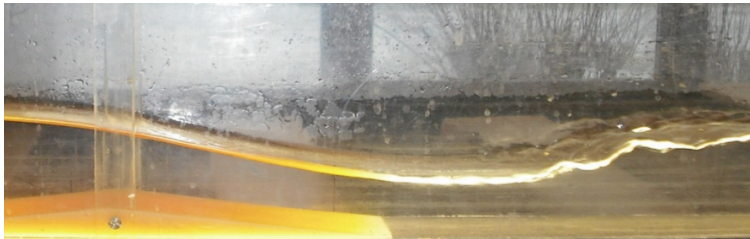


# Hydraulique à surface libre

HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT, O. THUAL

28 septembre 2011



# Introduction

## 1. Charge hydraulique

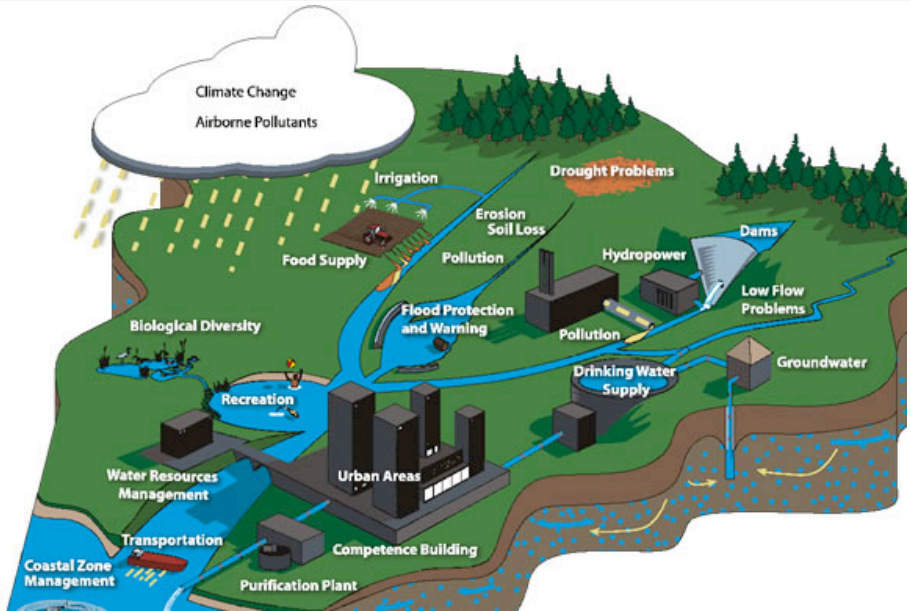
La charge hydraulique est définie à partir des équations de Navier-Stokes turbulentes. On moyenne ensuite cette charge sur la section d'un écoulement à surface à libre dans un canal.

## 2. Ressauts hydrauliques

Le tracé de la charge spécifique permet de décrire l'écoulement stationnaire sur un obstacle d'extension finie et de faible pente. Le tracé de l'impulsion permet de décrire les ressauts stationnaires.

## 3. Courbes de remous

On paramétrise le frottement, proportionnel à la perte charge, à l'aide d'un coefficient de Strickler, et on trace les courbes de remous des écoulements stationnaires.



## Barrage des trois gorges



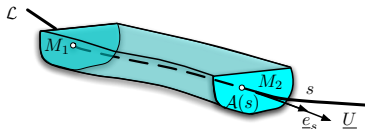
## Équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} - \operatorname{div} \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2 + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{F} = -\operatorname{grad} (g z)$$

$$\int_{\mathcal{L}} \operatorname{grad} H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left( -\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu \Delta \underline{U} - \operatorname{div} \underline{\underline{R}} \right) \cdot d\underline{M}$$

avec  $R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}$  et  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$



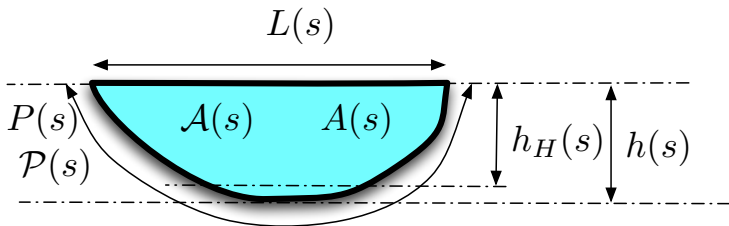
### Integration de $M_1$ à $M_2$

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M}$$

avec  $\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \operatorname{div} \underline{\underline{R}})$

- Section :  $A$
- Périmètre mouillé :  $P$
- Largeur miroir :  $L$

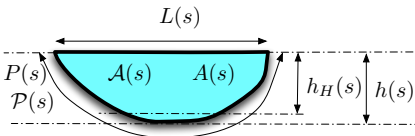
- Rayon hydraulique :  $R_H = A/P$
- Diamètre hydraulique :  $D_H = 4 R_H$
- Hauteur hydraulique :  $h_H = A/L$



