

## CONTRÔLE du jeudi 27 mars 2008

### PREMIÈRE PARTIE : Circuit hydraulique d'un chauffage central (5 points)

Les circuits hydrauliques en charge sont utilisés pour de nombreuses applications : réseaux d'eau potable, commandes hydrauliques, production d'énergie, circuits de refroidissement, etc. L'exemple du chauffage central est ici choisi pour explorer quelques notions d'hydraulique.

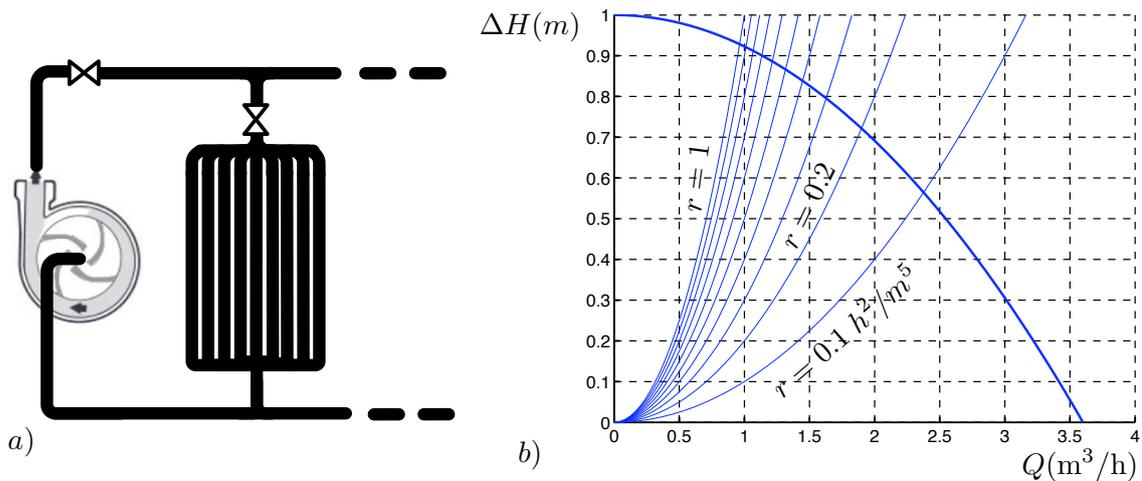


FIG. 9.1 – a) Schéma partiel et simplifié du circuit hydraulique avec une pompe, un radiateur, des conduites, des vannes, des coudes et des tés. b) Courbe caractéristique  $\Delta H = H_p \left( 1 - Q^2/Q_p^2 \right)$  de la pompe et courbes  $\Delta H = r Q^2$  pour  $r = .1, .2, .3, \dots, 1 \text{ h}^2/\text{m}^5$ .

On considère un circuit de chauffage central constitué d'une pompe, de vannes, de radiateurs et de conduites rectilignes de diamètre  $D = 2 \text{ cm}$  reliées entre elles par des coudes ou des tés de même diamètre (voir le schéma simplifié de la figure 9.1a). On suppose que l'écoulement est partout turbulent avec un coefficient de perte de charge linéique constant  $\lambda = 0.02$  dans les portions de conduites rectilignes.

- 1) On suppose que les coudes sont droits (angle  $\varphi = \pi/2$ ) et que leur rayon de courbure est  $\rho_c = D$ . Déterminer leur coefficient de perte de charge singulière en utilisant le graphe de la figure 9.2. En déduire la perte de charge à travers un tel coude lorsque le débit qui le traverse est  $Q = 2 \text{ m}^3/\text{h}$ . On pourra prendre  $g = 10 \text{ m/s}^2$  pour la gravité.
- 2) On assimile la perte de charge d'une vanne à celle d'un rétrécissement brusque suivi de très près par un élargissement brusque, le diamètre  $D_v$  de la section intermédiaire étant réglable. Calculer et tracer le coefficient de perte de charge singulière de cette vanne en fonction de  $\beta = D_v^2/D^2$ .
- 3) On définit la "longueur équivalente"  $L_e$  d'un tronçon du circuit comme étant la longueur de la conduite rectiligne de même section qui produirait la même perte de charge pour le même débit. Exprimer la longueur équivalente d'une singularité hydraulique dont le coefficient de perte de charge est  $K_g$ . Quelle est la longueur équivalente des coudes décrits à la question 1 ?

