

Turbulence et frottement

MEC567 : SCIENCES DE L'EAU ET ENVIRONNEMENT

Olivier THUAL, 16 janvier 2011



Introduction

1. Modélisation turbulente

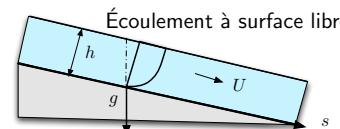
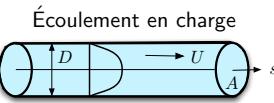
Les flux turbulents, comme celui d'un scalaire passif ou le tenseur de Reynolds, sont des moyennes de produits de fluctuations turbulentes. On les relie aux gradients des champs moyens.

2. Profils de vitesse

Le modèle turbulent de longueur de mélange est utilisé par les ingénieurs. Il permet de dériver des profils logarithmiques près de parois lisses ou rugueuses à partir de la loi de Von Karman.

3. Diagramme de Moody

Le diagramme de Moody permet de déterminer le coefficient de frottement en fonction de l'écoulement moyen et de la rugosité. Son application aux écoulements en charge est abordée.



Charge H , perte de charge linéaire J et cisaillement τ_*

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}, \quad \frac{dH}{ds} = -J \quad \text{et} \quad \tau_* = \rho g R_H J$$

Coefficient de frottement λ

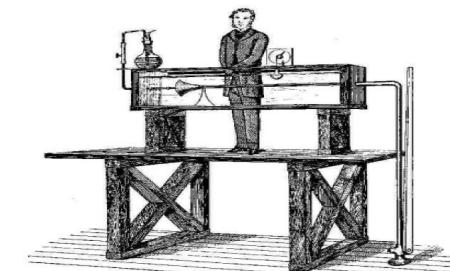
$$J = \lambda(Re) \frac{U^2}{2g D_H} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad \text{et} \quad D_H = 4 R_H$$

Poiseuille circulaire

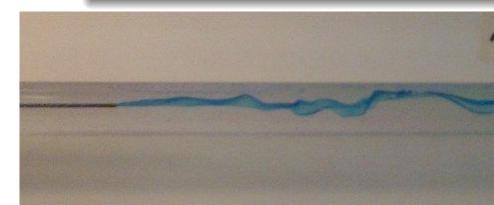
$$D_H = D \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

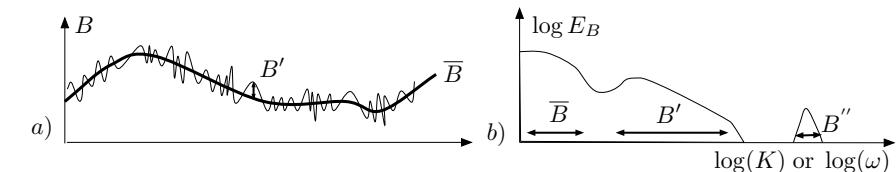
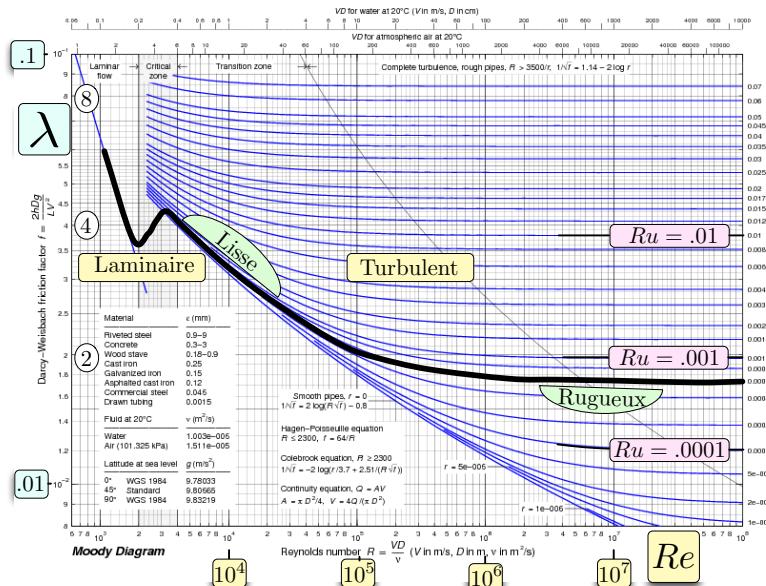
Poiseuille plan

$$R_H = h \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{96}{Re}$$



Expérience de Reynolds : $Re = UD/\nu$





Signal temporel $b(t) = B(\underline{x}, t)$ ou spatial $b(\underline{x}) = B(\underline{x}, t)$:

$$b(t) = \int_{\mathcal{R}} \hat{b}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \iff \hat{b}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{R}} b(t) e^{i\omega t} dt$$

$$b(\underline{x}) = \iiint_{\mathcal{R}^3} \hat{b}(K) e^{iK \cdot \underline{x}} dK^3 \iff \hat{b}(K) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathcal{R}^3} b(\underline{x}) e^{-iK \cdot \underline{x}} d\underline{x}^3$$

