

PC3 : Applications des modèles turbulents

Cette PC illustre, sur des cas concrets, la modélisation de turbulence et les concepts de base de l'hydraulique en charge.

PC3.1 Dégazage en mer

Un pétrolier largue en mer $M = 10$ tonnes de résidus d'hydrocarbures. Il maintient sa vitesse de croisière dans la direction x et déverse cette pollution sur une longueur $L = 1$ km (voir figure 1).

Le polluant, plus léger que l'eau de la mer, reste en surface, et l'on suppose donc qu'il est advecté par un champ 2D turbulent $\underline{U}(x, y, t) = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ de moyenne $\overline{\underline{U}}$ et de divergence $\text{div } \underline{U}$ nulles. On note $C = \overline{C} + C'$ la décomposition en moyenne et fluctuations turbulentes de la concentration surfacique $C(x, y, t)$. On modélise l'advection du scalaire passif par cette turbulence à l'aide d'un coefficient de diffusivité turbulente k_{Ct} que l'on suppose constant et égal à $k_{Ct} = 10^{-2}$ m²/s. On note $k = k_C + k_{Ct}$ et on suppose que la diffusivité moléculaire k_C du polluant est très petite devant k_{Ct} .

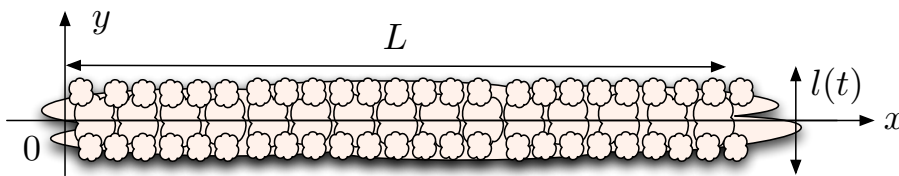


FIG. 1 – Croissance d'une panache de pollution 1D

À $t = t_0$, on suppose que la concentration surfacique (kg/m²) moyenne du polluant peut être modélisée par le profil $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$ avec $\overline{C}_0(y) = C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right)$ et $l_0 = 1$ m. Cette modélisation 1D est justifiée par le fait que l_0 est petit devant L . On souhaite calculer l'évolution de la concentration moyenne $\overline{C}(y, t)$ que l'on suppose donc indépendante de x sur le domaine d'étude considéré.

- 1) Exprimer C_m en fonction de M et l_0 et indiquer sa valeur numérique. Écrire l'équation d'advection-diffusion de C . Moyenner cette équation. En déduire l'équation de diffusion turbulente qui régit $\overline{C}(y, t)$.

On doit avoir $M = L \int_{-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right) dy = \sqrt{2\pi} C_m L l_0$ d'où $C_m = M/(\sqrt{2\pi} L l_0) \sim 4$ kg/m².
 La moyenne de l'équation $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{C} = \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\underline{U}C) = k_C \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$ s'écrit $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u' C'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v' C'}) = k_C \left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}\right)$. Comme $\overline{C}(y, t)$ ne dépend pas de x , la modélisation du flux turbulent $\underline{F}_{Ct} = \overline{\underline{U}' C'} = -k_{Ct} \text{grad } \overline{C}$ conduit à $\overline{u' C'} = 0$ et $\overline{v' C'} = -k_{Ct} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y}$. L'équation de diffusion turbulente s'écrit donc $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = (k_C + k_{Ct}) \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} = k \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$.

- 2) Montrer que $\overline{C}(y, t) = C_m \frac{l_0}{l(t)} \exp\left[-\frac{y^2}{2l^2(t)}\right]$ est solution de l'équation de diffusion turbulente lorsque $l^2(t) = 2kt$. On pourra poser $\overline{C} = A(t) \exp[-\varphi(y, t)]$. Comment choisir l'origine des temps, à travers la valeur de t_0 , pour que cette solution vérifie la condition initiale $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$. En déduire le temps T au bout duquel le maximum de concentration $\overline{C}(y, T)$ est en-dessous du seuil de détection $C_d = 0.2$ kg/m² du polluant par les satellites, valable uniquement de jour. Est-il possible de dégazer de nuit, sans être détecté de jour ?

