PC8 : Réfraction de la houle

Cette PC illustre, à travers plusieurs petits exercices, les notions de réfraction et de shoaling.

PC8.1 Loi de Snel

On considère un milieu 2D inhomogène caractérisé par une relation de dispersion $\omega = \Omega(k_x, k_y, x)$ indépendante de la coordonnée y. On considère un champ d'ondes suffisamment dispersé pour que l'équation de l'Eikonale soit valide et l'on s'intéresse à une région de l'espace où les rayons ne se coupent pas.

1) Écrire le système dynamique régissant le tracé d'un rayon $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ où $\underline{k}(t)$ est le vecteur d'onde du champ d'ondes au point $\underline{x}(t)$.

> Le tracé de rayon est obtenu en résolvant les équations $\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_x}$, $\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_y}$, $\dot{k}_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ et $\dot{k}_y = 0$ où Ω désigne $\Omega\,[k_x(t), k_y(t), x(t)]$.

2) On définit les coordonnées polaires (k, θ) d'un vecteur d'onde $\underline{k}$ par les relations $k_x = k \cos\theta$ et $k_y = k \sin\theta$. On considère deux points A et B de coordonnées $\underline{x}_A$ et $\underline{x}_B$ appartenant à un même rayon. On note $\underline{k}_A$ et $\underline{k}_B$ les vecteurs d'ondes aux points A et B et (k_A, θ_A) et (k_B, θ_B) les coordonnées polaires associées. Démontrer que $k_A \sin\theta_A = k_B \sin\theta_B$.

> Comme $\dot{k}_y = 0$, on a $k_{yA} = k_{yB}$, ce qui s'écrit $k_A \sin\theta_A = k_B \sin\theta_B$.

3) On suppose maintenant que la relation de dispersion s'écrit $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(x)\, k$ où k est le module de $\underline{k}$ et $c(x) > 0$ ne dépend par de y. On appelle "indice de réfraction" le nombre $n(\underline{x}) = c_0/c(x)$ où c_0 est une vitesse de référence constante. Démontrer la loi de Snel $n_A \sin\theta_A = n_B \sin\theta_B$ où n_A et n_B sont les indices de réfraction des points A et B.

> Comme $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$ est constant le long d'un rayon, on a $c_A\, k_A = c_B\, k_B$. On en déduit $\frac{\sin\theta_A}{c_A} = \frac{\sin\theta_B}{c_B}$ ou encore $n_A \sin\theta_A = n_B \sin\theta_B$.

PC8.2 Tsunamis

Un tremblement de terre abaisse la surface de l'océan d'une hauteur $H_0 = 1$ m sur un disque de rayon $r_0 = 100$ km à une distance $d = 1600$ km de la côte où la profondeur de l'océan est $h_0 = 4000$ m. On étudie le tsunami généré par cet effondrement.

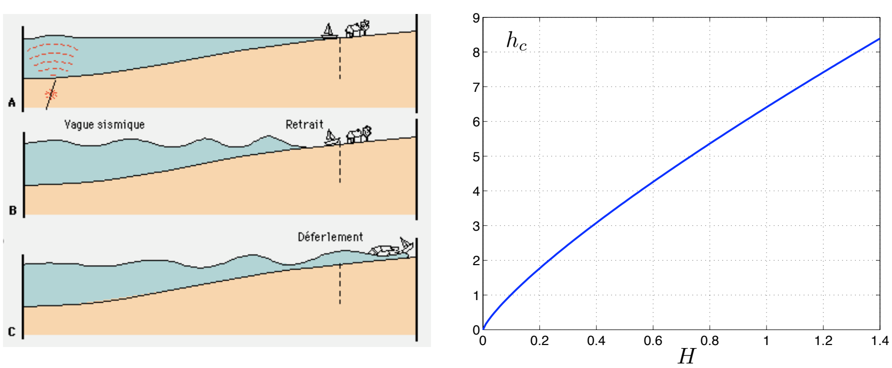

FIG. 1 – a) Schéma d'un tsunami. b) Fonction $h_c(H) = h_0^{1/5} \left(\frac{H}{0.78}\right)^{4/5}$ pour $h_0 = 4$ km.

4) À quelle profondeur h_c le tsunami déferle-t-il et quelle est la surcote H_c qui inonde le rivage ? Que deviennent ces valeurs pour $H_0 = 4$ m ? On pourra utiliser le graphique de la figure 1b.