Spectres $E_B(\omega) = \frac{1}{2} |\hat{b}(\omega)|^2$ ou $E_B(K) = \iint \frac{1}{2} |\hat{b}(K)|^2 dS$ motivent :

$$B(\underline{x}, t) = \bar{B}(\underline{x}, t) + B'(\underline{x}, t)$$

Scalaire passif B advecté par \underline{U} :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B = k_B \Delta B$$

En utilisant $\text{div } \underline{U} = 0$:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \text{div}(\underline{U} B) = k_B \Delta B$$

Décomposition $B = \bar{B} + B'$ et $\underline{U} = \bar{\underline{U}} + \underline{U}'$:

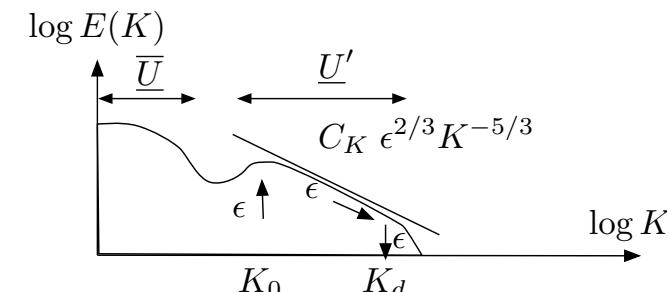
$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{div}(\bar{\underline{U}} \bar{B}) = k_B \Delta \bar{B} - \text{div}(\underline{U}' B')$$

Flux turbulent de B :

$$E_{Bt} = \bar{\underline{U}}' B'$$

Équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds :

$$\text{div } \bar{\underline{U}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\underline{U}} + \bar{\underline{U}} \cdot \underline{\text{grad}} \bar{\underline{U}} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} \bar{p} + \nu \Delta \bar{\underline{U}} - \underline{\text{div}} \underline{R}$$



Tenseur de Reynolds : $R_{ij} = \bar{U}'_i \bar{U}'_j$

Diffusivité turbulente k_{Bt} :

$$\underline{F}_{Bt} = -k_{Bt} \underline{\text{grad}} \underline{B} \quad \text{avec} \quad \underline{F}_{Bt} = \overline{\underline{U}' \underline{B}'}$$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{B} = \text{div} [(k_B + k_{Bt}) \underline{\text{grad}} \underline{B}]$$

Viscosité turbulente ν_t :

$$\underline{R} = -2 \nu_t \underline{\underline{d}} + \frac{2}{3} k \underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}$$

Tenseur des taux de déformations : $\underline{\underline{d}}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right]$

Énergie cinétique turbulente : $k = \frac{1}{2} \left(\overline{U_1^2} + \overline{U_2^2} + \overline{U_3^2} \right)$

Pour un écoulement parallèle $\underline{U} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$:

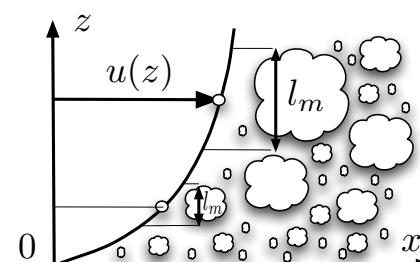
$$\overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

Pour un écoulement parallèle $\underline{U} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \quad \text{et donc} \quad \overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

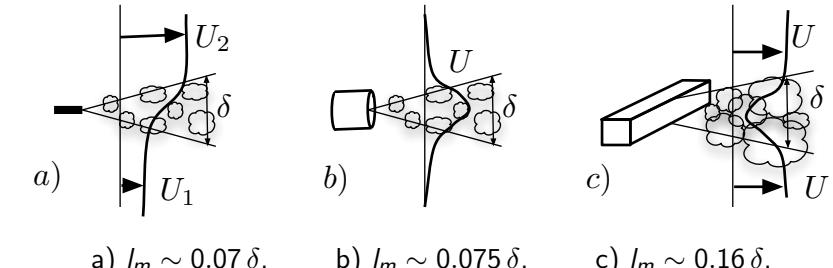
Longueur de mélange près d'un mur :

$$l_m = \kappa z \quad \text{avec} \quad \kappa = 0.41 \quad \text{constante de "Von Karman"}$$



