PC1 : Écoulements de Poiseuille

Cette PC aborde deux exemples d'application des équations de Navier-Stokes incompressibles et en interprète la solution avec le point de vue de l'hydraulique.

PC1.1 Charge hydraulique

1) On considère un champ de vitesse $\underline{U}(x,y,z,t) = u\,\underline{e}_x + v\,\underline{e}_y + w\,\underline{e}_z$ et son gradient $\underline{\underline{K}} = \underline{\text{grad}}\ \underline{U}$ de composantes $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Montrer, en explicitant leurs composantes, que $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \underline{\underline{K}}\cdot\underline{U}$, $\underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U} = (\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}})\cdot\underline{U}$ et $\frac{1}{2}\ \underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 = {}^t\underline{\underline{K}}\cdot\underline{U}$. En déduire que $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ \underline{U} = \frac{1}{2}\ \underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U}$.

> Les composantes $i = 1,2,3$ sont $U_j\,\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ pour $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ \underline{U}$, $U_j\,\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j\,\frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U}$ et $U_j\,\frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\frac{1}{2}\underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2$. On a donc $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ \underline{U} = {}^t\underline{\underline{K}}\cdot\underline{U} + (\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}})\cdot\underline{U} = \frac{1}{2}\underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U}$.

2) On considère l'écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide newtonien de masse volumique ρ constante en présence d'un champ de gravité $\underline{F} = -g\,\underline{e}_z$. Montrer que les équations de Navier-Stokes entrainent la relation $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ H = -\underline{U}\cdot\underline{J}$ où $H = \frac{p}{\rho\,g} + z + \frac{1}{2\,g}\underline{U}^2$ est la "charge hydraulique" et $\underline{J} = -\frac{1}{\rho\,g}\ \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\tau}}$ est le "vecteur perte de charge linéique", $\underline{\underline{\tau}}$ étant le tenseur des contraintes visqueuses.

> Comme $\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} = 0$, que $\underline{e}_z = \underline{\text{grad}}\ (z)$ et que $\underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}}\ p + \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\tau}}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement $\rho\frac{d}{dt}\underline{U} = \rho\,\underline{F} + \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$ s'écrit $\frac{1}{2}\ \underline{\text{grad}}\ \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U} = -\frac{1}{\rho}\ \underline{\text{grad}}\ p - g\ \underline{\text{grad}}\ (z) + \frac{1}{\rho}\ \underline{\text{div}}\ \underline{\underline{\tau}}$. Comme $(\underline{\text{rot}}\ \underline{U}\wedge\underline{U})\cdot\underline{U} = \underline{0}$, on en déduit $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ H = -\underline{U}\cdot\underline{J}$.

PC1.2 Poiseuille plan en charge

On considère un fluide newtonien compris entre deux plaques rigides situées en $z = 0$ et $z = 2\,h$. On suppose que l'écoulement est tel qu'il peut être considéré comme incompressible et on note ρ la masse volumique. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que la vitesse est de la forme $\underline{U} = u(z)\ \underline{e}_x$ et qu'il est forcé par un gradient de pression horizontal constant $G = -\frac{\partial p}{\partial x}$, en présence du champ de gravité $\underline{g} = -g\,\underline{e}_z$.

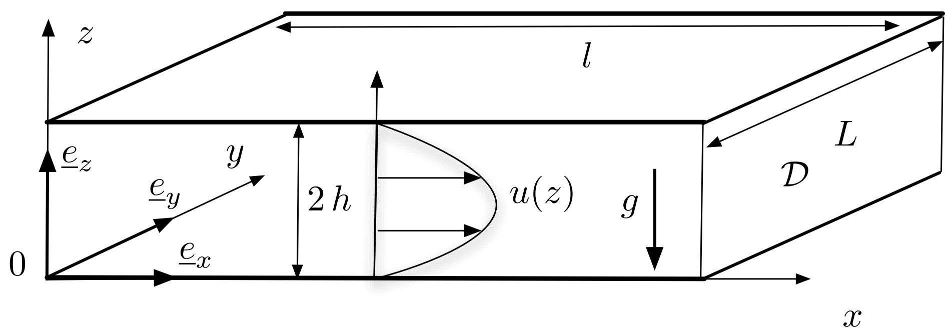

FIG. 1 – Écoulement de Poiseuille plan en charge.

3) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses formulées. On suppose que $p(0,0) = p_r$. En déduire l'expression du champ de pression p. Montrer que l'on a $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$ où J est la "perte de charge linéique due aux frottements" définie par $J = \underline{J}\cdot\underline{e}_x$. Montrer que J est constant et donner son expression en fonction de l'intensité G du forçage.

> L'équation de conservation de la masse $\text{div}\ \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ est trivialement vérifiée. L'équation de quantité de mouvement conduit à $0 = G/\rho + \nu\,u''(z)$, $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$. On en déduit $p(x,z) = p_r - G\,x - \rho\,g\,z$. Comme $\underline{U} = u\,\underline{e}_x$ et $\underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\ H = -\underline{U}\cdot\underline{J}$, on a $\frac{\partial H}{\partial x} = \underline{\text{grad}}\ H\cdot\underline{e}_x = -\underline{J}\cdot\underline{e}_x = -J$. On en déduit $J = G/(\rho\,g)$.

4) Calculer et tracer le profil de vitesse $u(z)$. Exprimer $\underline{\underline{d}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$. Calculer et tracer le profil $\tau(z) = \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{e}_z$ où $\underline{\underline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. On note $\tau_* = \tau(0)$. Exprimer, en fonction de τ_*, les contraintes tangentielles τ_0 et τ_{2h} exercées par le fluide sur les parois.