En reportant dans l'équation $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2}$, on obtient $A'(t) - A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y, t) = k A(t) \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]$. Si $A(t) = C_m \frac{l_0}{\sqrt{2kt}}$ et $\varphi(y, t) = \frac{y^2}{4kt}$, l'équation s'écrit $-\frac{l_0}{2t\sqrt{2kt}} + \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \frac{y^2}{4kt^2} = k \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \left(-\frac{1}{2kt} + \frac{y^2}{4k^2t^2} \right)$ et se trouve donc bien vérifiée. Comme $l^2(t) = 2kt$, on choisit t_0 tel que $l(t_0) = l_0$, c'est-à-dire $t_0 = l_0^2/(2k) = 50$ s. La concentration maximale $\bar{C}(0, t) = C_m l_0/l(t)$ atteint le seuil C_d lorsque $l(t)/l_0 = C_m/C_d$. Ce seuil est atteint au temps $t = t_0 + T$ tel que $l(t_0 + T) = \sqrt{2k(t_0 + T)} = l_0 C_m/C_d$. On a donc $T = [l_0^2/(2k)] [(C_m/C_d)^2 - 1] \sim 2 \cdot 10^4$ s ~ 5 h30. Ce temps est inférieur à la durée de la nuit. Il faut augmenter la capacité de détection des satellites.

PC3.2 Dimensionnement d'un émissaire en mer

On cherche à dimensionner un émissaire en mer servant à évacuer une cuve d'eaux usées dont la surface libre est située à la cote $Z_{cuv} = 20$ m, la surface libre de la mer étant située à la cote $Z_{mer} = 0$ m. On note D le diamètre de l'émissaire et d la distance de son exutoire à la côte. On suppose que l'émissaire est posé sur une bathymétrie en pente douce.

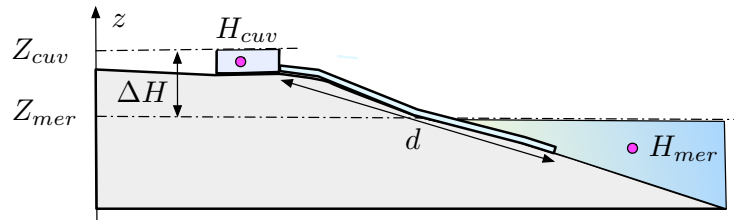


FIG. 2 – Émissaire reliant une cuve à la mer.

- 3) En supposant que la pression atmosphérique p_a est constante, exprimer les charges H_{cuv} et H_{mer} aux cotes respectives Z_{cuv} et Z_{mer} . On suppose que, loin des extrémités du tuyau, la cuve et la mer sont au repos. En déduire que la perte de charge ΔH dans l'émissaire est indépendante de son débit.

On a $H_{cuv} = Z_{cuv} + p_a/(\rho g)$ et $H_{mer} = Z_{mer} + p_a/(\rho g)$. On a donc $\Delta H = (H_{cuv} - H_{mer}) = 20$ m.

- 4) On suppose que $D = 20$ cm, $d = 1$ km et que la taille moyenne des rugosités de la canalisation, en fer galvanisé, est $k_s = 0.2$ mm. Déterminer le débit de l'émissaire ainsi que le nombre de Reynolds de l'écoulement en utilisant le Diagramme de Moody (figure 3) ainsi que la limite rugueuse de la formule de Colebrook de l'hydraulique en charge. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

L'équilibre s'écrit $\Delta H/d = J$ avec $\Delta H/d = 0.02$ et $J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H}$. La rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.001$ puisque $D_H = D$. On doit donc résoudre $\Delta H/d = \lambda(U, D) \frac{U^2}{2gD_H}$ où la dépendance de λ en fonction de U et de D est donnée par le diagramme de Moody ou la formule de Colebrook avec $Re = UD/\nu$ et $Ru = k_s/D$.

Cette équation implicite en U se résout explicitement si l'on suppose que le Re est grand. Dans ce cas, le diagramme de Moody conduit à la valeur $\lambda = 0.02$, ce qui implique la valeur $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 2$ m/s. On en déduit $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 4 \cdot 10^5$. On vérifie sur le Diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.02$ est valide pour cette valeur du nombre de Reynolds et l'on voit que le rapport entre $\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}$ et Ru/α_f est d'environ 0.17 dans la formule de Colebrook avec $\alpha_f = 3.7$ et $\beta_f = 2.51$. On peut donc négliger le premier terme et calculer $\lambda = [-2 \log_{10}(Ru/\alpha_f)]^{-1/2} \sim 0.02$. La formule de Haaland conduit au même résultat à quelques pourcents près. Le débit est $Q = \pi D^2 U/4 \sim 0.06$ m³/s.

- 5) Reprendre le calcul avec une canalisation de diamètre $D = 1$ m, en béton grossier, avec $k_s = 1$ cm.

On a toujours $J = \Delta H/d = 0.02$ mais la rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.01$. Le diagramme de Moody indique alors la valeur $\lambda = 0.04$. On en déduit $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 3.2$ m/s et $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 2.2 \cdot 10^6$. On vérifie sur le diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.04$ est valide. Le débit devient $Q = \pi D^2 U/2 \sim 5$ m³/s.

