PC4 : Écoulement sur un obstacle

Cette PC illustre les notions de base de l'hydraulique à surface libre graduellement variée.

PC4.1 Écoulement sur un obstacle

On dispose d'un canal de largeur L et de débit constant Q. On note $q = Q/L$ le débit linéique, h la hauteur de la couche d'eau et U sa vitesse. Les abaques de la figure 1 permettent d'estimer graphiquement la charge spécifique $\mathcal{E}(q,h) = h + \frac{1}{2}\frac{q^2}{g\,h^2}$ et l'impulsion $\mathcal{I}(q,h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g\,h^2$ en fonction de q et h.

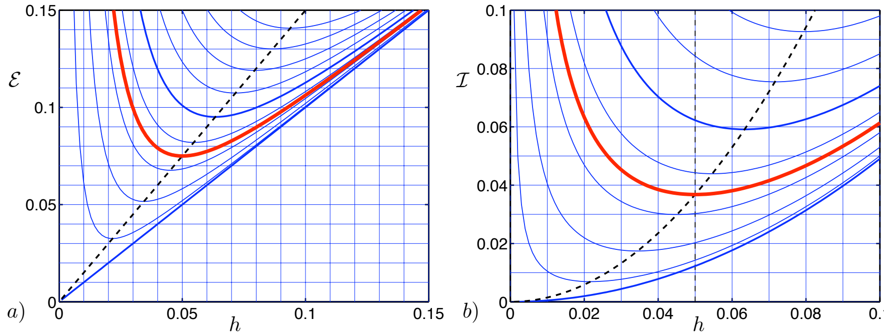


FIG. 1 – a) Énergie spécifique $\mathcal{E}(q,h) = h + \frac{1}{2}\frac{q^2}{g\,h^2} = \frac{1}{2\,h^2}\left(2\,h^3 + h_c^3\right)$ et b) Impulsion $\mathcal{I}(q,h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g\,h^2 = \frac{g}{h}\left(h_c^3 + \frac{1}{2}\,h^3\right)$. Intervalle entre les iso-q : 0.01 m^2/s. En rouge : cas $h_c = 5$ cm.

1) Montrer que $\mathcal{E}(q,h)$ et $\mathcal{I}(q,h)$ ont le même minimum h_c, appelé "hauteur critique", pour un débit donné. On suppose que $h_c = 5$ cm. Déterminer le débit linéique q correspondant à partir des abaques. Exprimer le nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{g\,h}$ en fonction de h_c/h. Identifier les régimes sous-critiques et supercritiques.

> Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 1 - \frac{q}{g\,h^3}$ et $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial h} = -\frac{q^2}{h^2} + g\,h$ s'annulent pour $h_c = \left(q^2/g\right)^{1/3}$. Si $h_c = 5$ cm, on a donc $q = \sqrt{g\,h_c^3} = 3.5\ 10^{-2}$ m^2/s. Comme $q = Uh$, on a $Fr = U/\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{q^2}{g\,h^3}} = (h_c/h)^{3/2}$. Le régime est supercritique ($Fr > 1$) pour $h < h_c$ et sous-critique ($Fr < 1$) pour $h > h_c$.

On considère un obstacle de forme gaussienne dont la hauteur est donnée par $Z_f(x) = a\ e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}$ avec $a = 3$ cm et $\sigma = 20$ cm. On dispose, "loin" en amont de l'obstacle (par exemple à 1 m), une vanne de fond dont l'ouverture, réglable, est notée e (voir figure 2). Pour un débit donné ($h_c = 5$ cm) on cherche à décrire les régimes d'écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de e en négligeant toutes les pertes de charges.

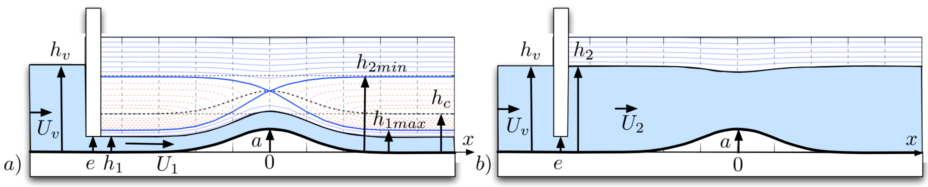


FIG. 2 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture e de vanne.

