PC2 : Écoulements de milieux poreux

Cette PC aborde plusieurs exemples d'application de la loi de Darcy régissant les écoulements dans des milieux poreux.

PC2.1 Aquifère artésien de section constante

On considère l'écoulement dans un aquifère confiné par des roches imperméables et s'écoulant dans un milieu poreux de section constante A (figure 1). L'aquifère est en contact avec un lac dont la surface libre est à la cote z_1 en $x = 0$. Il en est de même en $x = L$ avec un deuxième lac dont la surface libre est à la cote z_2. On suppose que le milieu poreux est homogène et que sa conductivité hydraulique est K_p.

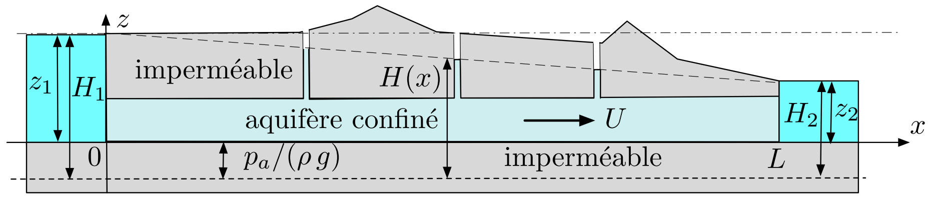

FIG. 1 – Aquifère confiné (artésien)

1) Calculer la charge hydraulique $H(x)$ pour $x \in [0, L]$ en supposant que l'écoulement est stationnaire. En déduire la vitesse débitante U de l'aquifère.

> La charge en $x = 0$ est $H_1 = p_a/(\rho\, g) + z_1$. La charge en $x = L$ est $H_2 = p_a/(\rho\, g) + z_2$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{dH}{dx}$ et la conservation de la masse $\frac{d(U A)}{dx} = 0$ entrainent $H = H_1 - x\,(H_1 - H_2)/L$ et $U = K_p(H_1 - H_2)/L$.

PC2.2 Percolation du café

On considère un percolateur cylindrique d'axe vertical et de section constante A. Il contient un milieu poreux de conductivité K_p et de porosité $m = 0.1$ sur une hauteur L (figure 2a). À $t = 0$, le milieu poreux est surmonté d'une lame d'eau dont la surface libre est à la cote $z = h_0$. Le fond du percolateur est constitué d'une grille à travers laquelle s'écoule l'eau qui est ainsi en contact avec la pression atmosphérique. On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la loi de Darcy soit valide comme dans le cas stationnaire.

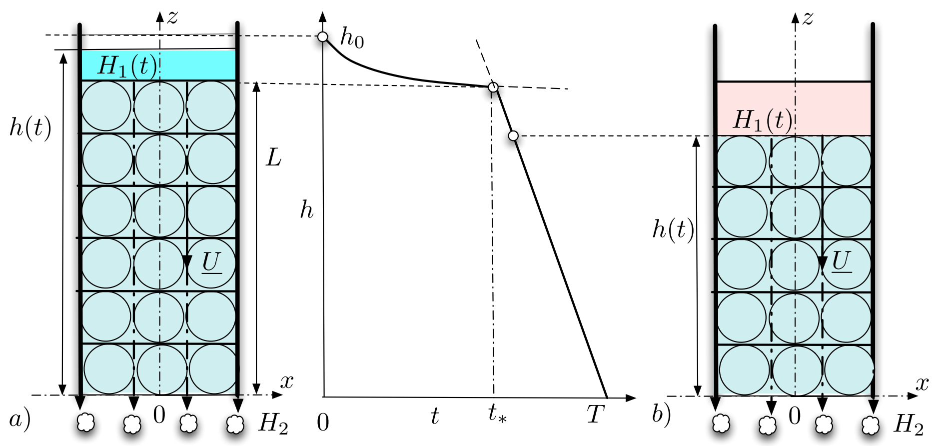

FIG. 2 – Percolation cylindrique : a) surmonté d'une couche d'eau, b) avec nappe phréatique.

2) Calculer le temps t_* au bout duquel la lame d'eau a disparu.