- On suppose souvent  $h_H \sim h$
- Section rectangulaire avec  $L \gg h$  :  $R_H \sim h$
- Section en demi-cercle de rayon  $R$  :  $R_H = R/2$

## Débit moyen et vitesse moyenne :

$$Q(s) = \iint_A \underline{U} \cdot \underline{e}_s da = A(s) U(s) \implies U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_A \underline{U} \cdot \underline{e}_s da$$



## Charge hydraulique moyenne :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{A(s)} \iint_A \left( \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} \right) da \\ &= \frac{P_*(s)}{\rho g} + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} \end{aligned}$$

$$P_*(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_A (p + \rho g z) da$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_A U^2 da$$

Dans le cas hydrostatique :

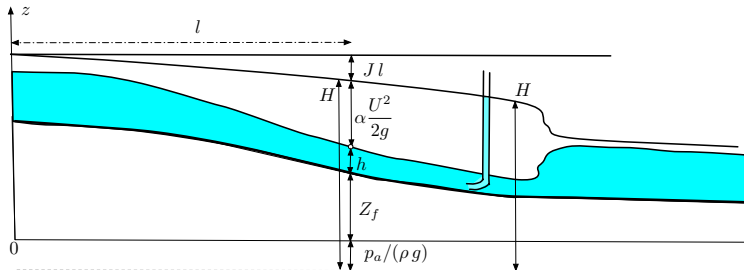
$$P_* = p + \rho g z$$

Pour des profils turbulents :

$$\alpha \sim 1$$

## Charge hydraulique des écoulements à surface libre :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}$$



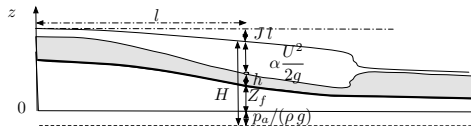
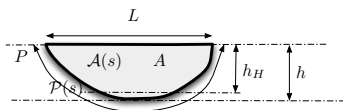
Perte de charge linéique  $\frac{dH}{ds} = -J$  :

$$H(s_2) - H(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} J(s) ds \quad \text{avec} \quad J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{J} \cdot \underline{e}_s da$$



## Équations d'équilibre avec $\alpha \sim 1$ :

$$\frac{dQ}{ds} = 0 \text{ avec } Q = UA, \quad \frac{dH}{ds} = -J \text{ avec } H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g}$$



Pente  $I = -dZ_f/ds$  :

$$\frac{d(UA)}{ds} = \frac{dU}{ds} A + U \frac{dA}{dh} \frac{dh}{ds} = 0$$

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{ds} - I + \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} = -J$$

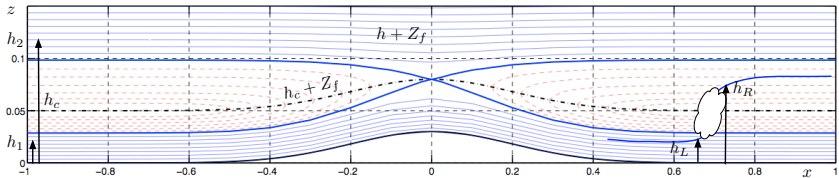
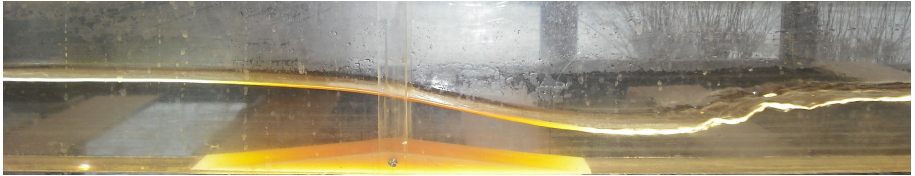
Si  $dA \sim L dh$  et  $A/L = h_L \sim h$  :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2}$$

où le nombre de Froude est

$$Fr = U / \sqrt{gh}$$

# Écoulement sur un obstacle



Hauteur critique  $h_c$  dans le cas  $L$  constante et  $A/L = h_H \sim h$  :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} = \left(\frac{h_c}{h}\right)^{3/2} \quad \text{avec} \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad q = U h$$

Obstacle  $z = Z_f(s)$  dans le cas  $J \sim 0$  (frottements négligeables) :