2) Pour $e = 2.5$ cm, on observe deux régimes tels que la hauteur h_v de la couche d'eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 2). À l'aval de cette vanne, cette hauteur est $h_1 = e$ pour le premier régime et h_2 pour le second. Déterminer, à l'aide des abaques, la charge spécifique commune aux deux

régimes ainsi que h_v et h_2. En déduire U_1 et U_2. Pour chacun des régimes, tracer, sur la figure 1a, des segments verticaux indiquant la valeur de l'énergie potentielle h et de l'énergie cinétique $U^2/(2\,g)$ dont la somme est la charge spécifique $\mathcal{E}$. Déterminer graphiquement ces valeurs.

La conservation de la charge entraine que $H = \frac{p_a}{\rho\,g} + h_v + \frac{U_v^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho\,g} + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho\,g} + h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$ et donc $\mathcal{E}(q, h_v) = \mathcal{E}(q, h_1) = \mathcal{E}(q, h_2) = 12.5$ cm en utilisant $q = h\,U$. Les hauteurs $h_1 = e = 2.5$ cm et $h_2 = h_v = 12$ cm sont donc conjugées pour la charge spécifique. On en déduit $U_1 = q/h_1 = 1.4$ m/s et $U_2 = 30$ cm/s. En traçant sur le graphe la droite $\mathcal{E} = h$ (qui est aussi l'asymptote des courbes iso-q), on peut reporter un segment de longueur $h_1 = 2.5$ cm pour le régime a) et $h_2 = 12$ cm pour le régime b), surmonté, respectivement, d'un segment de longueur $U_1^2/(2\,g) = 10$ cm ou $U_2^2/(2\,g) = 0.5$ cm.

3) Montrer que la coexistence de deux tels régimes n'est possible que pour $e < h_{1max}$ et, en conséquence, $h_v > h_{2min}$ où h_{1max} et h_{2min} sont des valeurs que l'on précisera. Tracer les profils de la surface libre pour tous ces régimes. Que se passe-t-il si $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement.

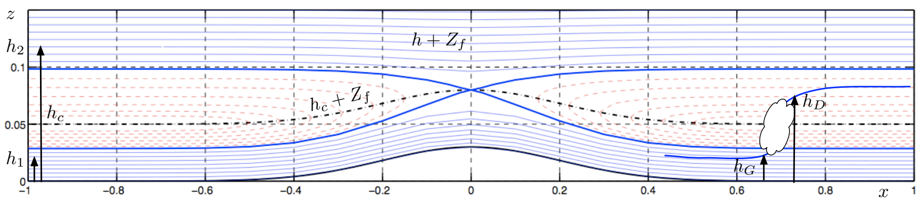


FIG. 3 – Trajectoires possibles pour un débit donné.

On a $\mathcal{E}(q, h_{1max}) = \mathcal{E}(q, h_{2min}) = \mathcal{E}(q, h_c) + a$. On en déduit, à partir de l'abaque, que $h_{1max} = 2.8$ cm et $h_{2min} = 9.8$ cm. En utilisant l'abaque de la charge spécifique, on peut tracer les courbes de remous que l'on peut comparer à la solution numérique de la figure 3. Pour $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$, le régime est bloqué sur la courbe qui part de $h = h_{2min} = 9.8$ cm au voisinage de la vanne, dont le régime est sous-critique $(Fr < 1)$ pour $x < 0$ et supercritique $(Fr > 1)$ pour $x > 0$ (voir figure 4).

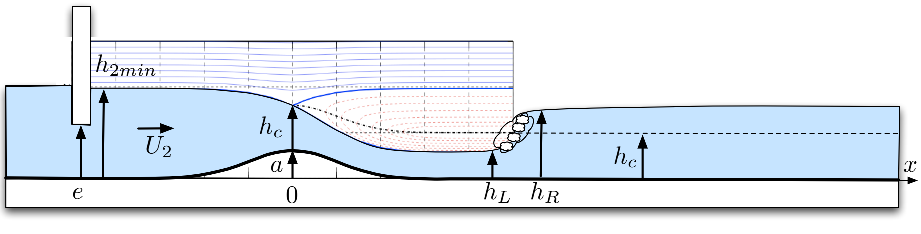


FIG. 4 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique

4) On suppose que $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$ et que l'écoulement est donc critique en $x = 0$. Que vaut h en $x = 0$? On observe un ressaut hydraulique "loin" (par exemple à 1 m) en aval de l'obstacle. Déterminer, à l'aide des abaques, les hauteurs h_L et h_R de part et d'autre du ressaut. Déterminer graphiquement la perte de charge à travers le ressaut. Commenter.