La charge en $z \in [L, L+h]$ est $H_1 = p_a/(\rho\, g) + h(t) + L$. La charge en $z = 0$ est $H_2 = p_a/(\rho\, g)$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{\partial H}{\partial z}$ et la conservation de la masse $\frac{\partial (U A)}{\partial z} = A \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ entraînent $U = -K_p\, h(t)/L$. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U = -K_p\, h/L$ pour $h \geq L$. On en déduit $h(t) = h_0 \exp(-K_p\, t/L)$. On a $h(t_*) = L$ pour $t_* = (L/K_p)\,\mathrm{Ln}\,(h_0/L)$.

3) Au-delà de t_*, la cote $h(t)$ de la "nappe phréatique" dans le milieu poreux continue de décroître (figure 2b). Calculer le temps $t = T$ au bout duquel toute l'eau a percolé. On suppose que $L = 30$ cm, $h_0 = 33$ cm et $\tau = T - t_* = 10$ s. En déduire la conductivité K_p du milieu poreux.

Comme la différence de charge entre le niveau de la nappe phréatique et le fond est $h(t)$ la vitesse débitante du le milieu poreux est $U = -K_p \frac{dH}{dz} = -K_p$. Cette vitesse débitante est égale à m fois la vitesse réelle. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse réelle des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U/m = -K_p/m$ pour $h \leq L$. La vitesse de l'aquifère est donc $\frac{dh}{dt} = K_p/m$. Comme $h(t_*) = L$, on a donc $h(t) = L - K_p(t - t_*)/m$. On a $h(T) = 0$ pour $T = t_* + L\, m/K_p$. On a donc $K_p = L\, m/\tau = 3\ 10^{-3}$ m/s.

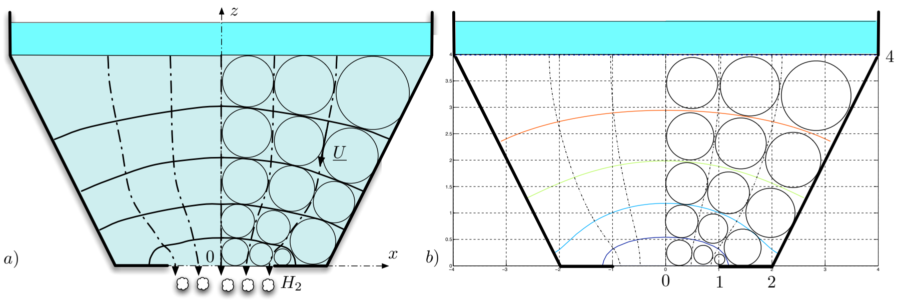

FIG. 3 – Percolateur 2D de forme complexe. a) Résolution "artistique" par la méthode des cercles. b) Solution numérique.

4) On considère maintenant un percolateur 2D dont la section verticale est indiquée sur la figure 3. Indiquer l'équation permettant de résoudre la charge $H(x, z)$ et spécifier ses conditions aux limites. Donner l'allure des trajectoires en utilisant la "méthode des cercles".

La charge dans le milieu poreux est la solution de l'équation de Laplace $\Delta H = 0$ avec les conditions aux limites $H = H_1$ en haut, $H = H_2$ sur la grille et $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ sur les parois imperméables. Une solution "artistique" de la méthode des cercles est indiquée sur la figure 2 et comparée à la solution numérique.

PC2.3 Coin salé (*exercice élaboré avec Th. Dubos*)

Près d'une côte, le sous-sol poreux s'imprègne d'eau salée au contact de la mer. Il en résulte la présence d'une nappe d'eau salée sous la nappe d'eau douce alimentée depuis le continent. On cherche à déterminer la position de l'interface eau douce - eau salée qui détermine, en particulier, la profondeur admissible des captages d'eau douce.

On se place dans une géométrie à deux dimensions (figure 4). On note $z = Z_1(x)$ la cote de l'interface eau douce - sol sec et $z = Z_2(x)$ celle de l'interface eau salée - eau douce. On suppose que $Z_1(0) = Z_2(0) = L$ et que l'hypothèse de Dupuit est valide, sauf dans le voisinage de $x = 0$. La masse volumique ρ_2 de l'eau salée est plus grande que la masse volumique ρ_1 de l'eau douce. On note K_p la conductivité du sol.