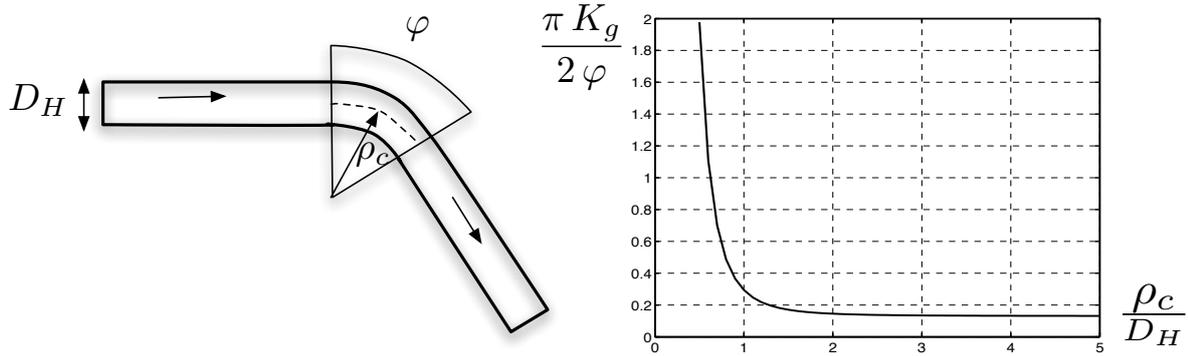


FIG. 9.2 – Coefficient de perte de charge singulière dans un coude.

- 4) On considère qu'un radiateur est constitué de  $n = 9$  tronçons en parallèles de longueurs équivalentes respectives  $L_t = 2.7$  m. Calculer la longueur équivalente de ce radiateur.
- 5) Le circulateur de la chaudière est une pompe dont le gain de charge  $\Delta H$  est relié à son débit  $Q$  par la relation  $\Delta H = H_p \left(1 - Q^2/Q_p^2\right)$  avec  $H_p = 1$  m et  $Q_p = 3.6$  m<sup>3</sup>/h. On suppose que la longueur équivalente du circuit de chauffage central alimenté par cette pompe est  $L_e = 20$  m. Calculer le débit  $Q$  du circuit ainsi que la puissance  $P$  délivrée par la pompe. Le graphe de la figure 9.1b pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées. On prendra  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> pour la masse volumique de l'eau.

## DEUXIÈME PARTIE : Dispersion des ondes capillaires (7 points)

Lorsque la surface libre d'un liquide est déformée, la résultante des forces de cohésion intermoléculaires génère une force surfacique perpendiculaire à cette surface qui s'oppose à la déformation. Si  $z = \eta(x, y)$  est l'équation de cette surface libre, cet effet de "tension superficielle" se traduit par une différence de pression à l'interface qui s'écrit

$$p - p_a = -T \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (\text{E.1})$$

où  $p$  est la pression dans le fluide,  $p_a$  la pression atmosphérique et  $T$  une constante qui vaut  $T = 7 \cdot 10^{-2}$  N/m pour l'eau.

Pour déterminer la contribution de la tension superficielle à la relation de dispersion des ondes de surface, on suppose que la profondeur du domaine fluide est infiniment grande et que le champ de vitesse  $\underline{U}$  est nul lorsque  $z \rightarrow -\infty$ . La dynamique du fluide est modélisée par les équations d'Euler incompressibles :

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z, \quad (\text{E.2})$$

où  $\rho$  est la masse volumique constante.

- 6) Écrire la condition aux limites cinématique qui complète la condition aux limites dynamique (E.1).

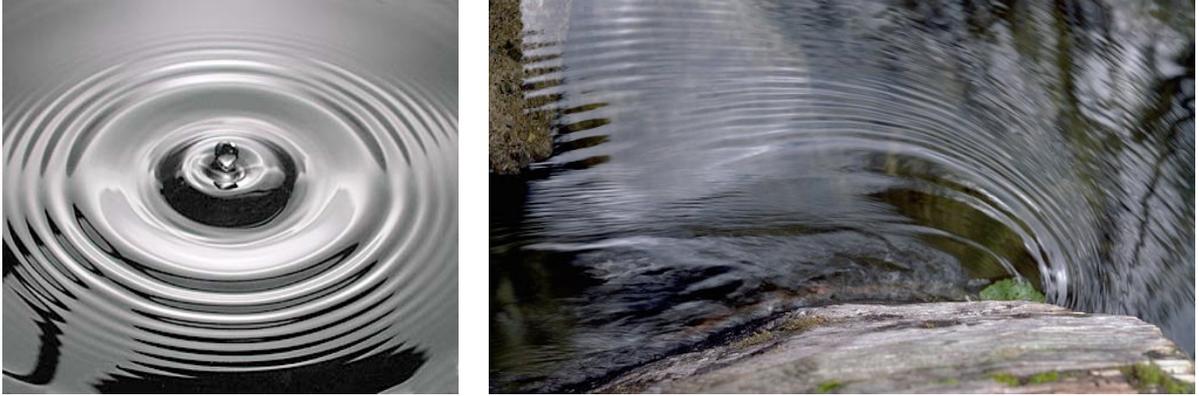


FIG. 9.3 – Visualisation d'ondes capillaires.

