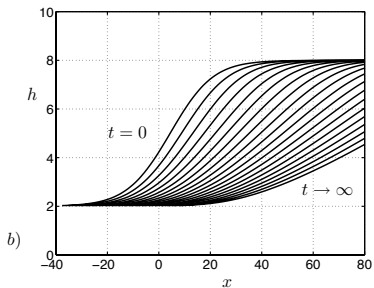
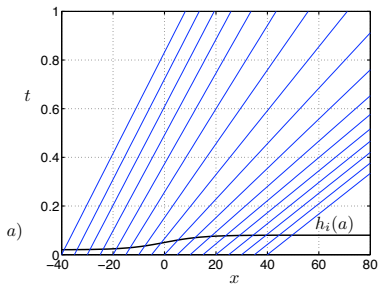
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda(h) = \frac{5}{3} U(h) \quad \text{et} \quad U(h) = K_s l^{1/2} h^{2/3}$$

Courbe caractéristique $x_c(t)$ d'équation $\dot{x} = \lambda[h(x, t)]$

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_c = 0 \quad \text{avec} \quad \left(\frac{d}{dt} \right)_c = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_c(t) \frac{\partial}{\partial x}$$



Ce sont des droites $x = \lambda(h)(t - \tau)$ ou $x - a = \lambda(h)t$





Loi de conservation globale

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [q(h)]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \text{avec} \quad q'(h) = \lambda(h)$$

Bilan local $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [q(h)] = \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$

Relation de saut $W(t) = \frac{[[q(h)]]}{[[h]]}$ avec $W(t) = \dot{x}_c(t)$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx - W [[h]] \\ [q]_{x_1}^{x_2} &= [q]_{x_1}^{x_c^-} + [q]_{x_c^+}^{x_2} + [[q]] \end{aligned}$$