Comme $r_0/d = 25 \geq 20$, on peut considérer que l'océan est peu profond pour ce tsunami. On a donc $K_r = \sqrt{r_0/d} = 0.25$ au voisinage de la côte et $K_s = (h_0/h_f)^{1/4}$ partout. Le critère de déferlement de Munk $H_c = 0.78\, h_c$ et la relation $H = K_r\, K_s\, H_0$ conduisent à $h_c = h_0^{1/5}\, \left(\frac{H_r}{0.78}\right)^{4/5}$ avec $H_r = K_r\, H_0 = \sqrt{r_0/d}\, H_0 = 25$ cm. On lit $h_c = 2$ m sur la figure 1b et on a $H_c = 0.78\, h_c = 1.6$ m. Pour $H_0 = 4$ m, on a $H_r = 1$ m, $h_c = 6.5$ m et $H_c = 5$ m.

PC8.3 Déferlement de la houle sur une plage

On considère une houle monochromatique de période $T = 10$ s dont les rayons sont perpendiculaires aux isobathes $h_f(x) = \beta\, x$ avec $\beta = 0.1$.

5) Quelle est la longueur d'onde L_0 au large ? Montrer que $c_{g0} = \frac{g}{2\omega}$ au large. À quelles profondeurs déferlent les houles de hauteurs respectives au large $H_0 = 1$ m et $H_0 = 4$ m ? On pourra utiliser le tracé graphique des fonctions de la figure 2.

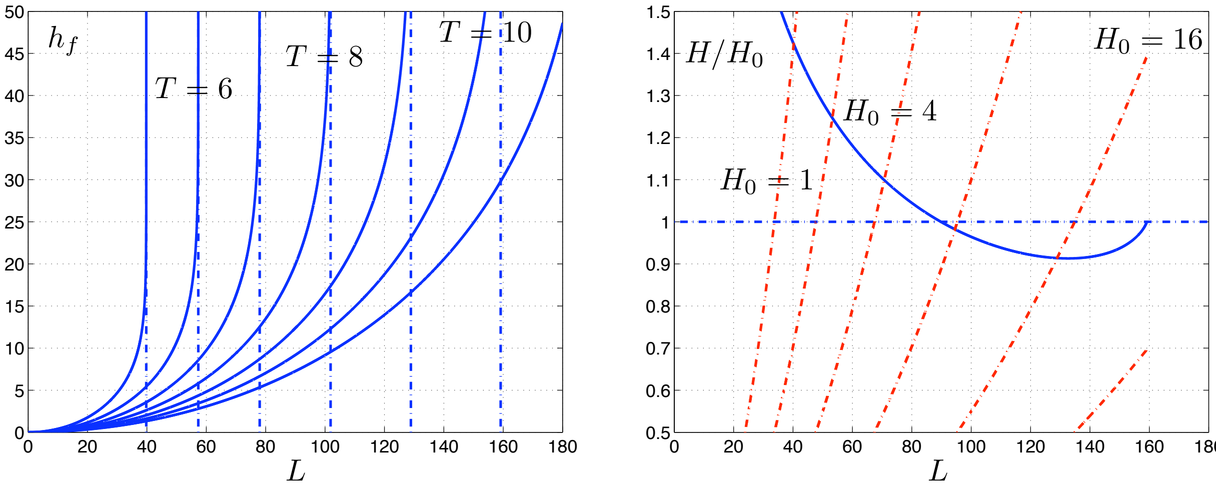

FIG. 2 – a) Fonction $h_f(T,L) = \frac{L}{2\pi}\,\text{argth}\left(\frac{2\,\pi\,L}{g\,T^2}\right)$ pour les périodes $T = 5, 6, ..., 11$ s. b) Fonction $K_s(T,L) = H(T,L)/H_0 = \sqrt{\frac{g\,T^2}{4\,\pi\,L}}\,\left\{\frac{1}{2} + \frac{2\,\pi\,h_f(T,L)/L}{\sinh[4\,\pi\,h_f(T,L)/L]}\right\}^{-1/2}$ pour la période $T = 10$ s et critère de Miche $H_c(T,L)/H_0 = 0.14\,L\,\tanh\left[2\,\pi\,h_f(T,L)/L\right]/H_0$ pour les hauteurs au large $H_0 = 1, 2, 4, ..., 32$ m.

