

PC6 : Canal à choc

Cette PC illustre les notions d'ondes de détente ou de compression sur le cas concret du phénomène de mascaret et de la rupture d'un barrage.

PC6.1 Onde de détente

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \leq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$). On suppose que l'on peut contrôler la vitesse $U(0, t) = U_e(t) \geq 0$ en $x = 0$ au moyen d'une grille qui limite le débit. On suppose que le contrôle de la vitesse permet d'imposer $U_e(t) = \beta t$ sur l'intervalle $t \in [0, t_1]$ et $U_e(t) = U_1$ pour $t \geq t_1$ avec $U_1 = \beta t_1$. On suppose que $U_1 < 2c_0/3$ avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

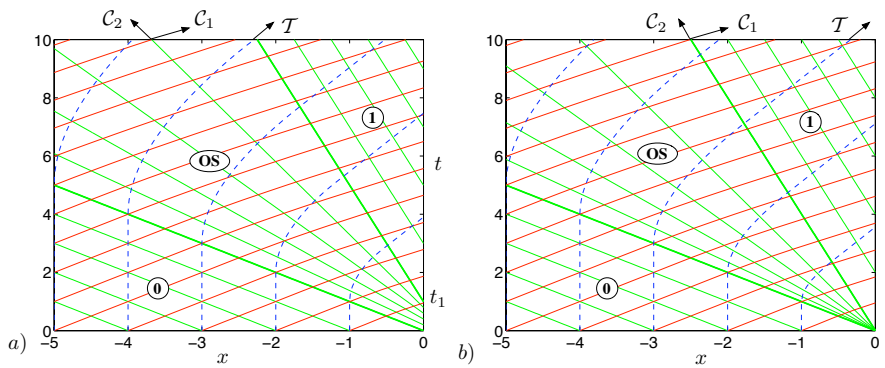


FIG. 1 – Caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires T (bleu tireté) et régions (0), (OS) et (1). a) Onde de détente issue de $t \in [0, t_1]$. b) Onde de détente centrée.

- 1) On suppose que toutes les courbes caractéristiques C_1 issues de l'axe Ox coupent l'axe Ot (hypothèse à valider a posteriori). En déduire que J_1 est constant dans tout le quart de plan et donner sa valeur. En déduire c_1 dans la région uniforme (1) et $c_e(t)$ pour $t \in [0, t_1]$. Décrire les caractéristiques C_2 dans les régions uniformes (0) et (1). Montrer que les courbes caractéristiques C_2 sont des droites dans la région de l'onde simple (OS). On note $[0, \tau(x, t)]$ le point du plan à l'intersection de l'axe Ot et de la droite C_2 qui passe par le point (x, t) de la région (OS) avec $x \leq 0$ et $t \geq 0$. Montrer que $\tau(x, t)$ est solution d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent de x et de t . Exprimer $\tau(x, t)$ en choisissant la racine pertinente pour le problème d'intersection de droites. En déduire $U(x, t)$ et $h(x, t)$. Écrire l'équation différentielle permettant de définir, respectivement, les courbes C_1 et les trajectoires T .

En connectant les régions (0) et (1) par une C_1 , l'existence de l'invariant de Riemann $J_1 = 2c_0 = U_1 + 2c_1$ entraîne que $c_1 = c_0 - U_1/2$. Les droites $x = -c_0 t$ et $x = (U_1 - c_1)t = (3U_1/2 - c_0)t$ délimitent les régions (0), (OS) et (1). Comme $U_1 < 2c_0/3$, la deuxième droite est bien dans le demi-plan ($x \leq 0, t \geq 0$). Pour $t \in [0, t_1]$, l'invariance des $J_1 = 2c_0 = U_e(t) + 2c_e(t)$ entraîne $c_e(t) = c_0 - U_e(t)/2 = c_0 - \beta t/2$. Les C_2 sont les droites $x = a - c_0 t$ dans la région (0), les droites $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (OS) et $x = (U_1 - c_1)(t - \tau) = (3\beta t_1/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (1). On a $(U, c) = (0, c_0)$ dans la région (0) et $(U, c) = (U_1, c_1) = (U_1, c_0 - U_1/2)$ dans la région (1). Dans la région (OS), on a $U(x, t) = U_e[\tau(x, t)] = \beta\tau(x, t)$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] = c_0 - \frac{1}{2}\beta\tau(x, t)$ où $\tau(x, t)$ est solution de l'équation implicite $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ ce qui s'écrit aussi $\frac{3\beta}{2}\tau^2 - (c_0 + \frac{3\beta}{2}t)\tau + (x + c_0 t) = 0$. On en déduit $\tau(x, t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{c_0}{3\beta}\right) - \sqrt{\left(\frac{t}{2} - \frac{c_0}{3\beta}\right)^2 - \frac{2x}{3\beta}}$, le choix de cette racine étant motivé par le fait que $\tau(0, 0) = 0$. Dans la région (OS), les courbes C_1 sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = [U(x, t) + c(x, t)] = [c_0 + \beta\tau(x, t)/2]$ tandis que les trajectoires T sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = U(x, t) = \beta\tau(x, t)$.