- 7) On s'intéresse aux petites oscillations de la surface libre. Écrire le système d'équations linéarisées ainsi que les conditions aux limites complètement linéarisées.
- 8) On suppose que l'écoulement est irrotationnel est l'on pose donc  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ . Montrer que l'on peut choisir  $\phi(x, y, z, t)$  de manière à pouvoir écrire

$$p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (\text{E.3})$$

- 9) En déduire une formulation des conditions aux limites en  $z = 0$  qui ne fait intervenir que  $\phi$  et  $\eta$ .
- 10) On cherche des solutions complexes de la forme

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(z) e^{i k_1 x + i k_2 y - i \omega t} . \quad (\text{E.4})$$

Montrer que  $\Phi(z) = \Phi_m \exp(\beta z)$  où  $\beta$  est une constante que l'on déterminera.

- 11) En déduire que la relation de dispersion de ces ondes s'écrit

$$\omega^2 = g k \left( 1 + \frac{k^2}{k_c^2} \right) , \quad (\text{E.5})$$

où  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  et  $k_c$  une constante que l'on déterminera. En déduire l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes des ondes de surface dont la période est influencée par les effets de tension superficielle.

- 12) Déterminer les minima respectifs  $c_\phi^{(\min)}$  et  $c_g^{(\min)}$  des modules de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe de ces ondes de surface. Le graphe de la figure 9.4 pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées.
- 13) On jette un caillou dans une mare profonde. Montrer qu'une zone de calme s'étend à une vitesse que l'on déterminera.
- 14) Un obstacle de petite taille se déplace à la surface de l'eau à la vitesse  $-V \underline{e}_x$  où l'on suppose que  $V = 1.6 \sqrt{g/k_c}$ . Indiquer pourquoi l'on observe des ondes capillaires de courte longueur d'onde à l'avant de l'obstacle et des ondes de plus grande longueur d'onde à l'arrière. Déterminer la longueur d'onde des ondes que l'on observe dans l'axe de la trajectoire.

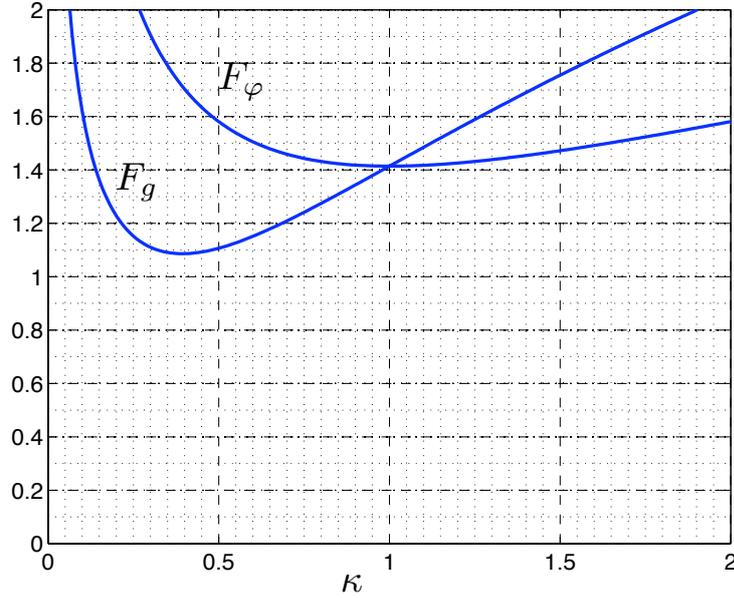


FIG. 9.4 – Fonctions  $F_g(\kappa) = (1 + 3\kappa^2) [4\kappa(1 + \kappa^2)]^{-1/2}$  et  $F_\varphi(\kappa) = (1 + \kappa^2)^{1/2} \kappa^{-1/2}$ .

### TROISIÈME PARTIE : Réfraction de la houle par un courant (8 points)

Dans cette troisième partie, on s'intéresse à la réfraction des ondes de surface par un courant. On suppose que la longueur d'onde des paquets d'ondes considérés permet de négliger la tension superficielle. Lorsque le courant moyen est nul, on note  $\Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g \|\underline{k}\| \tanh[\|\underline{k}\| h_f(\underline{x})]}$  la relation de dispersion intrinsèque locale d'un paquet d'ondes dispersé.

