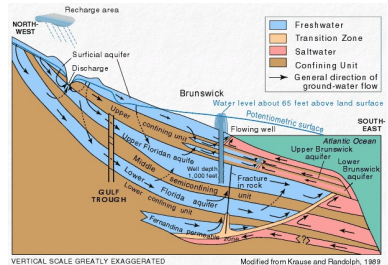
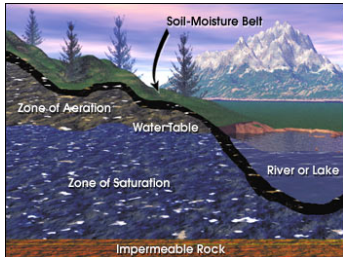


Écoulements potentiels

HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT, O. THUAL

28 septembre 2011



Introduction

1. Perte de charge

La charge hydraulique est définie à partir de l'équation de Bernoulli. La loi de Darcy unidimensionnelle s'applique en moyennant la charge hydraulique sur une section.

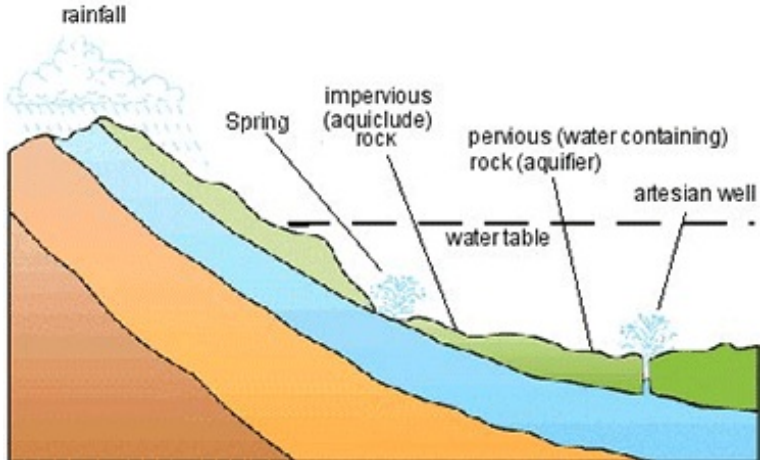
2. Milieux poreux

La loi de Darcy tri-dimensionnelle énonce que la charge est le potentiel de l'écoulement. Des conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre l'équation de Laplace qui en découle.

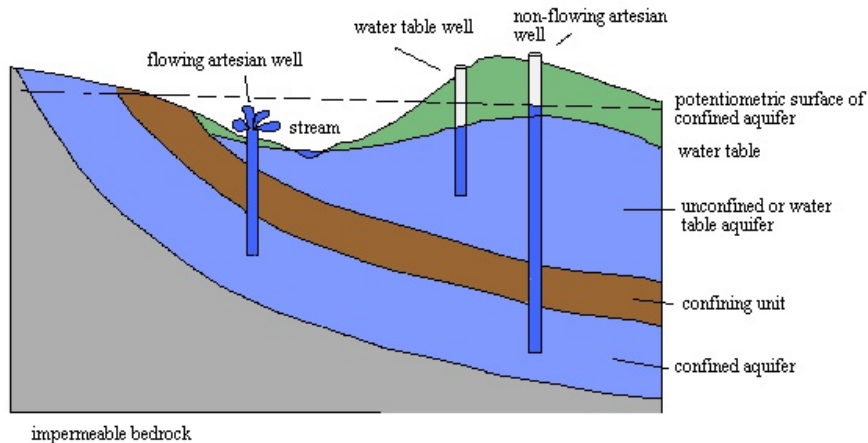
3. Écoulements souterrains

L'écoulement d'un puits artésien est présenté comme exemple d'aquifère confiné. L'approximation de Dupuit est introduite et appliquée aux puits dans des aquifères phréatiques.

