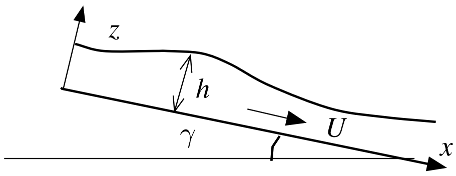
PC5 : <u>Modélisation des ondes crues</u>

Cette PC utilise les modèles de l'approximation des ondes de crues pour la prévision des hydrogrammes de crues à l'exutoire d'un bassin versant.

PC5.1 Approximation des ondes de crues

On considère une rivière de pente $I = \sin\gamma$ et de largeur L constantes qui se laisse modéliser par les équations de Saint-Venant $\frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} = -h\,\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h}$ avec $C_f = \frac{2\,g}{K_s^2\,h^{1/3}}$.



1) Lorsque la pente I n'est pas trop petite, on suppose que l'on peut négliger l'accélération et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement. En déduire, en supposant $U \geq 0$, que h obéit à l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ où $\lambda(h)$ est une fonction que l'on explicitera. Comment se nomme l'approximation ainsi obtenue ?

> L'équilibre $g\ I = \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h} = \frac{2\,g\,U^2}{K_s^2\,h^{4/3}}$ entre la force de gravité et le frottement entraine que $U = K_s\,I^{1/2}\,h^{2/3}$. En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\,h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}\,K_s\,I^{1/2}\,h^{2/3} = \frac{5}{3}U$. On est dans le cadre de l'approximation des ondes de crues.

2) Déterminer la hauteur h_n de la solution stationnaire en supposant connu le débit linéique $q = Q/L$. Montrer que l'équation d'évolution des petites perturbations $\widetilde{h}$ se ramène à l'équation $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$ où λ_n est une constante que l'on explicitera.

> Les équations $U_n = K_s\,I^{1/2}\,h_n^{2/3}$ et $U_n\,h_n = q$ entrainent $K_s\,I^{1/2}\,h_n^{5/3} = q$ et donc $h_n = \left(\frac{q^2}{I\,K_s^2}\right)^{3/10}$. On en déduit $U_n = q/h_n$. La linéarisation de l'équation d'évolution de h conduit à $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3}U_n$.

PC5.2 Décrue et crue linéaires

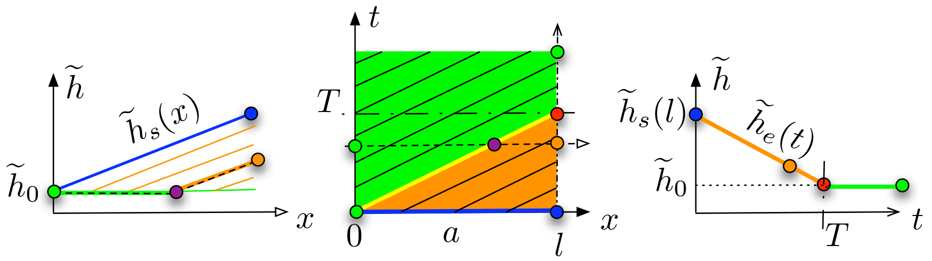
On considère une portion de rivière de longueur l qui draine un bassin versant soumis à une pluie homogène et stationnaire. On modélise cette pluie par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_n\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = P$ de la perturbation de hauteur $\widetilde{h}(x,t)$ autour du régime normal $h = h_n$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3}U_n$ et $U_n = K_s\,I^{1/2}\,h_n^{2/3}$. On suppose que la perturbation de hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(l,t)$ à l'exutoire de la portion de rivière lorsque la pluie s'arrête.

3) Calculer et tracer la solution stationnaire $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_s(x)$ obtenue pour une pluie constante P. On pourra noter $\chi = P/\lambda_n$.

> La solution de l'équation $\lambda_n\,\widetilde{h}_s'(x) = P$ avec la condition $\widetilde{h}_s(0) = \widetilde{h}_0$ est $\widetilde{h}_s(x) = \widetilde{h}_0 + \chi\,x$ avec $\chi = P/\lambda_n$.
> Le profil $\widetilde{h}_s(x)$ est linéaire.

4) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $\widetilde{h}(x,0) = \widetilde{h}_s(x)$ pour $x \in [0,L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Montrer que $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq T$ avec $T = l/\lambda_n$. Tracer dans le plan (x,t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\widetilde{h}(x,t)$.

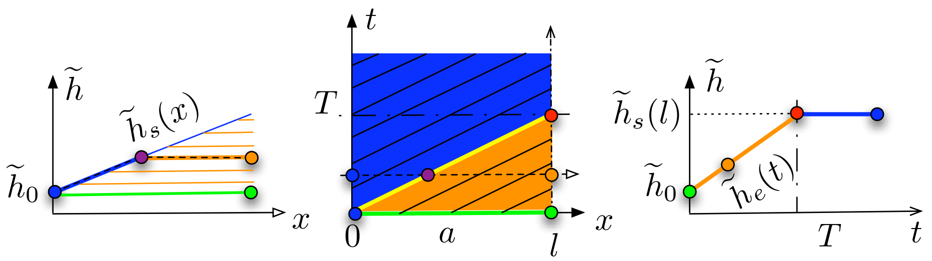
Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + \lambda_n\, t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0,l]$ de l'axe des x ou $x = \lambda_n\,(t-\tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t. Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = l$ à partir du temps $T = l/\lambda_n$. Comme $\widetilde{h}$ est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq 0$ on a $\widetilde{h}(l,t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq T$. La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = \lambda_n\, t$ est uniforme avec $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$.



Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (l,t) du plan (x,t) coupe l'axe des x en $a = l - \lambda_n\, t$. La condition initiale est égale à $\widetilde{h}_s(a) = \widetilde{h}_0 + \chi\, a$ en ce point. On a donc $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + \chi\, l - \chi\, \lambda_n\, t = \widetilde{h}_0 + \chi\, l - P t$ pour $t \in [0,T]$. La hauteur $\widetilde{h}_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $\widetilde{h}_s(l)$ pour stagner à la valeur $\widetilde{h}_0$ au-delà de $t = T$. Pour $x \leq \lambda_n\, t$, on a vu que $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$. Pour $x \geq \lambda_n\, t$, la droite caractéristique passant par (x,t) coupe l'axe des x en $a = x - \lambda_n\, t$, ce qui entraîne $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + \chi\, x - P t$. La solution $\widetilde{h}(x,t)$ est égale à $\widetilde{h}_s(x - \lambda_n\, t)$ pour $x \geq \lambda_n\, t$ et égale à $\widetilde{h}_0$ sinon.

5) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$ pour $x \in [0,l]$. On suppose l'existence d'une pluie constante P pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\widetilde{h}(x,t)$.

Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais $\widetilde{h}$ n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{d\widetilde{h}}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = P$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (l,t) conduit à $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(l,t) = \widetilde{h}_0 + P t$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - l/\lambda_n)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(l,t) = \widetilde{h}_0 + P l/\lambda_n = \widetilde{h}_0 + \chi\, l$.



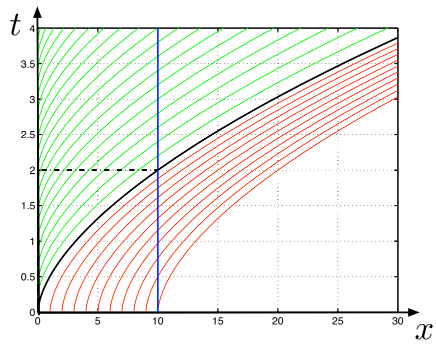
Le profil $\widetilde{h}_e(t)$ croît linéairement de $\widetilde{h}_0$ à $\widetilde{h}_0 + \chi\, l = \widetilde{h}_0 + P T$ sur l'intervalle $[0,T]$ puis reste constant. Pour $x \geq \lambda_n\, t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + P t$. Pour $x \leq \lambda_n\, t$, la droite caractéristique passant par (x,t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/\lambda_n)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + P x/\lambda_n = \widetilde{h}_0 + \chi\, x$. La solution $\widetilde{h}(x,t)$ part de $\widetilde{h}_0$, croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $\widetilde{h}_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse λ_n.

PC5.3 Crue non linéaire

On considère une portion de rivière de longueur l drainant un bassin soumis à une pluie homogène et stationnaire que l'on modélise par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = P$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}\,\beta\,h^{2/3}$ et $\beta = K_s\,I^{1/2}$. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x,0) = 0$. On suppose que la condition aux limites à l'amont est $h(0,t) = 0$ pour tout temps.

6) Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x,t) = (a,0)$ pour $a \in [0,l]$. Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x,t) = (0,\tau)$ pour $\tau \geq 0$. Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x,t) \in [0,l] \times I\!R_+$. Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x,t) = (0,0)$ avec la droite d'équation $x = l$. En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(l,t)$ devient constant. Donner l'expression de cette valeur constante h_*. Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(l,t)$ au bas de la pente.

> Les caractérsitiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta\,h^{2/3}$ et $\dot{h} = P$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = P\,t$ et $\dot{x} = \frac{5}{3}\,\beta\,P^{2/3}\,t^{2/3}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta\,P^{2/3}\,t^{5/3}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a,0)$. Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en déduit que $h(t) = P(t-\tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0,\tau)$ s'écrit $x(t) = \beta\,P^{2/3}\,(t-\tau)^{5/3}$. Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x,t). Elles ne se coupent donc pas. L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x,t) = (0,0)$ est $x = \beta\,P^{5/3}\,t^{5/3}$. Elle coupe la droite $x = l$ en (l, t_*) avec $t_* = (l/\beta)^{3/5}/P^{2/5}$. La valeur de $h(l,t)$ à l'équilibre est $h_* = P\,t_* = (l\,P/\beta)^{3/5}$. Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x,t) = (l,t)$ avec $t \in [0,t_*]$, sont toutes issues du segment de droite $(x,t) = (a,t)$ avec $a \in [0,l]$. La valeur de $h(l,t)$ est donc égale à $h(l,t) = P\,t$ pour $t \in [0,t_*]$ et à $h(l,t) = h_*$ pour $t \geq t_*$.



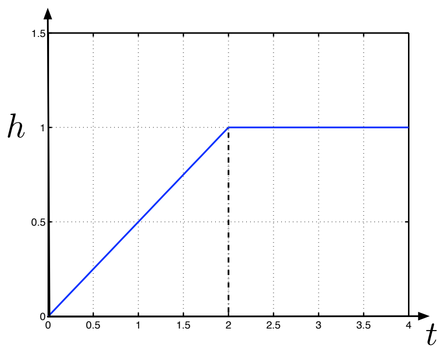


FIG. 1 – a) *Courbes caractéristiques.* b) *Courbe $h(l,t)$ en fonction du temps.*

7) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_*, en heures, et de h_*, en m, pour une longueur $l = 10$ km, une largeur $L = 1$ m, une pente $I = 0.1$, un nombre de Strickler de $K_s = 10$ m$^{1/3}$ s^{-1} et une pluie $p = 1$ mm/jour sur un bassin versant d'aire $A = 10$ km^2 en supposant que toute l'eau des précipitations est drainée par la rivière.

> On a $P = p\;A/(l\;L)$. L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 3 heures et une hauteur h_* de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 14 cm.