On admettra qu'un paquet d'ondes dispersé, en présence d'un courant moyen  $\underline{V}(\underline{x})$  stationnaire variant lentement par rapport à la longueur d'onde locale, obéit à l'une des relations de dispersion

$$\omega = \Omega_+(\underline{k}, \underline{x}) = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) + \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{k} \quad \text{ou} \quad \omega = \Omega_-(\underline{k}, \underline{x}) = -\Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) + \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{k}, \quad (\text{E.6})$$

définies, par convention, seulement pour  $\omega \geq 0$ .

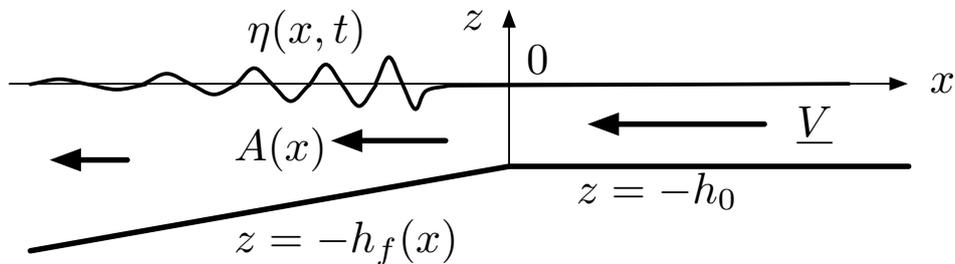


FIG. 9.5 – Houle  $\eta(x, t)$  réfractée par le courant  $\underline{V}(x) = -A(x) \underline{e}_x$  et la bathymétrie  $h_f(x)$ .

On considère la bathymétrie définie par  $h_f(x) = h_0 + \beta x$  pour  $x \leq 0$  et  $h_f(x) = h_0$  pour  $x \geq 0$ , que traverse un écoulement moyen de vitesse  $\underline{V}(x) = -A(x) \underline{e}_x$  définie par  $A(x) = q/h_f(x)$ . Les

constantes  $\beta = 0.1$ ,  $h_0 = 2$  m et  $q$  sont positives. Ce modèle, invariant par translation en  $y$ , décrit l'écoulement d'une rivière de débit linéique  $q$  qui se jette dans la mer (voir la figure 9.5). Le graphe de la figure 9.6 pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées.

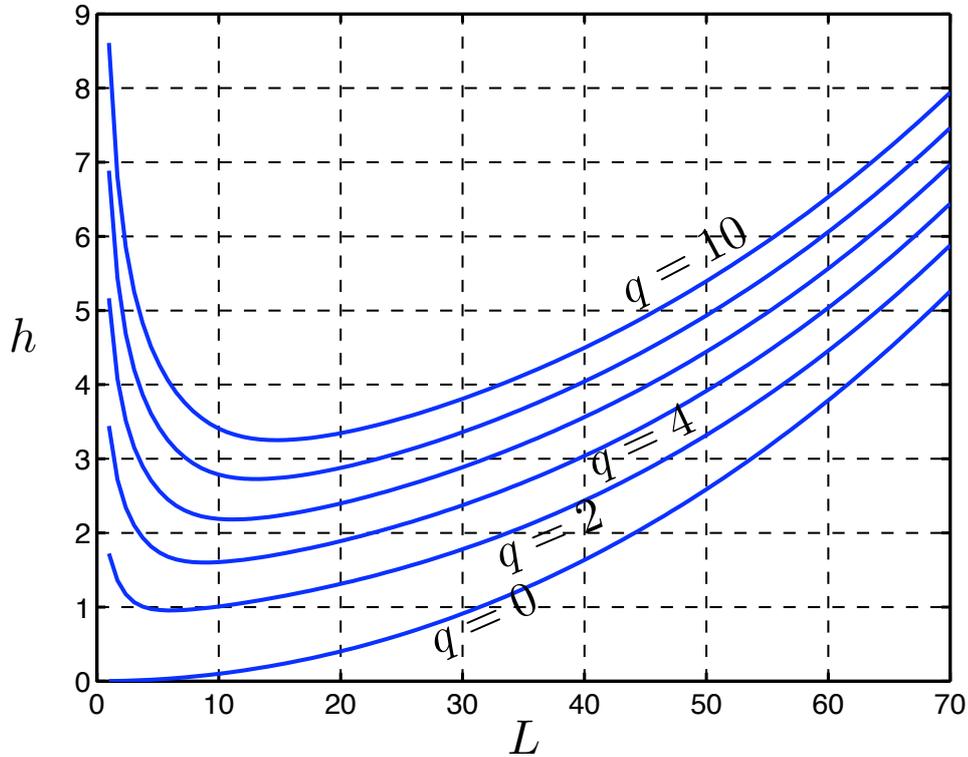


FIG. 9.6 – Fonction  $h(L)$  solution de l'équation implicite  $h = \frac{L}{2\pi} \operatorname{argth} \left[ \frac{2\pi L}{gT^2} \left( 1 + \frac{qT}{Lh} \right)^2 \right]$  pour  $T = 10$  s et  $q \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$  m<sup>2</sup>/s.