Aquifère artésien



Aquifère phréatique



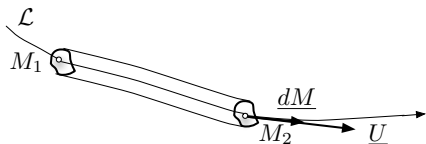
Équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U}$$

$$\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2 + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{F} = -\operatorname{grad} (gz)$$

$$\int_{\mathcal{L}} \operatorname{grad} H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial U}{\partial t} + \nu \Delta U \right) \cdot d\underline{M}$$

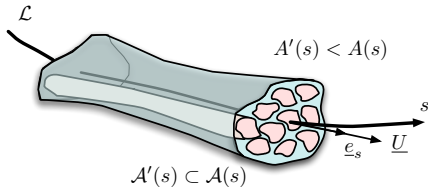
avec \mathcal{L} ligne de courant et $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} U^2$



Integration de M_1 à M_2

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \underline{J} \right)$$

avec $\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U})$



Vitesse et débit moyens

$$Q(s) = \iint_{A'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s da$$

$$U(s) = \frac{Q(s)}{A(s)} = \frac{1}{A(s)} \iint_{A'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s da$$

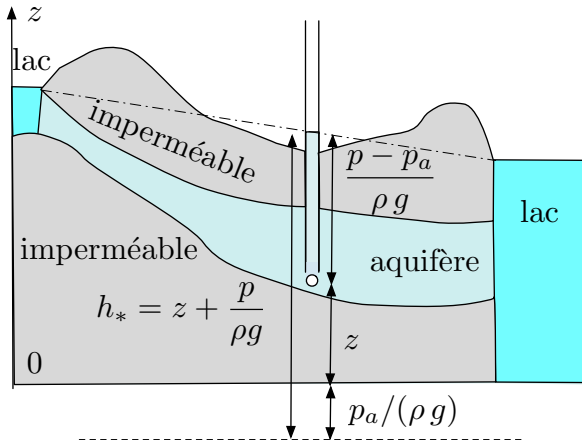
$$H(s) = \frac{1}{A'} \iint_{A'} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} \right) da = \frac{P_*(s)}{\rho g} + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}$$

Pression piézométrique et porosité $m = A' / A$

$$P_*(s) = \frac{1}{A'} \iint_{A'} (p + \rho g z) da \quad \text{et} \quad \alpha(s) = \frac{\frac{1}{A'} \iint_{A'} U^2 da}{\left[\frac{1}{A} \iint_{A'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s da \right]^2}$$

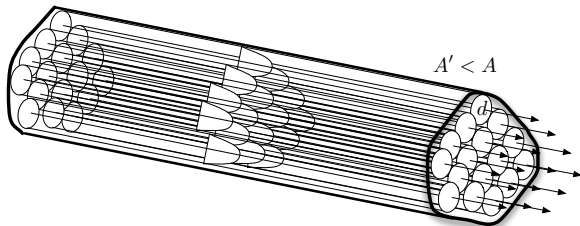
Charge hydraulique H et charge piézométrique h_*

Mouvements lents $\implies H \sim h_* = z + \frac{p}{\rho g}$ avec $h_* = \frac{P_*}{\rho g}$



Fibre d'écoulements de Poiseuille de porosité $m = A'/A$

$$J = \frac{U}{K_p} \quad \text{avec} \quad K_p = m \frac{g d^2}{32 \nu}$$

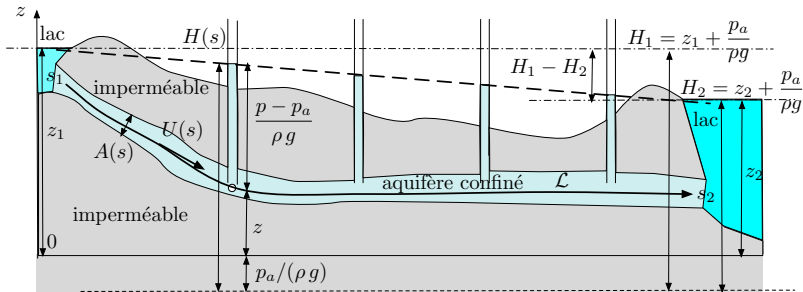


Loi de Darcy unidimensionnelle :

$$J(s) = \frac{U(s)}{K_p(s)} \quad \Rightarrow \quad U(s) = -K_p(s) \frac{dH}{ds}(s)$$

