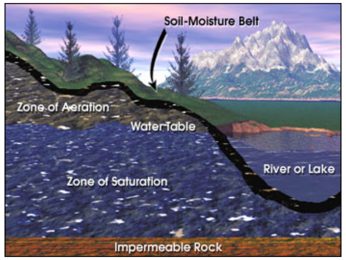
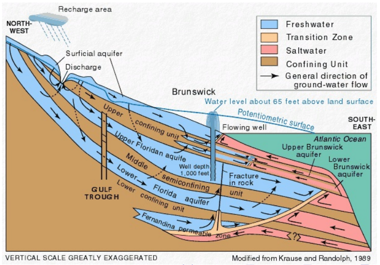
# Écoulements potentiels

MEC567 : SCIENCES DE L'EAU ET ENVIRONNEMENT

Olivier THUAL, 15 janvier 2011








## Introduction

### 1. Perte de charge

La charge hydraulique est définie à partir de l'équation de Bernoulli. La loi de Darcy unidimensionnelle s'applique en moyennant la charge hydraulique sur une section.

### 2. Milieux poreux

La loi de Darcy tri-dimensionnelle énonce que la charge est le potentiel de l'écoulement. Des conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre l'équation de Laplace qui en découle.

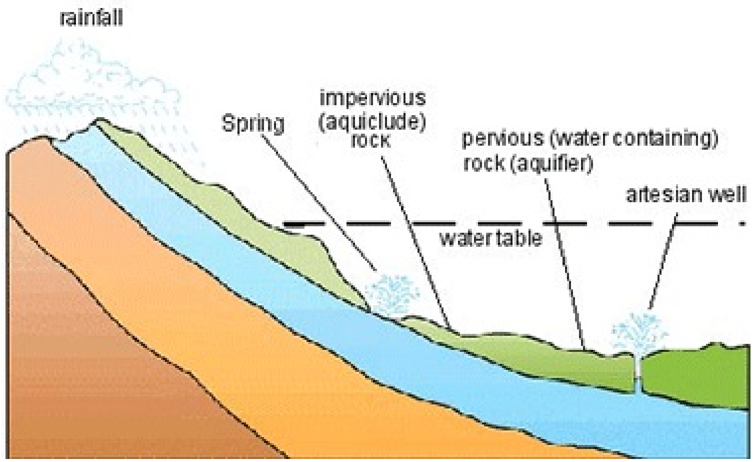
### 3. Écoulements souterrains

L'écoulement d'un puits artésien est présenté comme exemple d'aquifère confiné. L'approximation de Dupuit est introduite et appliquée aux puits dans des aquifères phréatiques.





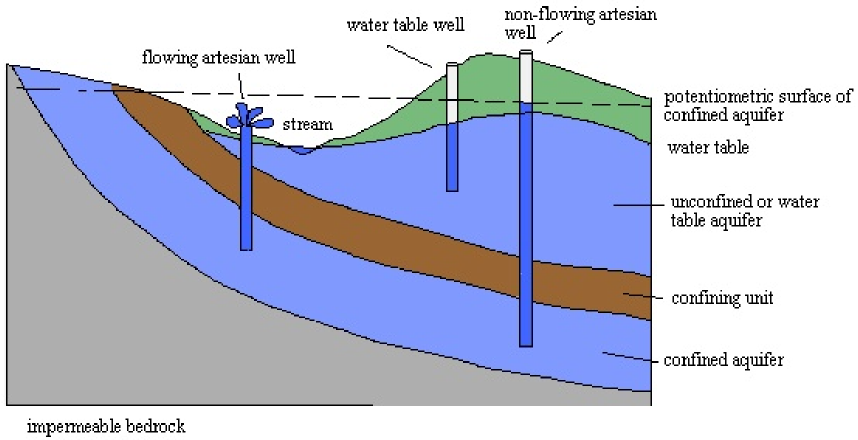
### Aquifère artésien








### Aquifère phréatique



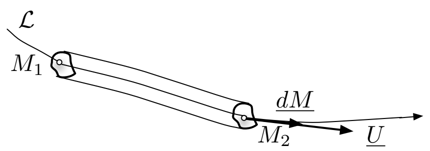
## Équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\mathrm{div}\ \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \underline{\mathrm{grad}}\ p + \nu\, \Delta \underline{U}$$

$$\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U} = \frac{1}{2}\ \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\mathrm{rot}}\ \underline{U} \wedge \underline{U} \qquad \text{et} \qquad \underline{F} = -\underline{\mathrm{grad}}\ (g\, z)$$

$$\int_{\mathcal{L}} \underline{\mathrm{grad}}\ H \cdot \underline{dM} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left( -\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu\, \Delta \underline{U} \right) \cdot \underline{dM}$$

avec $\mathcal{L}$ ligne de courant et $H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{1}{2\, g} \underline{U}^2$