- 15) On suppose qu'au large, en  $x = -\infty$ , une houle de période  $T = 10$  s se propage vers la côte avec une vitesse de phase parallèle à  $\underline{e}_x$ . Calculer sa longueur d'onde  $L_l$  et sa vitesse de groupe  $c_{gl}$ . On pourra prendre  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> pour toutes les applications numériques.
- 16) On suppose, pour cette question et les deux suivantes, que  $q = 0$ , la rivière étant donc au repos. La houle de la question 15) arrive près de la côte et remonte le lit de la rivière après avoir été réfractée par la bathymétrie de la côte. Déterminer la longueur d'onde  $L_0$  de cette houle pour  $x \geq 0$ .
- 17) On considère qu'une houle de hauteur  $H$  et de longueur d'onde  $L$  est en milieu peu profond si  $L > 20 h_f$  et que, dans ce cas, le critère de déferlement de Munk  $H/h_f > 0.78$  s'applique. Peut-on affirmer que la houle de la question 15) ne déferle pas en arrivant dans la rivière si sa hauteur au large est  $H_l = 80$  cm? On notera  $H_0$  la hauteur de la houle qui se propage dans le lit de la rivière. On admettra que la houle ne déferle pas avant d'atteindre le régime des faibles profondeurs.

- 18) On installe un récupérateur d'énergie de la houle dans le lit de la rivière dont la largeur dans la direction  $y$  est  $L_y = 10$  m. Quelle est la puissance  $P_0$  qu'apporte la houle de la question 17)? On prendra  $\rho = 1\,000$  kg/m<sup>3</sup> pour la masse volumique de l'eau.
- 19) On suppose maintenant que le débit linéique  $q$  de la rivière est strictement positif. On admettra que seule la relation de dispersion  $\Omega_+$ , notée  $\Omega$  par la suite, est pertinente pour étudier la réfraction de la houle qui arrive du large. Exprimer la vitesse de groupe  $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \text{grad}_{\underline{k}}\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  associée à cette relation de dispersion en fonction de la vitesse de groupe intrinsèque  $\underline{c}_{gi}(\underline{k}, \underline{x}) = \text{grad}_{\underline{k}}\Omega_i(\underline{k}, \underline{x})$  des ondes de surface dont on suppose connue l'expression en fonction de  $\underline{k}$  et  $\underline{x}$ .
- 20) On suppose que  $q = 4$  m<sup>2</sup>/s. Montrer que la houle de la question 15) atteint la rivière et déterminer sa longueur d'onde  $L_4$  pour  $x \geq 0$ .
- 21) On suppose que  $q = 6$  m<sup>2</sup>/s. Déterminer le point  $x = x_c$  à droite duquel la houle de la question 15) ne peut pas passer.
- 22) On considère un paquet d'ondes localisé en espace dont la longueur d'onde au large est centrée en  $L_l$ . On suppose que ce paquet d'ondes reste localisé en espace en arrivant près de la côte et qu'il se retrouve bloqué en  $x = x_c$ . Déterminer la vitesse de groupe intrinsèque  $\underline{c}_{gi}$  ainsi que la vitesse de phase intrinsèque  $\underline{c}_{\varphi i} = \Omega_i / \|\underline{k}\|$  du paquet d'ondes bloqué. En déduire que la vitesse des crêtes des vagues est non nulle en  $x = x_c$ . Que deviennent ces crêtes pour  $x \geq x_c$ ?