Aquifère confiné de débit $Q = A(s) U(s)$:

$$\frac{d}{ds}(AU) = 0 \quad \text{et} \quad U = -K_p \frac{dH}{ds}$$



Section constante et cond. limites $H(s_1) = H_1$ et $H(s_2) = H_2$:

$$H(s) = H_1 + \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2} (s - s_2) \quad \text{et} \quad U = -K_p \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2}$$

Équations de Navier-Stokes moyennées et potentielles ($\text{rot } \underline{U} = 0$)

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -\underline{J},$$

Loi de Darcy pour les milieux isotropes :

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)} \underline{U}(\underline{x}, t)$$

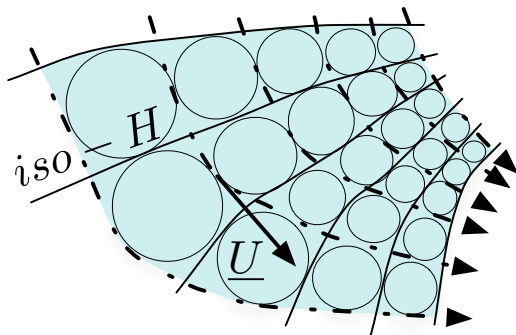
Équations pour les écoulements homogènes et stationnaires :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad \sim \quad h_* = \frac{p}{\rho g} + z$$

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{U} = -K_p \text{grad } H \quad \implies \quad \Delta H = 0$$

Milieu poreux homogènes et isotropes

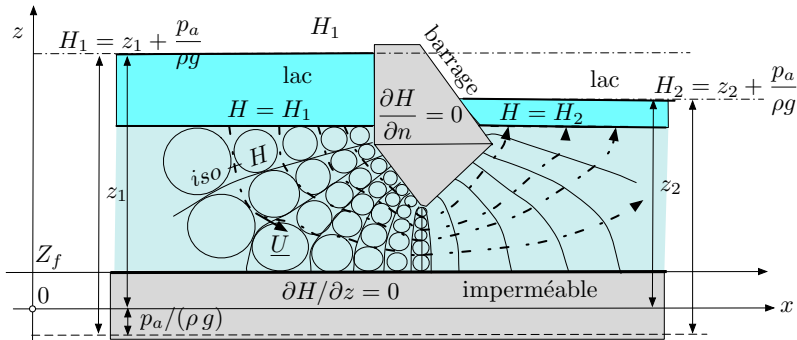
$$\underline{U} = -K_p \text{grad } H \quad \text{et} \quad \Delta H = 0$$



Iso- H et trajectoires sont orthogonales, méthodes des cercles

Conditions aux limites pour $\Delta H = 0$ pour les écoulements confinés :

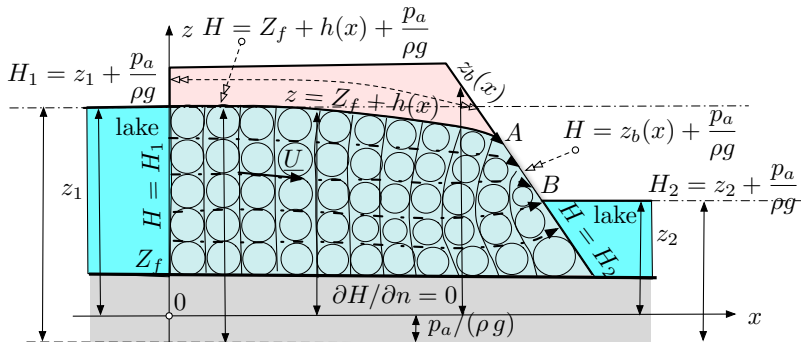
- Frontières imperméables : $\text{grad } H \cdot \underline{n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0$
- Frontières avec des eaux de surface : $H = H_i$