Longueur de mélange l_m pour la viscosité turbulente ν_t :

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} = \text{tr} (\underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{d}}) = d_{ij} d_{ji} = d_{ij} d_{ij}$$



Analogie avec la viscosité moléculaire $\nu \sim l_{mol} u_{mol}$:

$$\nu_t = l_m u_m \quad \text{où} \quad u_m \sim l_m \sqrt{2 \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}} \quad \text{et} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right)$$

Pour un écoulement parallèle $\underline{U} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$:

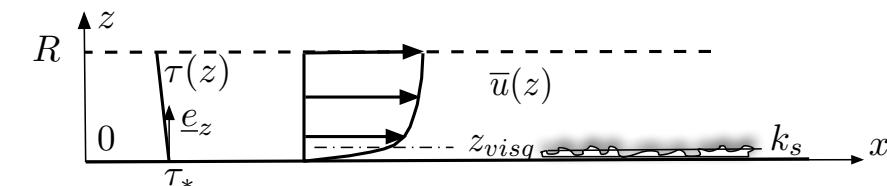
$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \quad \text{et donc} \quad \overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

Longueur de mélange près d'un mur :

$$l_m = \kappa z \quad \text{avec} \quad \kappa = 0.41 \quad \text{constante de "Von Karman"}$$

Écoulement forcé par un gradient de pression constant G :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - g - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'})$$



Contrainte tangentielle $\tau(z) = \rho (\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'})$

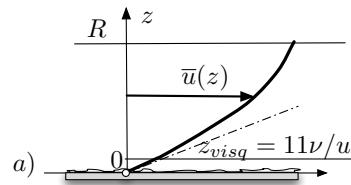
$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = -G \quad \text{et} \quad \tau(z) = \tau_* - G z \sim \tau_* \quad \text{si} \quad R \ll \tau_*/G$$

$$\text{D'où} \quad \left(\nu + l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 \quad \text{en définissant} \quad \tau_* = \rho u_*^2$$

$$l_m = \kappa z \implies \left(\nu + \kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2$$

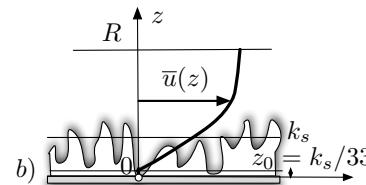
Lisse : couche $z \in [0, z_{visq}]$

$$l_m \sim 0 \implies \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$$



Rugueux : couche $z \in [0, z_0]$

$$z_0 = \frac{k_s}{33} \quad \text{et} \quad u(z) = 0$$



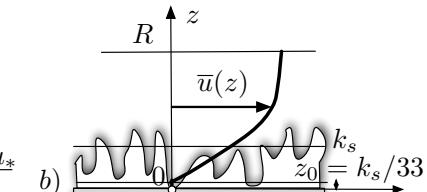
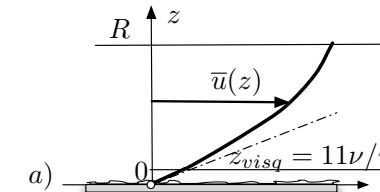
lisse pour $\frac{u_* k_s}{\nu} < 5$ et

rugueux pour $\frac{u_* k_s}{\nu} > 70$

13/24

Dans la couche où ν est négligeable :

$$\kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 \implies \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta} \right) + \zeta,$$



Lisse : $z_{visq} = 11 \nu / u_*$

$$\frac{\bar{u}_{sth}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta_{sth}} \right) + \zeta_{sth}$$

$$\delta_{sth} = \nu / u_*$$

$$\zeta_{sth} = 11 - \ln(11)/\kappa = 5.2$$

Rugueux : $z_0 = k_s/33$

$$\frac{\bar{u}_{rgh}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta_{rgh}} \right) + \zeta_{rgh}$$

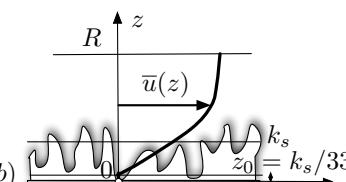
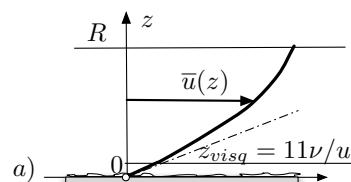
$$\delta_{rgh} = k_s$$

$$\zeta_{rgh} = \ln(33)/\kappa = 8.5$$

Moyenne sur la couche logarithmique :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta} \right) + \zeta \quad \text{et} \quad z_{visq} \sim 0 \quad \text{ou} \quad z_0 \sim 0$$

$$\implies \frac{U}{u_*} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\bar{u}}{u_*} dz = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{R}{\delta} \right) + \zeta - \frac{1}{\kappa}$$