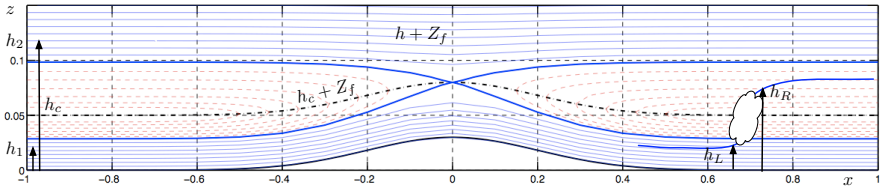
$$\frac{dh}{ds} = \frac{l}{1 - Fr^2} = \frac{-dZ_f/ds}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad \Rightarrow \quad h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2} = H_0 - Z_f$$

Charge spécifique  $\mathcal{E}(q, h)$  et conservation de la charge  $H$  :

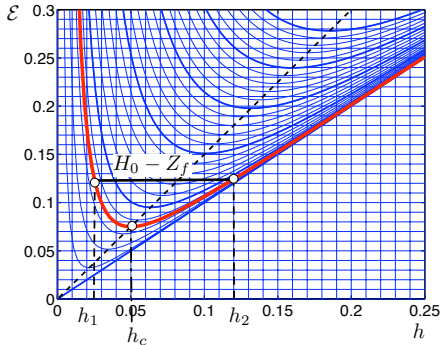
$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{q^2}{2 g h^2} = h + \frac{U^2}{2 g} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2}$$

$$\text{On a donc :} \quad \mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$$

$$H = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h(s) + \frac{U(s)^2}{2 g} \quad \Rightarrow \quad H_0 = H - \frac{p_a}{\rho g}$$



Solutions de  $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$



Écoulement critique :  $Fr = 1$  :

- Sous critique :  
 $h > h_c \iff Fr < 1$
- Super critique :  
 $h < h_c \iff Fr > 1$

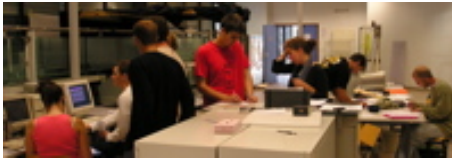
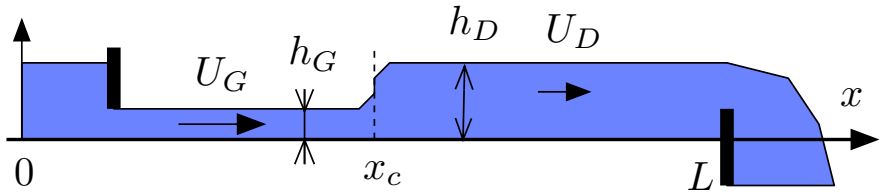
$h_1$  et  $h_2$  sont des hauteurs conjuguées pour  $\mathcal{E}(q, h)$