- 2) Décrire l'écoulement de manière aussi détaillée dans le cas de l'onde de détente centrée obtenue dans la limite où t_1 est très petit. Calculer l'expression de $U(x, t)$ et $h(x, t)$ dans l'onde simple.

Pour (x, t) donné, $U(x, t)$ et $c(x, t)$ sont solutions du système formé par les deux équations $x/t = (U - c)$ et $2c_0 = U + 2c$. On en déduit $U(x, t) = \frac{2}{3}c_0 + \frac{2}{3}x/t$ et $c(x, t) = \frac{2}{3}c_0 - \frac{1}{3}x/t$.

- 3) Que se passe-t-il si $U_1 = 2c_0/3$? Calculer le nombre de Froude en $x = 0$. Comment varie le nombre de Froude $Fr(x, t)$ en un point $x \leq 0$ donné? Peut-on imposer une vitesse supérieure à cette valeur en $x = 0$?

Si $U_1 = 2c_0/3$, la caractéristique C_2 issue de $(0, t_1)$ est verticale car on a $U_1 = c_1$. La condition aux limites en $x = 0$ est alors "bloquée" à cette valeur. Le nombre de Froude $Fr = U_1/c_1$ vaut 1. En tout point x , le nombre de Froude $Fr(x, t) = U/c = \frac{2c_0 t + 2x}{2c_0 t - x}$ tend vers 1. L'écoulement devient "critique" ($Fr = 1$) en tout point. Il est impossible de le contrôler par une condition aux limites aval.

PC6.2 Choc centré

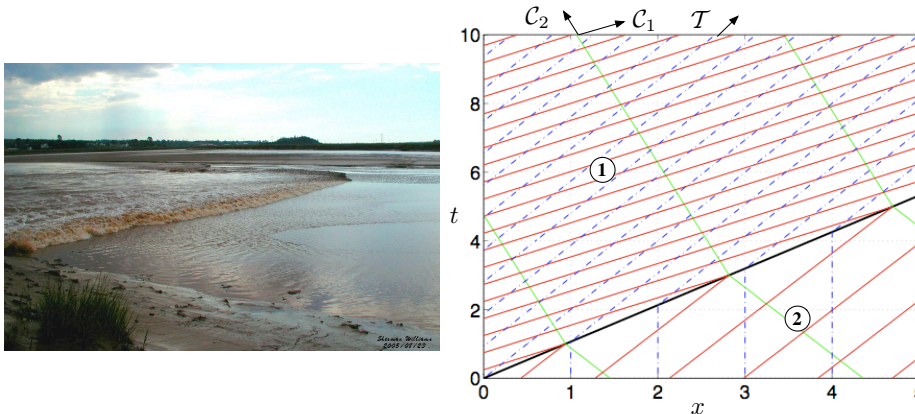


FIG. 2 – Choc centré (noir), caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté) et régions (1) et (2).

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \geq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). On suppose que la hauteur en $x = 0$ passe brusquement de la valeur $h(0, 0) = h_2$ à la valeur $h(0, t) = h_1$ pour tout $t \geq 0$, et que $h_1 > h_2$.

- 4) Calculer la vitesse W du choc. Décrire les C_1 et les C_2 dans les régions uniformes (1) et (2). Décrire les trajectoires \mathcal{T} des particules fluides.

Les relations de saut s'écrivent ici $h_1(U_1 - W) = h_2(-W)$ et $h_1 U_1(U_1 - W) + \frac{1}{2}g h_1^2 = \frac{1}{2}g h_2^2$. On en déduit $W = U_1 h_1/(h_1 - h_2)$ et $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. La vitesse du choc est alors $W = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. Les trajectoires \mathcal{T} sont des droites de vitesses respectives U_1 et U_2 .

PC6.3 Rupture de barrage

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit tout le canal en séparant la portion $x \leq 0$, de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$) de la portion $x \geq 0$, de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). À l'instant $t = 0$, on enlève brusquement la séparation entre les deux portions. On suppose que cette mise en contact génère une onde de détente centrée à gauche et un choc centré à droite.

- 5) En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, montrer que $Y = F(X)$ avec $F(X) = X + \frac{X^2 - 1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}$. En supposant possible l'inversion graphique de cette fonction, montrer que l'on peut décrire tout l'écoulement.

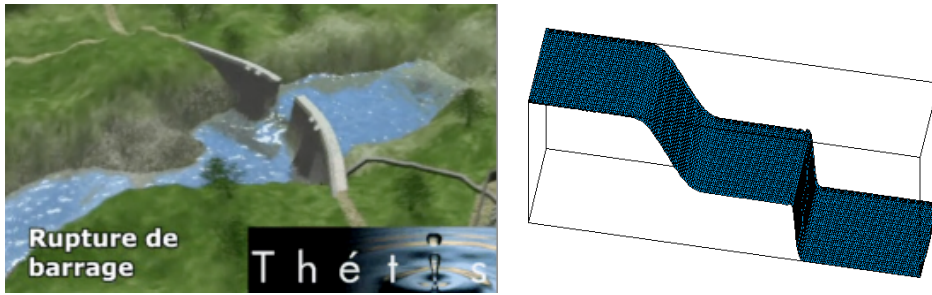


FIG. 3 – Rupture de barrage. a) Simulation avec le code Thétis. b) solution analytique.