On $h = h_c$ en $x = 0$. "Loin" en aval de l'obstacle, on a $h_L = h_{1max} = 2.8$ cm. Comme l'impulsion est conservée à travers le ressaut, on lit sur l'abaque 1b que $\mathcal{I} = 0.047$ m^{-1} s^{-2} et $h_R = 8$ cm. Sur l'abaque 1a, on lit $\mathcal{E}(q, h_L) = 10.5$ cm et $\mathcal{E}(q, h_R) = 9$ cm. Il y a donc une perte de charge $\Delta H = \mathcal{E}(q, h_L) - \mathcal{E}(q, h_R) = 1.5$ cm due à la turbulence intense du ressaut.

On suppose que l'effet des parois peut être modélisé par une formule de Manning-Srickler $J = U^2\,K_s^{-2}\,h^{-4/3}$ où le nombre de Strickler "équivalent" est $K_s = 100$ m$^{1/3}$ s^{-1} (le vrai Strickler ferait intervenir le rayon hydraulique R_H qui est différent de h lorsque le canal est étroit).

5) On suppose que l'obstacle est maintenant un triangle de hauteur $a = 3$ cm et de demi-base $l = 30$ cm (voir figure 5) et que la pente du canal est $I = 0.001$ en dehors de l'obstacle. À l'aide de l'abaque de la figure 6, déterminer la hauteur normale $h_n = [q/(I\,K_s)]^{3/10}$ sur toutes les parties du canal où $I > 0$. En

déduire une description des courbes de remous de la photographie.

> On a $h_n = 1.6$ cm pour la rampe de pente $I = a/l = 0.1$ et $h_n = 8$ cm lorsque $I = 0.001$. Le régime est en forte pente ($h_n < h_c$) sur la rampe et en faible pente ($h_c < h_n$) sinon. On en déduit les courbes de remous M_2, S_2, M_3 et M_1.

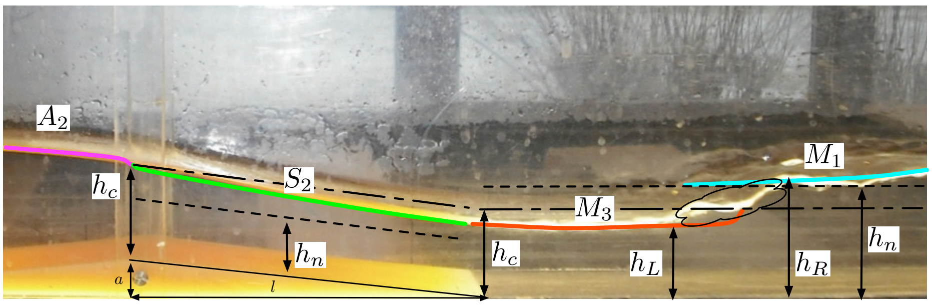


FIG. 5 – Courbes de remous d'un passage critique suivi d'un resssaut.