5) Calculer la charge H_1 dans la nappe d'eau douce. Quelle grandeur physique est continue à l'interface eau douce - eau salée ? Calculer les champs de pression $p_1(x, z)$ et $p_2(x, z)$ dans les deux nappes. En déduire H_2.

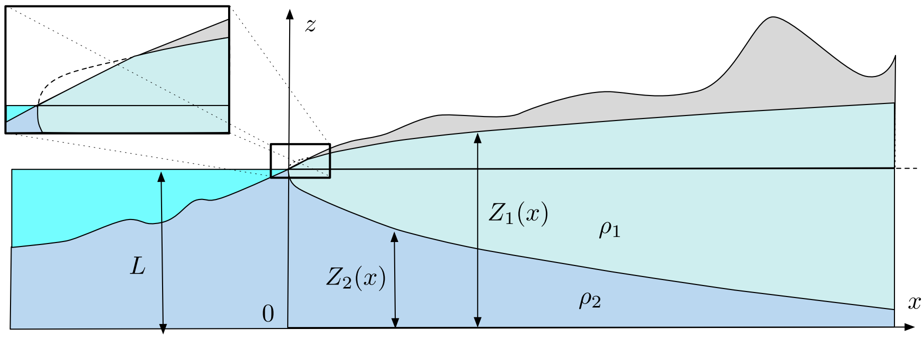

FIG. 4 – Nappe phréatique salée (ρ_2) en contact avec la nappe phréatique d'eau douce (ρ_1).

L'hypothèse de Dupuit permet d'écrire $H_1(x) = p_a/(\rho_1\, g) + Z_1(x)$. La pression est continue à l'interface. On a donc $p_1(x,z) = p_a + \rho_1\, g\,(Z_1 - z)$ et $p_2(x,z) = p_a + \rho_1\, g\,(Z_1 - Z_2) + \rho_2\, g\,(Z_2 - z)$. On en déduit, en utilisant de nouveau l'hypothèse de Dupuit, que $H_2(x) = p_a/(\rho_2\, g) + \frac{\rho_1}{\rho_2}\, Z_1 + \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\, Z_2$.

6) La nappe d'eau salée n'étant pas alimentée, montrer que H_2 est une constante dont on donnera la valeur. En déduire $L - Z_2(x)$ en fonction de $Z_1(x) - L$. Quel est le rapport des pentes des interfaces pour $\rho_1 = 1\ 000$ kg/m^3 et $\rho_2 = 1\ 035$ kg/m^3.

La loi de Darcy $U_2 = -K_p\, \frac{\partial H_2}{\partial x}$ entraîne que H_2 est constant puisque $U_2 = 0$. À partir de la valeur $Z_2(0) = L$, on déduit que $H_2 = p_a/(\rho_2\, g) + L$. On en déduit $L - Z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\,(Z_1 - L)$. Le rapport des pente est $\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1} \sim 30$.

7) En revanche, la nappe d'eau douce est alimentée par un débit linéique q venant du continent. En déduire $Z_1(x) - L$ et $L - Z_2(x)$. Pourquoi doit-on supposer l'existence d'une surface de résurgence près de $x = 0$?

La vitesse débitante $U_1(x) = -K_p\, \frac{\partial H_1}{\partial x}$ vérifie $q = (Z_1 - Z_2)\, U_1$. On en déduit $q = \frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}(Z_1 - L)\frac{\partial(Z_1-L)}{\partial x}$ et donc $Z_1 - L = \sqrt{2\,\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\,\frac{q}{K_p}\,x}$ et $L - Z_2 = \sqrt{2\,\frac{\rho_1^2}{\rho_2(\rho_2-\rho_1)}\,\frac{q}{K_p}\,x}$. Dans le voisinage de $x = 0$, l'hypothèse de Dupuit n'est plus valable. Pour éviter une vitesse $U_1(0)$ infine, il est nécessaire d'imposer l'existence d'une surface de résurgence de la nappe d'eau douce.

8) On creuse un puit dans la nappe phréatique. On suppose que le pompage crée une profondeur de rabattement $S_p = 3$ m dans le puits. De quelle hauteur remonte l'eau salée dans le puits.

L'eau salée remonte d'une hauteur $\frac{\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\, S_p = 33$ m.