Iso- H et trajectoires sont orthogonales, méthode des cercles

Conditions aux limites pour des écoulements non confinés :

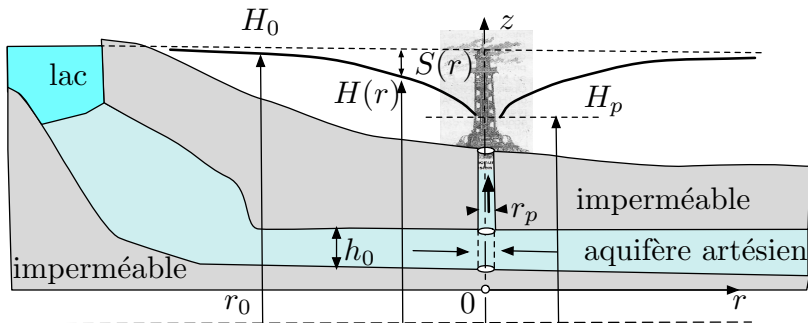
- Surface libre : $H = h + \frac{p_a}{\rho g}$ at $z = h(x, y)$
- Surface de résurgence : $H = z + \frac{p_a}{\rho g}$



Fluide émergent et suintant le long de la surface de résurgence

Aquifère artésien d'épaisseur constante h_0 :

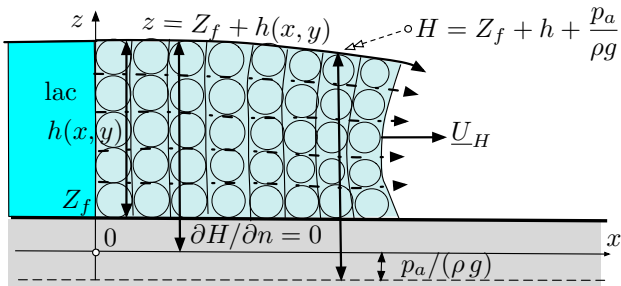
$$\Delta H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad H(r_0) = H_0$$



$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right) \quad \text{avec} \quad T = K_p h_0$$

Approximation de Dupuit quand les iso- H sont presque verticales

$$H(x, y) \sim Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} \quad \text{et on choisit } Z_f = 0 \text{ (fond plat)}$$

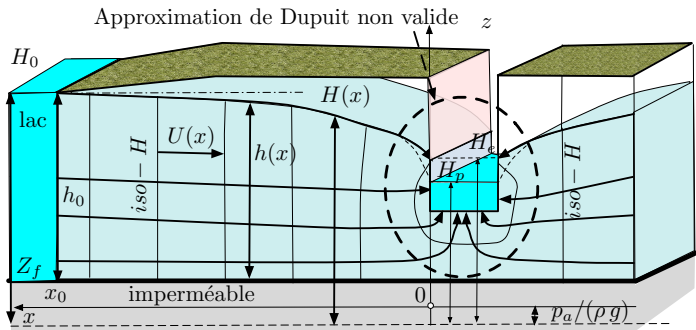


On démontre que $\text{div } \underline{q} = 0$ avec $\underline{q} = h \underline{U}_H = (hU, hV)$ et donc :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial}{\partial y} (h V) = 0, \quad U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y}$$

Fossé prismatique :

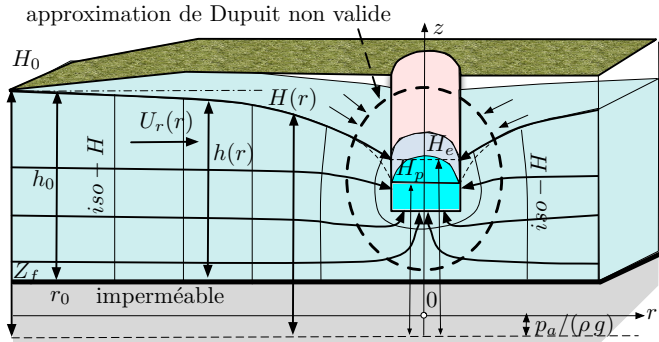
$$\frac{d}{dx} [U(x) h(x)] = 0 \quad \text{et} \quad U(x) = -K_p \frac{dH}{dx}(x) = -K_p \frac{dh}{dx}(x)$$