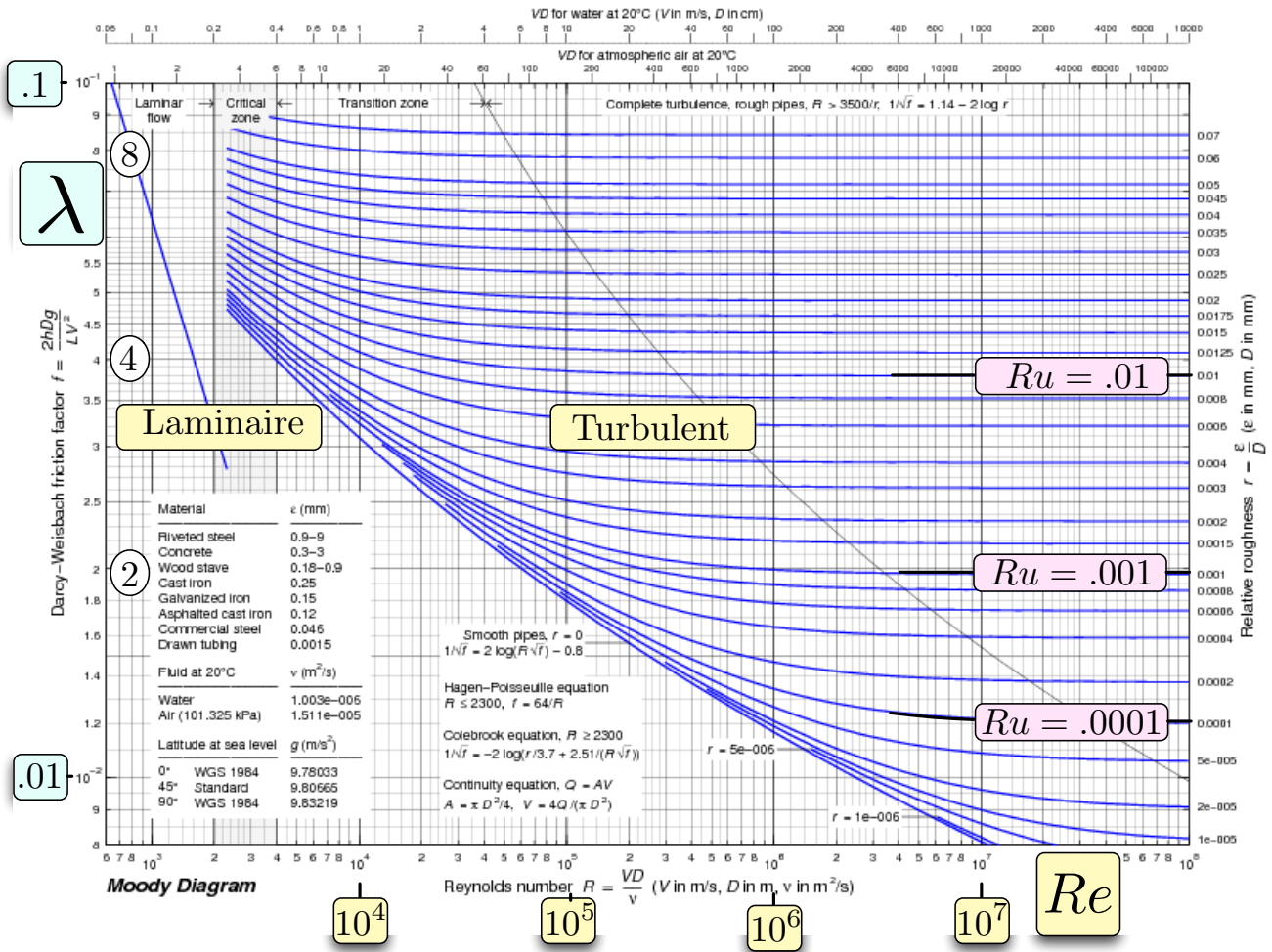


FIG. 3 – Diagramme de Moody. Coefficient de frottement λ en fonction de Re pour différentes valeurs de Ru . Diagramme de Tom Davis.