Définition du coefficient de frottement λ :

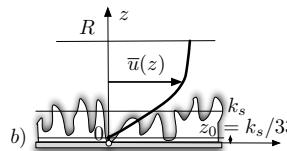
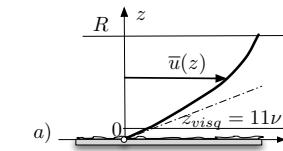
$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \iff \tau_* = \rho u_*^2 = \frac{1}{8} \lambda \rho U^2$$

15/24

Diamètre hydraulique $D_H = 4 R$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \frac{U}{u_*} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a \log_{10} \left(\frac{D_H}{\delta} \right) + b$$

$$\text{où } a = \ln(10)/(\kappa\sqrt{8}) = 2.0 \quad \text{et} \quad b = [\zeta - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8}$$



Coefficients de frottement λ pour fonds lisses ou rugueux :

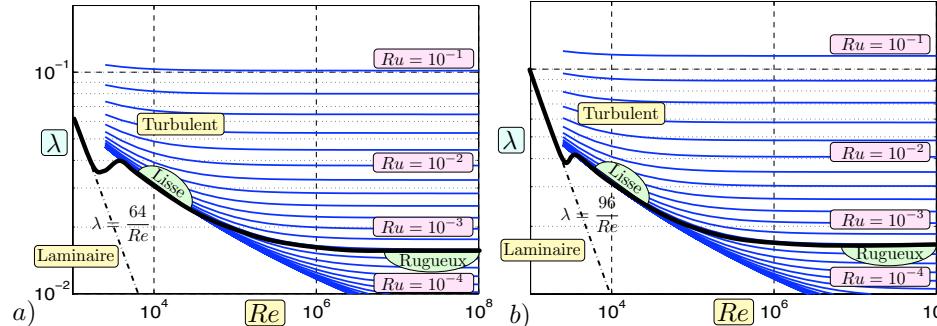
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{sth}}} = 2.0 \log_{10} \left(Re \sqrt{\lambda_{sth}} \right) + b_{sth} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{U D_H}{\nu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{rgh}}} = -2.0 \log_{10} (Ru) + b_{rgh} \quad \text{avec} \quad Ru = \frac{k_s}{D_H}$$

16/24

Formule de Colebrook pour tous types de fonds :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{Ru}{\alpha_f} + \frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad \alpha_f \in [3, 4], \quad \beta_f \in [0, 6]$$

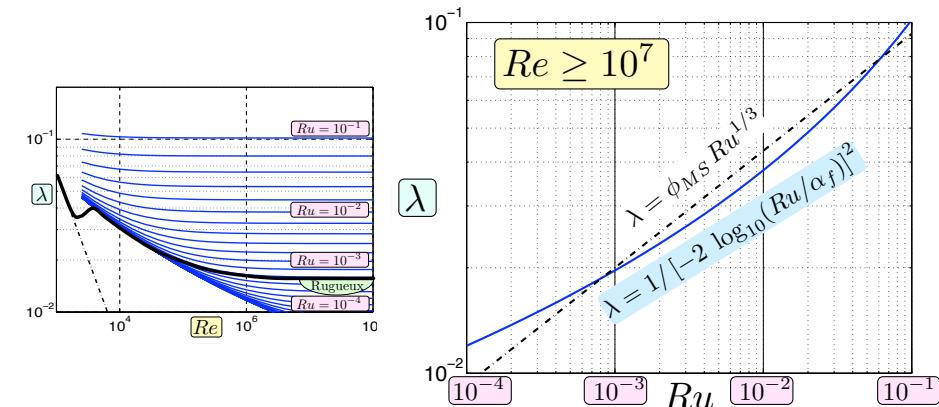


Hydraulique en charge :

$$\alpha_f = 3.7, \quad \beta_f = 2.51$$

Hydraulique à surface libre :

$$\alpha_f = 3, \quad \beta_f = 2.5$$



Paramétrisation de Manning-Strickler pour les régimes rugueux :

$$\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}$$

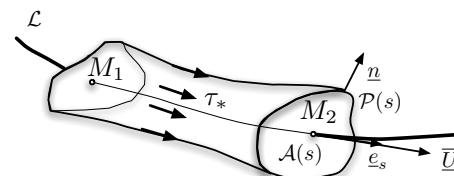
Proche de la formule de Colebrook pour $\phi_{MS} \sim 0.2$