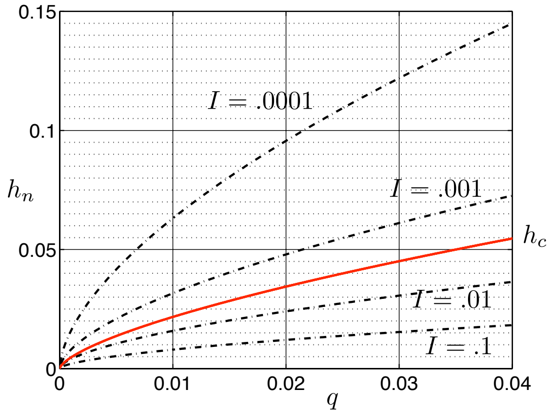
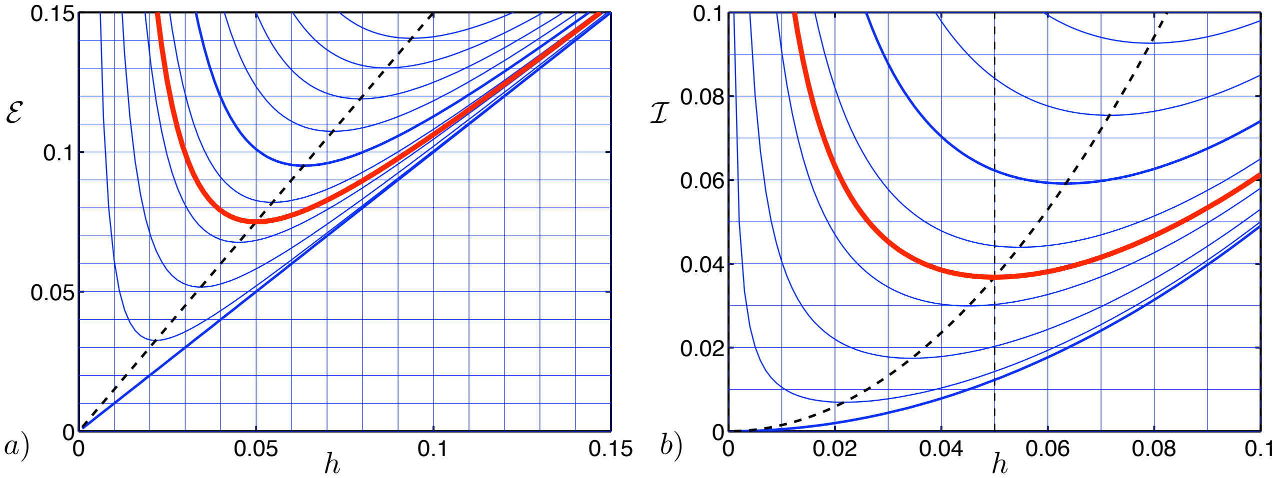
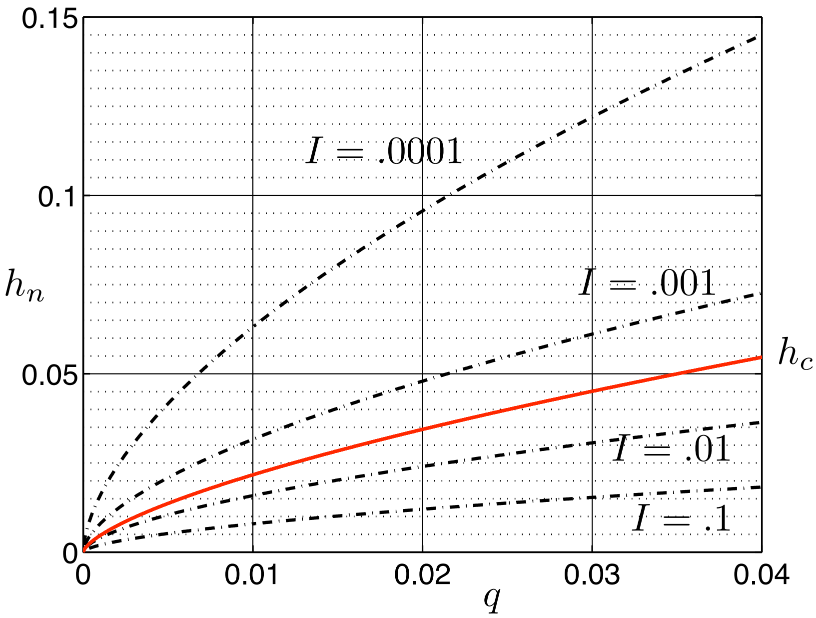


FIG. 6 – Tracé de $h_n = [q/(I\,K_s)]^{3/10}$ et $h_c = \left(q^2/g\right)^{1/3}$ en fonction de q pour $K_s = 100$.



0.15
$\mathcal{E}$
0.1
0.05
0
a)
0
0.05
0.1
0.15
h
0.1
$\mathcal{I}$
0.08
0.06
0.04
0.02
0
b)
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
h



0.15
$I = .0001$
0.1
h_n
$I = .001$
h_c
0.05
$I = .01$
$I = .1$
0
0
0.01
0.02
0.03
0.04
q