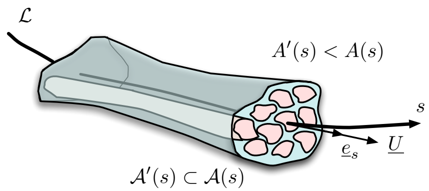

### Integration de $M_1$ à $M_2$

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right)$$

avec $\quad \underline{J} = \frac{1}{g}(-\nu\, \Delta \underline{U})$








### Vitesse et débit moyens

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s\, da$$

$$U(s) = \frac{Q(s)}{A(s)} = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s\, da$$

$$H(s) = \frac{1}{A'} \iint_{\mathcal{A}'} \left( \frac{p}{\rho\, g} + z + \frac{U^2}{2g} \right) da = \frac{P_*(s)}{\rho\, g} + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}$$

### Pression piézométrique et porosité $m = A'/A$

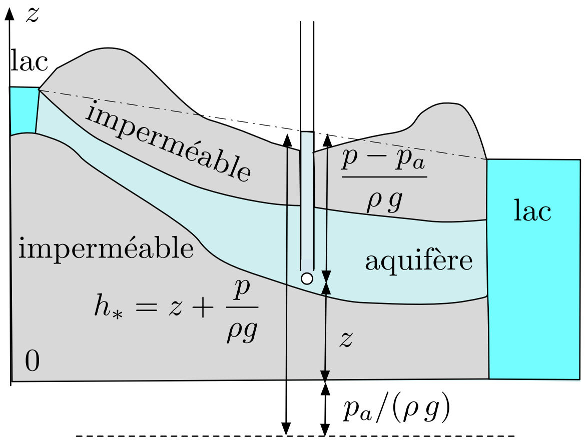
$$P_*(s) = \frac{1}{A'} \iint_{\mathcal{A}'} (p + \rho\, g\, z)\, da \qquad \text{et} \qquad \alpha(s) = \frac{\frac{1}{A'} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U}^2\, da}{\left[ \frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s\, da \right]^2}$$





## Charge hydraulique $H$ et charge piézométrique $h_*$

Mouvements lents $\Longrightarrow H \sim h_* = z + \frac{p}{\rho\, g}$ avec $h_* = \frac{P_*}{\rho\, g}$

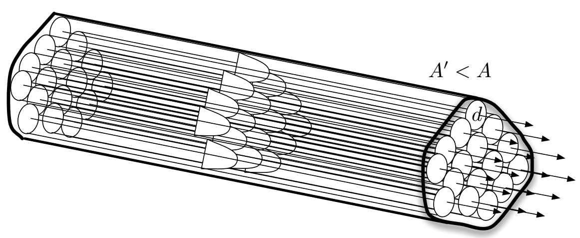







### Fibre d'écoulements de Poiseuille de porosité $m = A'/A$

$$J = \frac{U}{K_p} \qquad \text{avec} \qquad K_p = m\, \frac{g\, d^2}{32\, \nu}$$

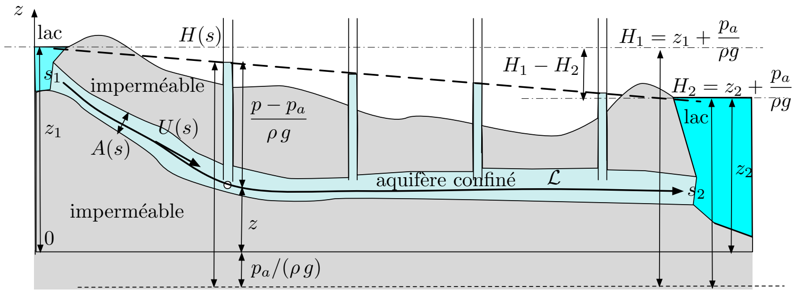



### Loi de Darcy unidimensionnelle :

$$J(s) = \frac{U(s)}{K_p(s)} \qquad \Longrightarrow \qquad U(s) = -K_p(s)\, \frac{dH}{ds}(s)$$