Équations de Navier-Stokes incompressibles turbulentes

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} = -\underline{\operatorname{grad}} (g z) - \frac{1}{\rho} \underline{\operatorname{grad}} \bar{p} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\tau}_t$$

Tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes :

$$\underline{\tau}_t = \rho (2 \nu \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{R}})$$



Relation de Bernoulli : le long d'une ligne de courant \mathcal{L}

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M}$$

$$\text{avec } H = \frac{\bar{p}}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2 \quad \text{et} \quad \underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \operatorname{div} (\underline{\tau}_t)$$

Charge hydraulique dans une conduite

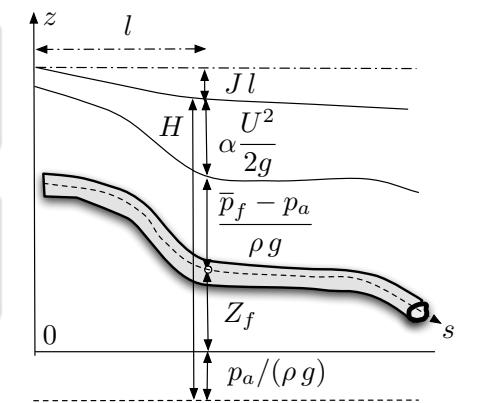
$$H(s) = \frac{\bar{p}_f(s)}{\rho g} + Z_f(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}$$

Vitesse moyenne

$$U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{U} \cdot \underline{e}_s da$$

Coefficient

$$\alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{U}^2 da$$

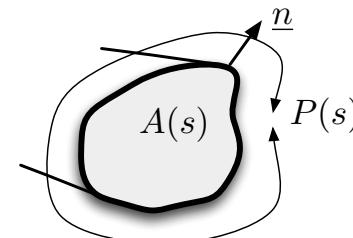


Perte de charge linéique

$$J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \bar{J} \cdot \underline{e}_s \, da \quad \text{avec} \quad \bar{J} = -\frac{1}{\rho g} \operatorname{div} \bar{\tau}_t$$

Contrainte de cisaillement

$$\tau_*(s) = -\frac{1}{P(s)} \int_{\mathcal{P}(s)} \underline{e}_s \cdot \bar{\tau}_t \cdot \underline{n} \, dl$$

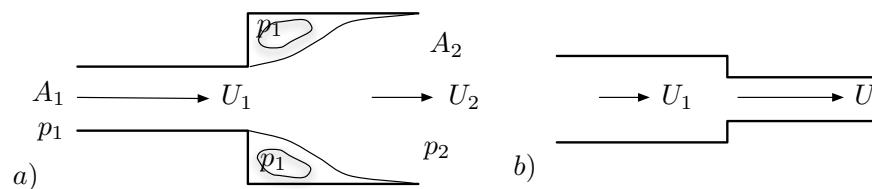


Rayon hydraulique

$$R_H(s) = A(s)/P(s)$$

Relation entre τ_* et J valable dans les cas graduellement variés

$$\tau_*(s) = \rho g R_H(s) J(s)$$



a) Élargissements brusques

$$\Delta H = K_g \frac{U_1^2}{2g} \quad \text{avec} \quad K_g = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2.$$

Bilan de quantité de mouvement (théorème d'Euler) :

$$\rho U_1^2 A_1 + p_1 A_2 = \rho U_2^2 A_2 + p_2 A_2$$

b) Rétrécissement brusques

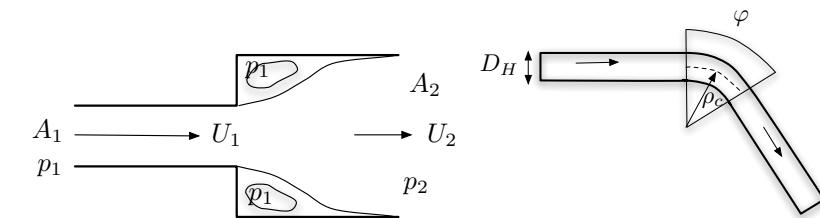
$$\Delta H = 0 : \text{pas de perte de charge singulière}$$

Écoulements en charge turbulents : $\alpha \sim 1$

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad \text{avec} \quad H = \frac{\bar{p}_f}{\rho g} + Z_f + \frac{U^2}{2g} \quad \text{et} \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H}$$

Pertes de charges singulières

$$\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g}$$



Coudes

$$\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g} \quad \text{avec} \quad K_g = \frac{\varphi}{\pi/2} \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{2\rho_c}{D_H} \right)^{-3.5} \right]$$