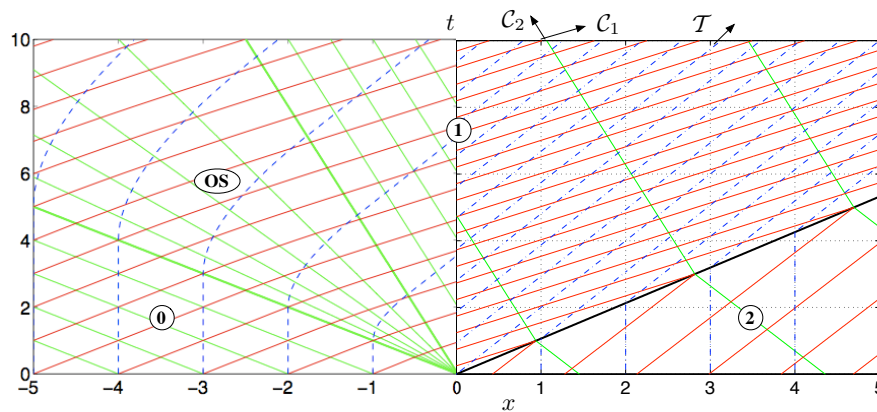


FIG. 4 – Rupture de barrage. Caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté), choc centré (noir) et régions (0), (OS), (1) et (2)

La relation de l'onde de détente impose $2c_0 = 2c_1 + U_1$ tandis que la relation du choc centré impose $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. On en déduit la relation $2\sqrt{g h_0} - 2\sqrt{g h_1} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, on obtient l'équation implicite $Y = F(X)$ qui permet d'exprimer l'inconnue c_1 en fonction des données c_0 et c_2 .

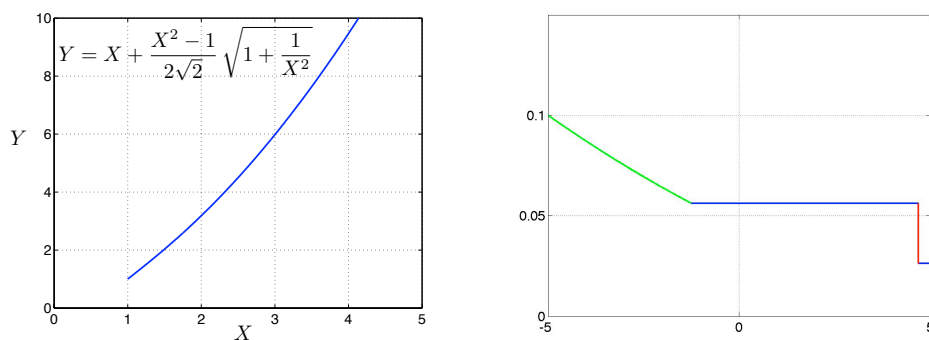


FIG. 5 – a) Graphe $Y = F(X)$. b) Profil $h(x, t)$ à t donné.

6) Calculer la vitesse du ressaut pour $h_0 = 10\text{m}$ et $h_2 = 40\text{ cm}$.

On a $c_0 = \sqrt{g h_1} = 10\text{ m/s}$ et $c_2 = \sqrt{g h_2} = 2\text{ m/s}$. On en déduit $Y = c_0/c_2 = 5$ et on lit $X = 2.7$. Comme $X = c_1/c_2$, on a $c_1 = 5.4\text{ m/s}$. On en déduit $U_1 = 2(c_0 - c_1) = 9.3\text{ m/s}$ et $W = U_1 / (1 - h_2/h_1) = U_1 / (1 - c_2^2/c_1^2) = 10.8\text{ m/s}$, soit environ 40 km/h .

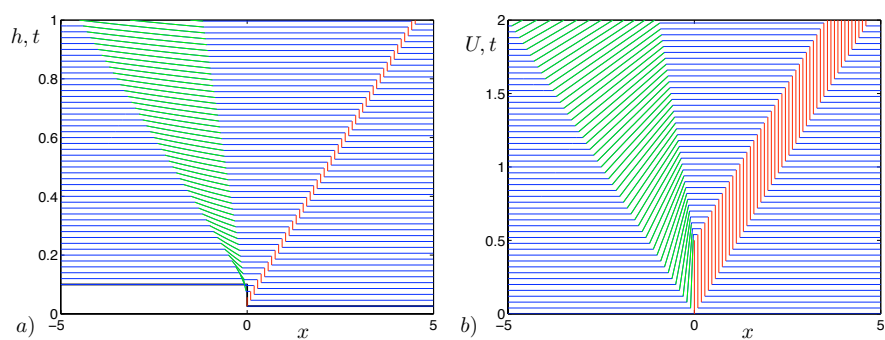


FIG. 6 – Évolution temporelle des profils. a) $h(x, t)$. b) $U(x, t)$.