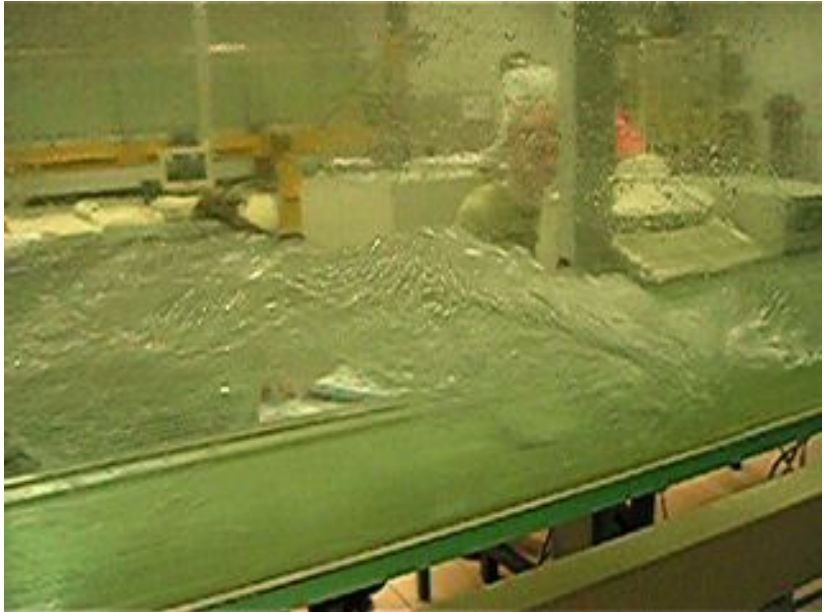


# Ressauts hydraulique stationnaire sur le Mississippi

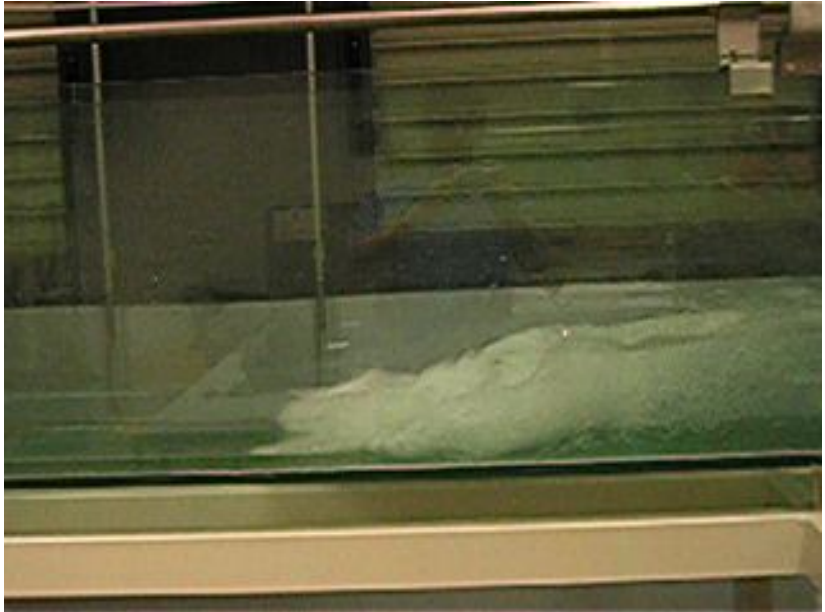


# Ressauts hydrauliques en laboratoire



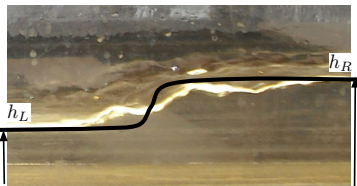
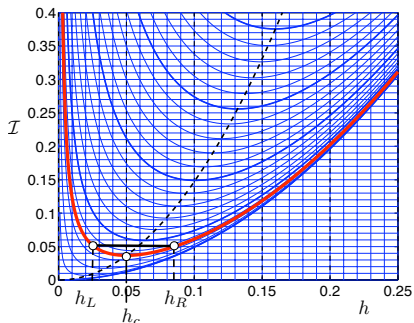






## Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$U_L h_L = U_R h_R = q \quad \text{et} \quad h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2$$

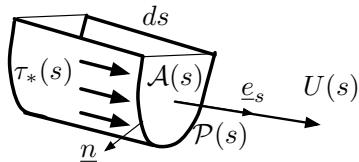


Élimination de la vitesse  $\implies$  fonction impulsion  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(q, h) = \frac{g}{h} \left( h_c^3 + \frac{1}{2} h^3 \right)$$

## Équations de Navier-Stokes turbulentes et perte de charge :

$$\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \underline{\text{div}} \underline{R}) = -\frac{1}{\rho g} \underline{\text{div}} (\underline{\tau}_t) \quad \text{avec} \quad \underline{\tau}_t = \rho (2\nu \underline{d} - \underline{R})$$



$$J = \frac{1}{A} \iint_A \underline{J} \cdot \underline{e}_s da$$

$$\tau_* = -\frac{1}{P} \int_P \underline{e}_s \cdot \underline{\tau}_t \cdot \underline{n} dl$$

$$\iint_A \frac{\partial}{\partial s} (\underline{e}_s \cdot \underline{\tau}_t \cdot \underline{e}_s) da \sim 0$$

## Relation entre la perte de charge linéique $J$ et le frottement $\tau_*$ :

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad \text{avec} \quad R_H = A/P$$

Paramétrisation du frottement  $\tau_* = \rho g R_H J$  :

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2 \quad \Longleftrightarrow \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H}$$

avec  $Re = U D_H / \nu$  et  $Ru = k_s / D_H$

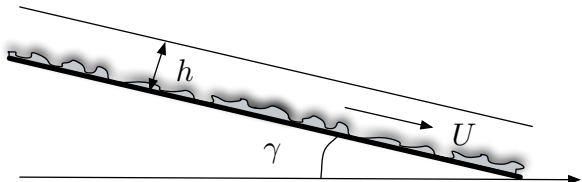
Paramétrisation de Manning-Strickler (cas rugueux) :

$$\lambda = \phi_{MS} Ru^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{U^2}{R_H^{4/3} K_s^2} \quad \text{avec} \quad K_s = \left( \frac{8 k_s^{1/3} g}{\phi_{MS}} \right)^{1/2}$$

Si  $l = -\frac{dZ_f}{ds} = \sin \gamma$  :

$J = l$  et  $R_H = h \Rightarrow$

$$U = K_s h^{\frac{2}{3}} \sqrt{\sin \gamma}$$



Équation stationnaire pour  $h$  avec frottement  $J$  :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad \text{avec} \quad I = -\frac{dZ_f}{ds}$$

Hauteur critique  $h_c$  :

$$Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h}\right)^2 \quad \text{avec}$$

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

Hauteur normale  $h_n$  :

$$J = I \left(\frac{h}{h_n}\right)^{-10/3} \quad \text{avec}$$

$$h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2}\right)^{3/10}$$

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}$$

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}}$$