## CORRIGÉ

### PREMIÈRE PARTIE : Circuit hydraulique d'un chauffage central (5 points)

1) On lit  $K_g \sim 0.3$  pour les coudes et  $K_g \sim 2$  pour les tés. La perte de charge est  $\Delta H = K_g \frac{Q^2}{2gA^2}$  avec  $A = \pi D^2/4$ . On a donc  $\Delta H = K_g \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^2} = 4.7$  cm.  
[0,5 point]

2) La perte de charge à travers le rétrécissement brusque est négligeable. La perte de charge à travers l'élargissement brusque est  $\Delta H = K_{ge} \frac{Q_v^2}{2gA_v^2}$  où  $A_v = 4\pi D_v^2/4$  et  $K_{ge} = (1 - A_v/A)^2$ . En utilisant la loi de conservation de la masse  $Q_v A_v = Q A$ , le coefficient de perte de charge de la vanne, défini par la relation  $\Delta H = K_g \frac{Q^2}{2gA^2}$  est  $K_g = (1 - \beta)^2/\beta^2$ . C'est une fonction décroissante de  $\beta = 0$ , où elle infinie, à  $\beta = 1$  où elle vaut 1, ce qui correspond à une absence de perte de charge singulière ( $D = D_v$ ).

[1 point]

3) Comme le rayon hydraulique d'une conduite circulaire est  $D_H = D$  et que la vitesse est  $U = Q/A$ , la perte de charge d'une conduite rectiligne de longueur  $L_e$  est  $\Delta H = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} L_e$ . Par définition de  $K_g$ , la perte de charge d'une singularité hydraulique est  $\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g}$ . On en déduit que  $L_e = K_g D/\lambda$ . La longueur équivalente d'un coude de coefficient de perte de charge

$K_g = 0.3$ , est  $L_e = 30$  cm.

[1 point]

4) Si  $Q$  est le débit aux bornes du radiateur, chaque tronçon est traversé par un débit  $Q_t = Q/n$ . La perte de charge dans chaque tronçon est  $\Delta H = \lambda \frac{Q_t^2}{2gA^2} L_t = \lambda \frac{Q^2}{2gA^2} (L_t/n^2)$ . La longueur équivalente du radiateur est donc  $L_e = L_t/n^2 = 3.3$  cm.

[1 point]

5) La perte de charge dans le circuit alimenté par la pompe est  $\Delta H = r Q^2$  avec  $r = \frac{\lambda L_e}{2gA^2 D} = 0.8 \text{ h}^2/\text{m}^5$ . La lecture du graphe la figure 9.1b conduit aux valeurs numériques  $Q = 1.1 \text{ m}^3/\text{h}$  et  $\Delta H = 90$  cm. La puissance délivrée par la pompe est  $P = \rho g \Delta H Q = 2.8 \text{ W}$ .

[1.5 point]

## DEUXIÈME PARTIE : Dispersion des ondes capillaires (7 points)

6) La condition aux limites cinématique est

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) + u[x, y, \eta(x, y, t)] \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y, t) + v[x, y, \eta(x, y, t)] \frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y, t) = w[x, y, \eta(x, y, t)]. \quad (1)$$

[0,5 point]

7) Les équations linéarisées sont  $\text{div } \underline{U} = 0$ ,  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z$ . La condition aux limites  $\underline{U} \rightarrow \underline{0}$  pour  $z \rightarrow -\infty$  est inchangée. La condition aux limites dynamique conserve la forme de l'équation (E.1) mais elle est, dans sa forme linéarisée, écrite pour  $z = 0$  :

$$p(x, y, 0, t) - p_a = -T \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}(x, y, t) \right]. \quad (2)$$

La condition aux limites cinématique linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) = w(x, y, 0). \quad (3)$$

[1 point]

8) Comme  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ , l'équation de conservation de quantité de mouvement linéarisée s'écrit

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = \underline{0}. \quad (4)$$

La fonction dont le gradient est nul ne dépend donc que du temps. Comme  $\phi$  est définie à une fonction du temps près, on peut choisir cette dernière de manière à satisfaire la relation  $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .

[0,5 point]

9) Les conditions aux limites sont  $\text{grad } \phi = \underline{0}$  pour  $z \rightarrow -\infty$  et, en  $z = 0$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (5)$$

[0,5 point]

**10)** La condition aux limites  $\text{grad } \phi = \underline{0}$  pour  $z \rightarrow -\infty$  entraîne que  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi(z) = 0$ . La loi de conservation de la masse  $\text{div } \underline{U} = \Delta \phi = 0$ , combinée à cette condition, entraîne que  $\Phi(x) = \Phi_m \exp(kz)$  avec  $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . On a donc  $\beta = k$ .

[0,5 point]

**11)** L'élimination de  $\eta$  entre les deux conditions aux limites en  $z = 0$  conduit à la condition aux limites

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (6)$$

En reportant l'expression de  $\phi$  dans cette condition aux limites, on obtient

$$\left( \omega^2 - gk - \frac{T}{\rho} k^3 \right) \Phi_m = 0. \quad (7)$$

La relation de dispersion est donc  $\omega = gk(1 + k^2/k_c^2)$  avec  $k_c = \sqrt{\rho g/T} = 378 \text{ m}^{-1}$ . La longueur d'onde associée est  $l_c = 2\pi/k_c = 1.6 \text{ cm}$ . Seules les ondes de longueurs d'ondes comparables ou inférieures à  $l_c$  sont influencées par la tension superficielle.