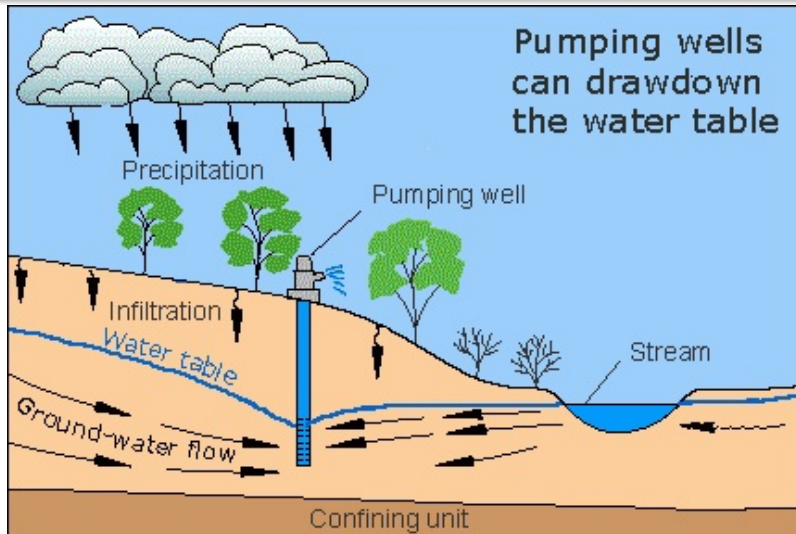
$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p} |x_0 - x|$$

Puits cylindrique vertical :

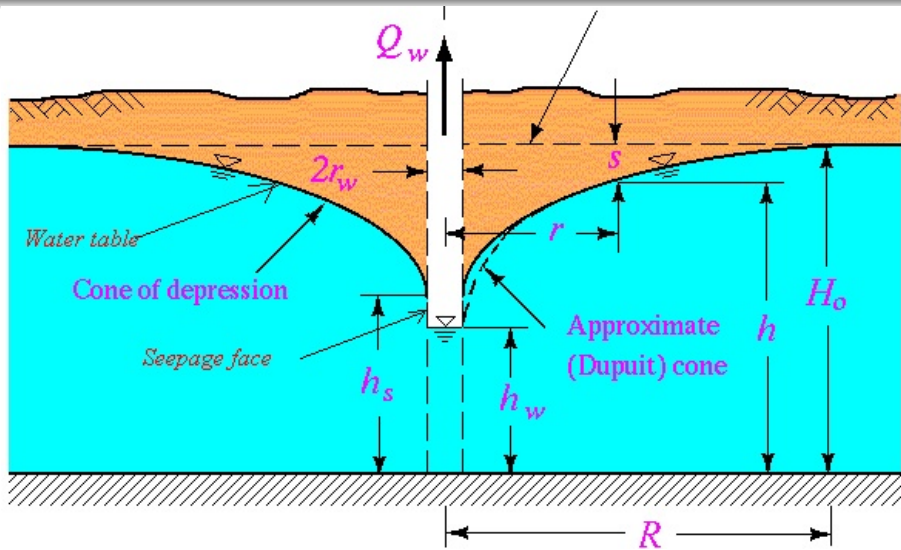
$$\frac{d}{dr} [r U_r(r) h(r)] = 0 \quad \text{et} \quad U_r(r) = -K_p \frac{dH}{dr}(r) = -K_p \frac{dh}{dr}(r)$$



$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \text{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right)$$



<http://ga.water.usgs.gov/edu/>



<http://www.cmdlet.com/demos/agwh-course/>