Au large, le milieu est profond et on a $\omega = \sqrt{g\,k_0}$ ce qui entraîne $k_0 = \omega^2/g$ et donc $L_0 = \frac{g\,T^2}{2\,\pi} = 160$ m. La vitesse de groupe est $c_{g0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0}} = \frac{g}{2\,\omega}$. Comme $\omega = 2\pi/T$ est constant le long des rayons, la longueur d'onde $L = 2\pi/k$ dépend de la profondeur h_f à travers l'équation $\omega^2 = g\,k\,\tanh(k\,h_f)$ dont on déduit la fonction $h_f(T,L) = \frac{1}{k}\text{argth}\left(\frac{\omega^2}{g\,k}\right) = \frac{1}{2\,\pi/L}\text{argth}\left(\frac{4\,\pi^2/T^2}{2\,\pi\,g/L}\right)$. Le coefficient de shoaling est $K_s(T,L) = \sqrt{c_{g0}/c_g}$ avec $c_{g0}(T) = \frac{g}{4\,\pi/T}$ et $c_g(T,L) = \frac{2\,\pi/T}{2\,\pi/L}\left\{\frac{1}{2} + \frac{2\,\pi\,h_f(T,L)/L}{\sinh[4\,\pi\,h_f(T,L)/L]}\right\}^{-1/2}$. On a donc $H = K_r\,K_s\,H_0$ avec $K_r = 1$ et $K_s(T,L) = \sqrt{\frac{2\,\pi\,g/L}{8\,\pi^2/T^2}}\left\{\frac{1}{2} + \frac{2\,\pi\,h_f(T,L)/L}{\sinh[4\,\pi\,h_f(T,L)/L]}\right\}^{-1/2}$. Le critère de Miche prévoit le déferlement pour la longueur d'onde L_c solution de l'équation implicite $H_c(T,L) = 0.14\,L\,\tanh\left[2\,\pi\,h_f(T,L)/L\right]$. Pour $H_0 = 1$ m, on lit $K_s = 1.4$ et $L_c = 40$ m sur la figure 2b puis $h_c = 3$ m sur la figure 2a. Comme la cambrure est $H_c/L_c = K_s\,H_0/L_c = 3.5$ % et que la pente du fond est de 10 %, le déferlement est plongeant. On lit de même $L_c = 65$ m, $h_c = 4$ m et $K_s = 1.1$ pour $H_0 = 4$ m. La cambrure est $H_c/L_c = K_s\,H_0/L_c = 7$ % et le déferlement est plutôt glissant que plongeant.

6) Quelle est l'ordre de grandeur de la puissance disponible dans un houle arrivant sur une côte de longueur

$d = 100$ km avec $T = 10$ s et $H_0 = 1$ m.

La puissance est $P = c_{g0}\, W\, d = \left(\frac{g\,T}{4\,\pi}\right)\, \left(\frac{1}{8}\,\rho\, g\, H^2\right)\, d \sim 10^9$ W, soit 1 000 MW.

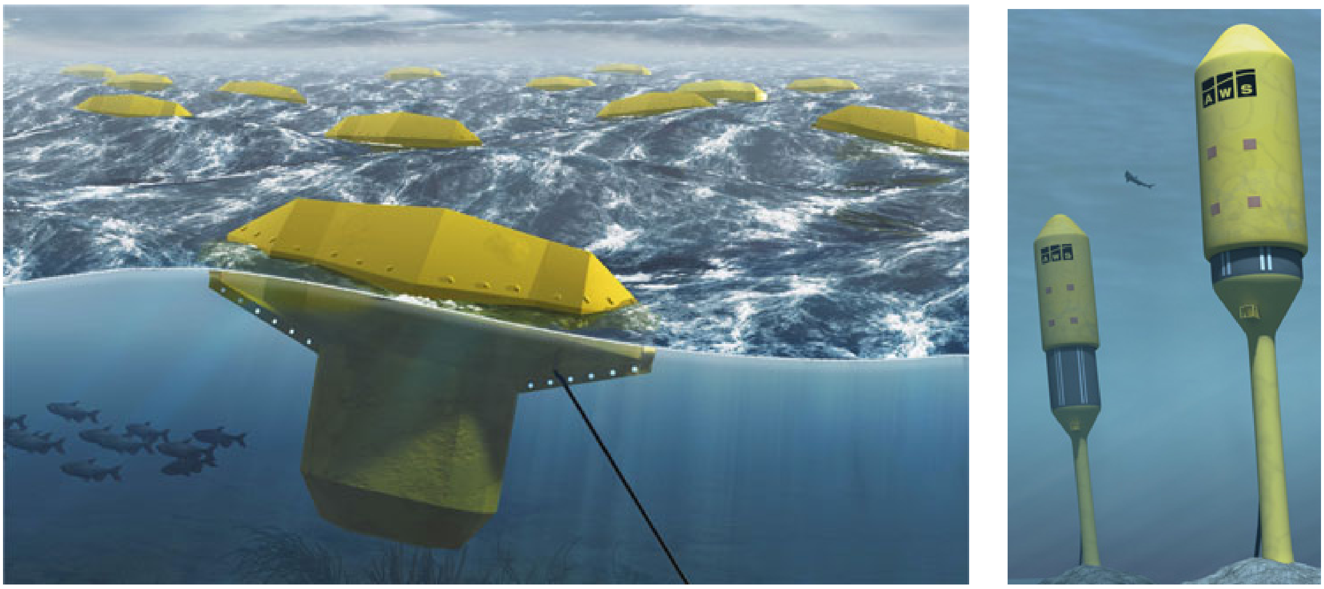

Fig. 3 – Récupération de l'énergie de la houle. a) Project SEAREV, École Centrale de Nantes. b) Bouées AWS.