[1 point]

**12)** La relation de dispersion s'écrit  $\omega = \Omega(k) = \sqrt{g} k^{1/2} (1 + k^2/k_c^2)^{-1/2}$  en adoptant la convention  $\omega \geq 0$ . On en déduit la vitesse de phase  $c_\varphi(k) = \Omega'(k)/k = \sqrt{g/k_c} F_\varphi(k/k_c)$  et la vitesse de groupe  $c_g(k) = \Omega'(k) = \sqrt{g/k_c} F_g(k/k_c)$  avec  $F_g(\kappa) = (1 + 3\kappa^2) [4\kappa(1 + \kappa^2)]^{-1/2}$  et  $F_\varphi(\kappa) = (1 + \kappa^2)^{1/2} \kappa^{-1/2}$ . Le graphe de la figure 9.4 indique que les minima respectifs de  $F_\varphi$  et  $F_g$  sont 1.4 et 1.1. On a donc  $c_\varphi^{(\min)} = 1.4 \sqrt{g/k_c} = 23 \text{ cm/s}$  et  $c_g^{(\min)} = 1.1 \sqrt{g/k_c} = 18 \text{ cm/s}$ .

[1 point]

**13)** Les paquets d'ondes les plus lents voyagent à la vitesse de groupe  $c_g^{(\min)} = 18 \text{ cm/s}$ . C'est la vitesse de propagation de la zone de calme qui s'installe pour la réponse impulsionnelle du milieu.

[0,5 point]

**14)** On note maintenant  $\Omega_i(k) = \sqrt{g} k^{1/2} (1 + k^2/k_c^2)^{-1/2}$  la relation de dispersion intrinsèque des ondes de surface dans un repère fixe et  $c_{\varphi i}$  et  $c_{g i}$  les vitesses de phase ou de groupe associées. Dans le repère lié à l'obstacle, les relations  $\Omega_+(\underline{k}) = \Omega_i(k) + V k_1$  et  $\Omega_-(\underline{k}) = -\Omega_i(k) + V k_1$  sont à considérer, avec la convention  $\omega \geq 0$ . Seules les ondes vérifiant  $\Omega_+(\underline{k}) = 0$  ou  $\Omega_-(\underline{k}) = 0$  sont observables dans le sillage de l'obstacle. Si  $\underline{k} = k_1 \underline{e}_x$  et  $\omega = 0$ , on a donc  $\Omega_-(\underline{k}) = -\Omega_i(k) + V k$  pour  $k_1 \geq 0$  et  $\Omega_+(\underline{k}) = \Omega_i(k) - V k$  pour  $k_1 \leq 0$ . On en déduit  $V = c_{\varphi i}(k)$  pour  $\underline{k} = k_1 \underline{e}_x$ , ce qui s'écrit  $V/\sqrt{g/k_c} = F_\varphi(k/k_c)$ . Pour  $V/\sqrt{g/k_c} = 1.6$ , le graphe de la figure 9.4 indique que les deux solutions sont  $k_a = 0.5 k_c$  et  $k_b = 2.0 k_c$ . Comme  $c_{g i}(k) < c_{\varphi i}$  pour  $k < k_c$  et  $c_{g i}(k) > c_{\varphi i}$  pour  $k > k_c$ , on a  $c_{g i}(k_a) < V$  et  $c_{g i}(k_b) > V$ . En examinant le signe de la vitesse de groupe  $\underline{c}_g(\underline{k}) = [-c_{g i}(k) + V] \underline{e}_x$ , on voit que les ondes longues de longueur d'onde  $L_a = 2\pi/k_a = 3.3 \text{ cm}$  sont émises vers la droite (à l'aval de l'obstacle) tandis que les ondes courtes, capillaires, de longueur d'onde  $L_b = 2\pi/k_b = 8 \text{ mm}$  sont émises vers la gauche (à l'amont de l'obstacle).

[1,5 point]

**TROISIÈME PARTIE : Réfraction de la houle par un courant (8 points)**

**15)** Au large, la vitesse  $A(x)$  est nulle et la profondeur infinie. La relation de dispersion s'écrit donc  $\omega = \sqrt{g k_l}$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et  $k_l = \frac{2\pi}{L_l}$ . On a donc  $L_l = \frac{g T^2}{2\pi} = 160$  m. La vitesse de groupe est  $c_{gl} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_l}} = \frac{g}{2\omega} = \frac{g T}{4\pi} = 8$  m/s.