## Aquifère confiné de débit $Q = A(s)\, U(s)$ :

$$\frac{d}{ds}(AU) = 0 \qquad \text{et} \qquad U = -K_p \frac{dH}{ds}$$




## Section constante et cond. limites $H(s_1) = H_1$ et $H(s_2) = H_2$ :

$$H(s) = H_1 + \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2}(s - s_2) \qquad \text{et} \qquad U = -K_p \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2}$$





## Équations de Navier-Stokes moyennées et potentielles ($\underline{\text{rot}}\ \underline{U} = 0$)

$$\text{div}\ \underline{U} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{g}\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}\left(\frac{p}{\rho\, g} + z + \alpha \frac{U^2}{2\, g}\right) = -\underline{J}\,,$$

## Loi de Darcy pour les milieux isotropes :

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)}\, \underline{U}(\underline{x}, t)$$

## Équations pour les écoulements homogènes et stationnaires :

$$H = \frac{p}{\rho\, g} + z + \alpha \frac{U^2}{2\, g} \quad \sim \quad h_* = \frac{p}{\rho\, g} + z$$

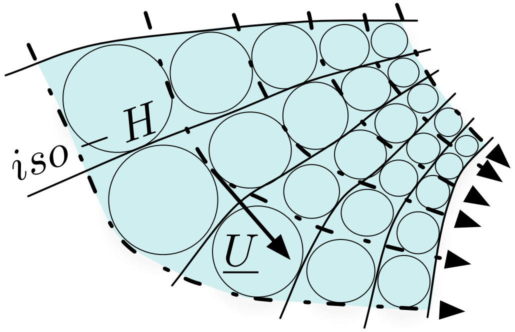
$$\text{div}\ \underline{U} = 0 \qquad \text{et} \qquad \underline{U} = -K_p\ \underline{\text{grad}}\ H \quad \Longrightarrow \quad \Delta H = 0$$





## Milieu poreux homogènes et isotropes

$$\underline{U} = -K_p\ \underline{\text{grad}}\ H \qquad \text{et} \qquad \Delta H = 0$$



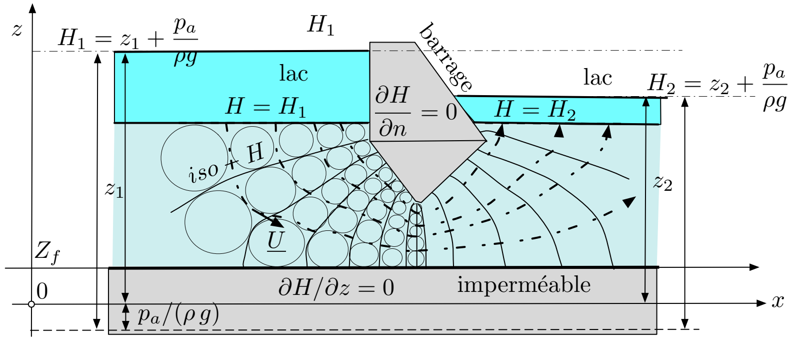

Iso-$H$ et trajectoires sont orthogonales, méthodes des cercles





## Conditions aux limites pour $\Delta H = 0$ pour les écoulement confinés :

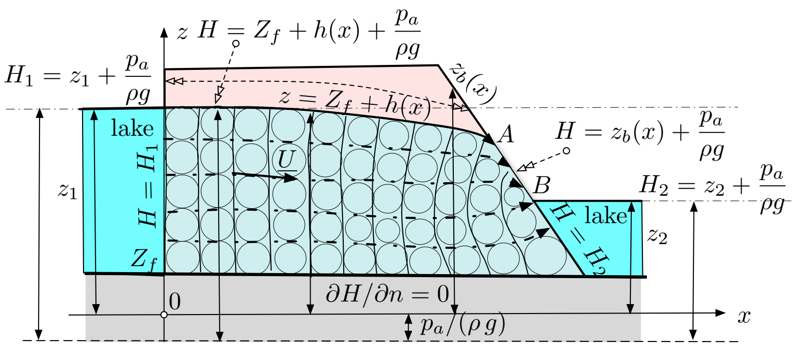
- Frontières imperméables : $\underline{\text{grad}}\ H \cdot \underline{n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0$
- Frontières avec des eaux de surface : $H = H_i$