PC3.3 Conduites d'une usine hydroélectrique

Une conduite en charge de longueur $d = 6$ km relie un lac situé à une cote $z = Z_l$ au-dessus d'une usine hydroélectrique située à un cote $z = Z_u$. On suppose que le dénivelé est $h = Z_l - Z_u = 300$ m. Le tuyau est en acier galvanisé avec $k_s = 1$ mm. Son diamètre est $D = 2$ m. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

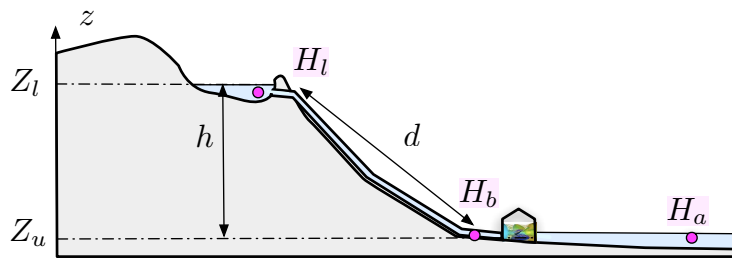


FIG. 4 – Lac, conduite forcée et usine hydroélectrique. Charges hydrauliques H_l , H_b et H_a en trois points.

6) On suppose que la vitesse dans la conduite est $U = 1$ cm/s. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Déterminer le coefficient de perte de charge λ . Calculer la perte de charge linéique.

Le nombre de Reynolds est $Re = UD/\nu = 2 \cdot 10^4$. Comme on a $Ru = 5 \cdot 10^{-4}$, on est en régime lisse. Le Diagramme de Moody conduit alors à la valeur $\lambda \sim 0.025$. On en déduit $J = \lambda \frac{U^2}{2gD} \sim 6 \cdot 10^{-8}$.

- 7) Exprimer la charge H_l du lac en notant p_a la pression atmosphérique. On note H_b la charge au bas de la conduite, juste avant l'usine. Exprimer H_b en fonction de H_l , de la vitesse U dans la conduite et de ses caractéristiques. Que vaut H_b si $U = 0$? Calculer la vitesse U_m lorsque $H_b = H_a$ où $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge du lac artificiel situé en aval de l'usine. Vérifier que le régime est rugueux. Comparer l'ordre de grandeur du terme $\frac{U^2}{2g}$ à la perte de charge totale.

On a $H_l = \frac{p_a}{\rho g} + Z_l$. La charge H_b vérifie $H_l = H_b + Jd$ avec $J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2gD}$. On a donc $H_b = H_l$ pour $U = 0$. Comme $Ru = 0.0005$, on lit, sur le diagramme de Moody, la valeur $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ en supposant que Re est grand. On a $-\frac{dH}{ds} = \frac{H_l - H_b}{d} = \frac{h}{d} \sim 0.05$. Comme la perte de charge due au frottement est $J = \lambda \frac{U_m^2}{2gD}$ et que $\frac{dH}{ds} = -J$ on en déduit $U_m = \sqrt{\frac{2gDh}{\lambda d}} \sim 11$ m/s. Comme $Re = U_m D/\nu = 22 \cdot 10^6$, on vérifie que l'on est bien en régime rugueux. Le terme $U_m^2/(2g) \sim 6$ m est petit devant la perte de charge $H_l - H_b = 300$ m.



FIG. 5 – Conduites forcées et centrale hydroélectrique.

- 8) La puissance récupérable par l'usine est $P = \beta \rho g (H_b - H_a) Q$ où H_b est la charge en bas de la conduite, $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge dans le lac artificiel situé en aval de l'usine, $\beta = 0.8$ est le rendement des turbines et Q le débit. Calculer le débit qui optimise la puissance produite par la centrale. Que vaut cette puissance? Vérifier que ce débit correspond à un régime rugueux.

La perte de charge dans la conduite est $H_l - H_b = Jd$. Comme $H_l = H_a + h$, on a donc $H_b - H_a = h - Jd$. La vitesse est reliée à la perte de charge par la relation $J = \lambda \frac{U^2}{2gD}$. On suppose que le régime est rugueux et que donc $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ est indépendant de U . Le débit est $Q = \frac{\pi D^2}{4} U$. La puissance récupérable s'écrit donc $P = \beta \rho g \left(h - \frac{\lambda d}{2gD} U^2 \right) \frac{\pi D^2}{4} U$.

En dérivant cette expression par rapport à U , on voit que le maximum de puissance est atteint pour $Jd = h/3$, c'est-à-dire pour une perte de charge égale au tiers de la charge disponible. On en déduit que $\frac{\lambda d}{2gD} U^2 = h/3$ et donc $U = \sqrt{\frac{2ghD}{3d\lambda}} \sim 6.3$ m/s. Le débit est alors $Q \sim 20$ m³/s. La puissance maximale est alors $P_{max} = \beta \rho Q \frac{2h}{3} = \beta \rho g \frac{\pi D^2}{4} U \frac{2h}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} \beta \rho \sqrt{g^3 h^3 D^5 / (\lambda d)} \sim 3.2$ MW. Comme $Re = UD/\nu = 1.3 \cdot 10^7$, on est bien en régime rugueux, ce qui justifie l'hypothèse λ constant utilisée dans la dérivation de P par rapport à U .