[1 point]

**16)** La pulsation étant conservée le long des rayons, on peut écrire  $\omega = \sqrt{g k(x) \operatorname{th}[k(x) h_f(x)]}$  où  $k(x) \underline{e}_x$  est le vecteur d'onde local. On a donc  $h_f = \frac{1}{k} \operatorname{argth}\left(\frac{\omega^2}{g k}\right)$ . En définissant  $L(x) = \frac{2\pi}{k(x)}$ , on peut écrire  $h_f = \frac{L}{2\pi} \operatorname{argth}\left(\frac{2\pi L}{g T^2}\right)$ . La lecture du graphe de la figure 9.6, pour  $q = 0$ , permet de déterminer que  $L_0 = 43$  m pour  $h_f = h_0 = 2$  m.

[1 point]

**17)** Comme  $L_0/h_0 = 22 > 20$ , on peut considérer que la rivière est peu profonde. La conservation de l'énergie le long des rayons entraîne que  $c_{gl} H_l^2 = c_0 H_0^2$  où  $H_0$  est la hauteur de la houle pour  $x \geq 0$  et  $c_0 = \sqrt{g h_0} = 4.5$  m/s. On a donc  $H_0 = H_l \sqrt{\frac{c_{gl}}{c_0}} = 1$  m. Comme  $H_0/h_0 = 0.53 < 0.78$ , la houle ne déferle pas.

[1 point]

**18)** La puissance est  $P_0 = \frac{1}{8} \rho g H_l^2 c_{gl} L_y = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 c_0 L_y = 63$  kW.

[1 point]

**19)** Seules les ondes répondant à la relation de dispersion  $\Omega_+(k, x)$  ont une vitesse de groupe positive qui leur permet de se rapprocher de la côte. Cette vitesse de groupe est  $\underline{c}_g(k, x) = \underline{c}_{gi}(k, x) \underline{e}_x - A(x) \underline{e}_x$ .

[0,5 point]

**20)** Comme  $\omega$  est invariant le long des rayons, on doit avoir

$$\omega = \Omega_-(k, x) = \sqrt{g k(x) \operatorname{th}[k(x) h_f(x)]} - A(x) k(x). \quad (8)$$

Comme  $A(x) = q/h_f(x)$ ,  $L(x) = 2\pi/k(x)$  et  $\omega = 2\pi/T$ , on en déduit

$$h_f(x) = \frac{L(x)}{2\pi} \operatorname{argth} \left\{ \frac{2\pi L(x)}{g T^2} \left[ 1 + \frac{q T}{L(x) h_f(x)} \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

Le graphe de la figure 9.6 permet de déterminer que  $L_4 = 22$  m lorsque  $h_f(0) = h_0 = 2$  m.

[1 point]

**21)** La propagation de l'énergie le long d'un rayon est décrite par l'équation  $\dot{x} = c_g[k(x), x] - c_{gi}[k(x), x] - A(x)$ . Cette trajectoire de rayon est stoppée lorsque  $c_g[k(x_c), x_c] = 0$ . Cette situation correspond au minimum de la courbe  $h(L)$  de la figure 9.6 pour  $q = 6$  m<sup>2</sup>/s (on peut, par exemple, invoquer le théorème des fonctions implicites). La lecture de ce graphe conduit  $L_c = 11$  m et  $h_c = 2.1$  m. Cette profondeur  $h_c = h_f(x_c) = h_0 - \beta x_c$  correspond au point  $x_c = -(h_c - h_0)/\beta = -10$  m.

[1 point]

**22)** En notant  $k_c = k(x_c) = 2\pi/L_c$ , on peut écrire  $c_g[k - c, x_c] = 0$ , ce qui entraîne  $c_{gi}[k_c, x_c] = A(x_c) = q/h_c = 3$  m/s. Comme  $\omega = \Omega_i(k_c, x_c) - A(x_c)k_c$ , on a  $c_{\varphi i}(k_c, x_c) = \omega/k_c + A(x_c) = L_c/T + q/h_c = 4$  m/s. La vitesse de phase des crêtes du paquet d'onde est plus grande que sa vitesse de groupe, ce qui est normal pour les ondes de surface. Alors que l'enveloppe du paquet d'ondes est immobile en  $x = x_c$ , les crêtes du paquet d'ondes dépassent ce point mais deviennent évanescentes pour  $x \geq x_c$ .

[1,5 point]