Iso-$H$ et trajectories sont orthogonales, méthode des cercles

## Conditions aux limites pour des écoulements non confinés :

- Surface libre : $H = h + \frac{p_a}{\rho g}$ at $z = h(x, y)$
- Surface de résurgence : $H = z + \frac{p_a}{\rho g}$



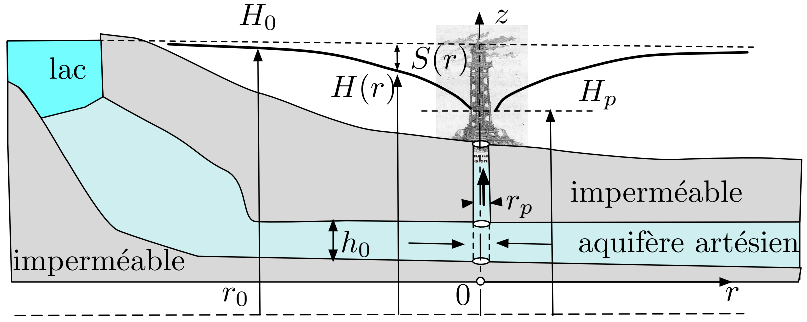

Fluide émergeant et suintant le long de la surface de résurgence





## Aquifère artésien d'épaisseur constante $h_0$ :

$$\Delta H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right) = 0 \qquad \text{avec} \qquad H(r_0) = H_0$$



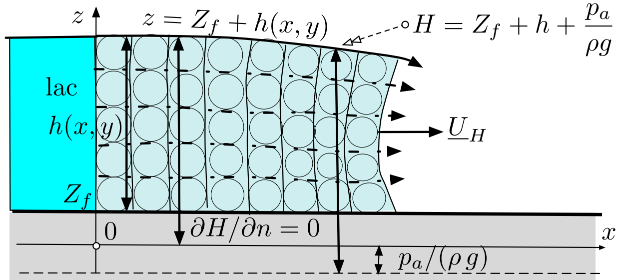

$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\,\pi\, T} \,\text{Ln}\left(\frac{r_0}{r}\right) \qquad \text{avec} \qquad T = K_p\, h_0$$





## Approximation de Dupuit quand les iso-$H$ sont presque verticales

$$H(x, y) \sim Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho\, g} \quad \text{et on choisit } Z_f = 0 \text{ (fond plat)}$$




## On démontre que div $\underline{q} = 0$ avec $\underline{q} = h\, \underline{U}_H = (hU, hV)$ et donc :

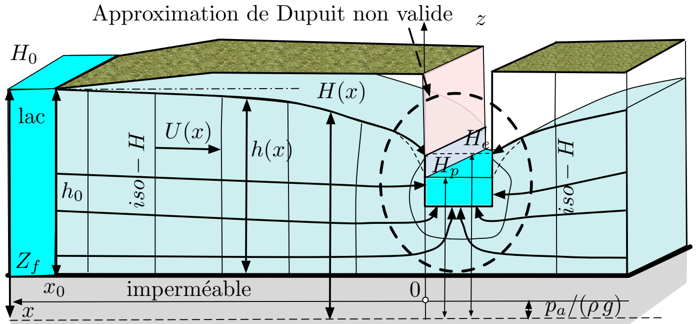
$$\frac{\partial}{\partial x}(h\ U) + \frac{\partial}{\partial y}(h\ V) = 0\ , \quad U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y}$$