Le profil $u(z) = \frac{G}{2\rho\nu}(2h - z)z$ est une parabole. On a $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}u'(z)\ [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ et $\underline{\underline{\sigma}} = -p\ \underline{\underline{I}} + 2\,\rho\,\nu\,\underline{\underline{d}} = -p\ \underline{\underline{I}} + \tau(z)\,[\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ avec $\tau(z) = \rho\,\nu\,u'(z) = G(h - z)$. On a $\tau_* = G\,h$ et $\tau(0) = \tau(2h) = \tau_*$. Le profil de $\tau(z)$ est une droite.

5) On considère le domaine $\mathcal{D} = \{0 \le x \le l,\ \ 0 \le y \le L,\ \ 0 \le z \le 2h\}$ où l et L sont des constantes. Calculer la résultante des forces de contact exercées par l'extérieur de $\mathcal{D}$ sur les faces de normales $\underline{e}_x$ et $-\underline{e}_x$. Calculer la résultante des forces de contact exercées par les parois sur le fluide. Calculer la résultante de toutes les forces de contact exercées par l'extérieur du parallélépipède sur sa frontière $\partial\mathcal{D}$. Commenter en remarquant que les équations de Navier-Stokes s'écrivent ici $\underline{0} = -\rho\,g\,\underline{e}_z + \underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$. Calculer et interpréter la grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}\,dS$. On définit le rayon hydraulique R_H comme étant le rapport entre l'aire $2hL$ de la face de $\mathcal{D}$ tranverse à l'écoulement et le périmètre de cette section en contact avec les parois. Montrer que $\tau_* = \rho\,g\,R_H\,J$.

Les forces de contact sur les faces de normales $\underline{e}_x$ et $-\underline{e}_x$ sont respectivement $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z)\,\underline{e}_x + \tau(z)\,\underline{e}_z$ et $\underline{T}(0, y, z, \underline{e}_x) = p(0, z)\,\underline{e}_x - \tau(z)\,\underline{e}_z$. Leur résultante est $[p(0, z) - p(l, z)]\,(2hL)\underline{e}_x = 2hlLG\,\underline{e}_x$. Les forces de contact sur les faces de normales $\underline{e}_z$ et $-\underline{e}_z$ sont respectivement $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h)\,\underline{e}_z + \tau(2h)\,\underline{e}_x$ et $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0)\,\underline{e}_z - \tau(0)\,\underline{e}_x$. Leur résultante est le vecteur $[p(x, 0) - p(x, 2h)]\,lL\,\underline{e}_z - [\tau(0) - \tau(2h)]\,lL\,\underline{e}_x = 2hlLG\,\underline{e}_z - 2hlLG\,\underline{e}_x$. Comme $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z)\,\underline{e}_y$ et $\underline{T}(x, L, z, -\underline{e}_y) = p(x, z)\,\underline{e}_y$, la résultante de toutes les forces de contact exercées sur $\partial\mathcal{D}$ est $\rho\,g\,(2hlL)\,\underline{e}_z$. C'est l'opposé du poids du fluide contenu dans $\mathcal{D}$, supporté par la paroi. En intégrant $\underline{0} = \rho\,g\,\underline{e}_z + \underline{\mathrm{div}}\ \underline{\underline{\sigma}}$ sur $\mathcal{D}$, on retrouve bien l'équilibre $\underline{0} = \int_{\mathcal{D}} \rho\,g\,\underline{e}_z d^3x + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\,dS$ entre le poids et les forces de contact sur $\partial\mathcal{D}$. La grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}\,dS = -2\,\tau_*\,lL\,\underline{e}_x = -2(Gh)lL\,\underline{e}_x$ est égale à $\int_{\mathcal{D}} \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\tau}}\,d^3x = -(\rho g J)\,(2\,hlL)\,\underline{e}_x$ en appliquant le théorème de la divergence. C'est la résultante des forces tangentielles exercées par le paroi sur $\mathcal{D}$. Elle s'oppose au gradient de pression. On a $R_H = 2hL/(2L) = h$ et $\tau_* = \rho\,g\,R_H\,J$.

6) Calculer la vitesse moyenne $U = \frac{1}{2h}\int_0^{2h} u(z)\,dz$. On note $D_H = 4\,h$. Montrer que l'on peut écrire la "loi de Darcy" $U = -K_p\,\frac{dH}{dx}$ où K_p est une constante que l'on exprimera en fonction de D_H, ν et g. On définit le coefficient de frottement λ par la relation $J = \lambda\,\frac{U^2}{2\,g\,D_H}$. Exprimer λ en fonction du "nombre de Reynolds" $Re = U\,D_H/\nu$. Calculer U et Re pour une perte de charge de 2 Bars sur 100 m d'un écoulement d'eau ($\rho = 1000$ kg/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s) dans les cas $h = .5$ mm puis $h = 5$ mm. Commenter.

On a $U = G\,h^2/(3\,\rho\,\nu)$. On a $K_p = D_H^2 g/(48\,\nu)$. On a $\lambda = 96/Re$. On a $U = 16$ cm/s et $Re \sim 300$ pour $h = .5$ mm, $U = 16$ m/s et $Re \sim 3\ 10^5$ pour $h = 5$ mm. La solution laminaire est réaliste dans le premier cas. Dans le second cas, elle ne l'est pas car l'écoulement devient turbulent.