## Fossé prismatique :

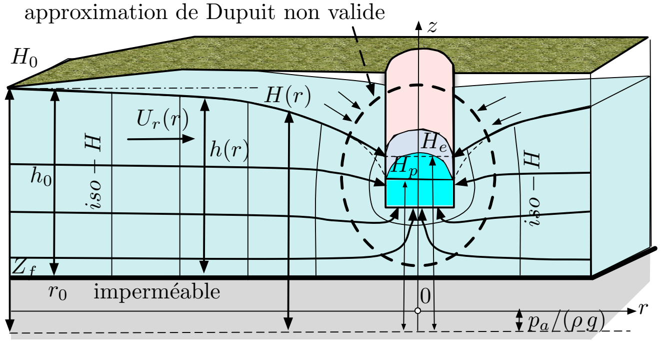
$$\frac{d}{dx}\left[U(x)\, h(x)\right] = 0 \qquad \text{et} \qquad U(x) = -K_p \frac{dH}{dx}(x) = -K_p \frac{dh}{dx}(x)$$




$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2\,q}{K_p}\,|x_0 - x|$$

## Puits cylindrique vertical :

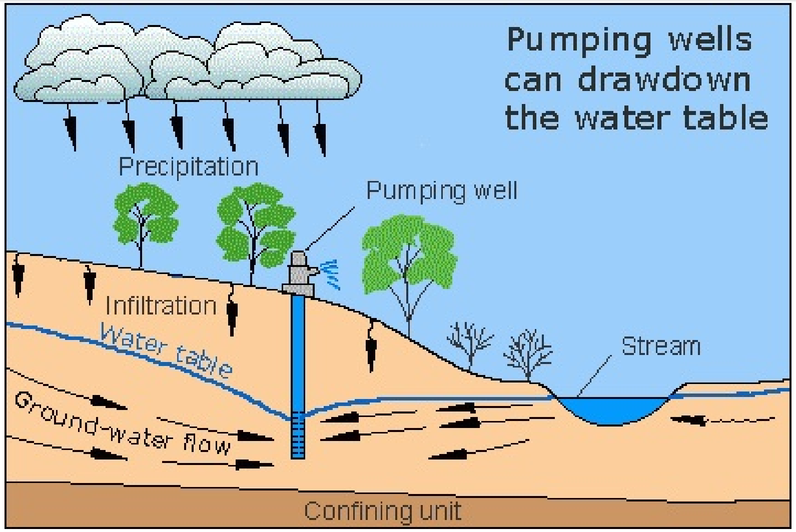
$$\frac{d}{dr}\left[r\ U_r(r)\ h(r)\right] = 0 \quad \text{et} \quad U_r(r) = -K_p\ \frac{dH}{dr}(r) = -K_p\ \frac{dh}{dr}(r)$$




$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi\, K_p}\ \mathrm{Ln}\left(\frac{r_0}{r}\right)$$



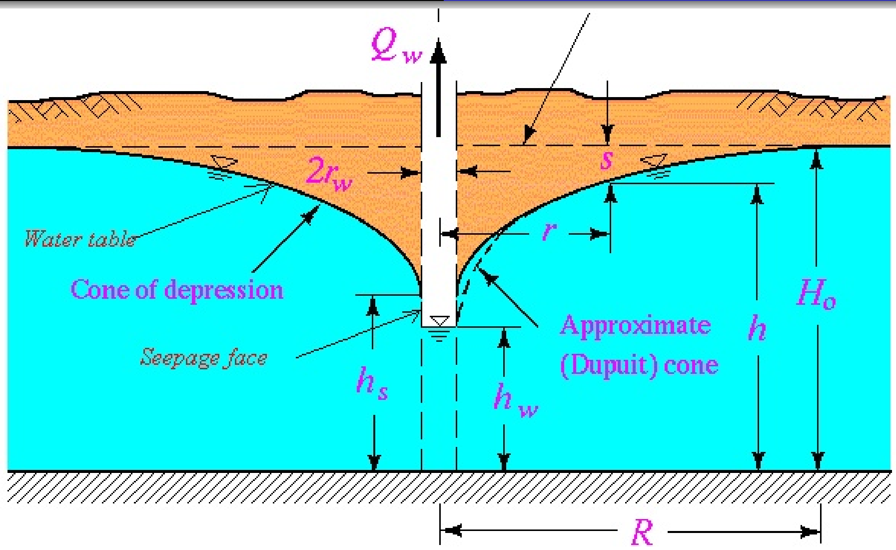





http ://ga.water.usgs.gov/edu/








http ://www.cmdlet.com/demos/agwh-course/