

# Chapitre 9

## Seiches et marées

*O. Thual, 26 juin 2010*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Phénomènes de réflexion et de diffraction . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1	Réflexion des ondes de surface . . . . .	3
1.2	Diffraction des ondes de surface . . . . .	5
1.3	Cas des profondeurs quelconques . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modélisation de la marée . . . . .</b>	<b>7</b>
2.1	Système binaire d'astres en interaction . . . . .	8
2.2	Potentiel total de marée . . . . .	9
2.3	Modélisation de la marée dynamique . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ondes d'inertie . . . . .</b>	<b>14</b>
3.1	Ondes de Poincaré . . . . .	14
3.2	Ondes de Proudman . . . . .	16
3.3	Amphidromie de Kelvin . . . . .	18

---

## Introduction

Les phénomènes de réflexion et de diffraction, qui interviennent aussi bien dans la propagation des ondes de marées que de celle de la houle dans un port, sont présentés à l'aide du modèle des équations de Saint-Venant linéaires sans rotation. Le phénomène de seiche dans un lac ou une mer fermée est illustré sur l'exemple simple d'une géométrie rectangulaire. La diffraction d'une onde de surface par une jetée est présentée dans le cas d'une incidence normale. Les phénomènes de diffraction et de réflexion se combinent pour expliquer la réponse d'un port à une houle incidente.

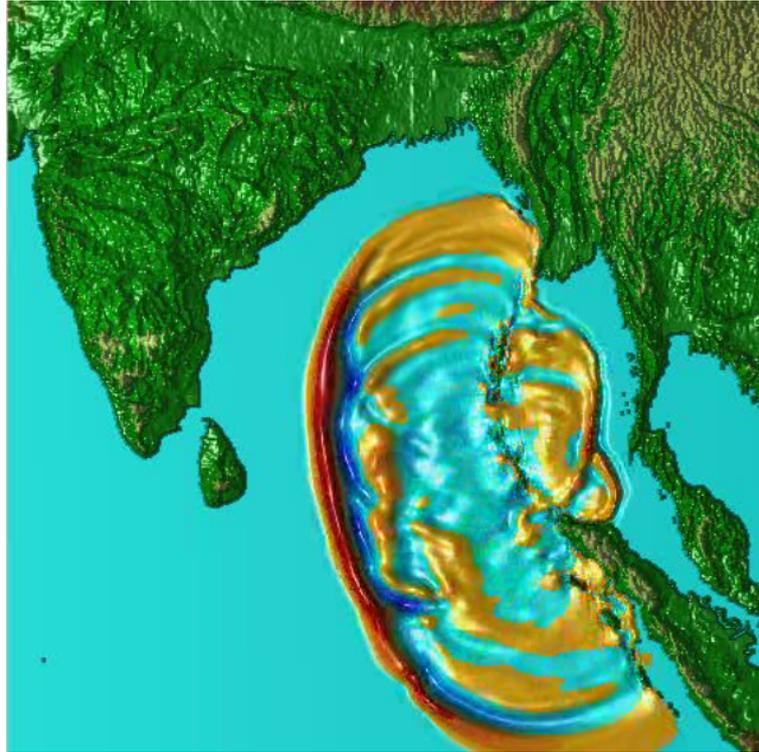


FIG. 9.1 – Simulation du tsunami de 2004 dans l'Océan Indien et phénomènes de diffraction, réflexion et réfraction des ondes de surface. Par P. Watts et al.

La compréhension du phénomène de la marée débute par le calcul du potentiel induit par un astre en interaction gravitationnelle avec la Terre, qu'il s'agisse de la Lune ou du Soleil. La compétition entre la force centrifuge, induite par

le mouvement de rotation solide de la Terre, et la force d'attraction de l'astre, permet d'expliquer la déformation de l'océan en un bourrelet allongé. Les mouvements de la Lune, de la Terre et du Soleil induisent une décomposition du potentiel de marée en une série d'oscillations de fréquences discrètes.

La vision statique de la marée fournie par l'expression des oscillations du potentiel de marée est ensuite complétée par une approche dynamique basée sur les équations de Saint-Venant linéaires forcées. Dans le cas d'une aquaplanète (absence de continents), il est utile de comparer les fréquences du forçage avec les fréquences propres d'oscillation de la lame d'eau en rotation et de mettre en évidence une résonance semi-diurne pour la marée terrestre. En présence de continents, la marée peut être vue comme la superposition de l'onde forcée et d'un système d'ondes libres émises à la frontière des océans.

L'étude des ondes libres de la marée est abordée dans le cas simplifié où la profondeur de l'océan et le paramètre de Coriolis sont constants. Les relations de dispersion des ondes de Poincaré, de Proudman et de Kelvin de bord sont explicitées et les champs oscillants associés sont calculés. Le problème de l'amphidromie de Kelvin, décrivant l'interaction de deux ondes de Kelvin se propageant en sens contraires, permet de comprendre les traits essentiels du champ de marée global.

## 1 Phénomènes de réflexion et de diffraction

Les phénomènes de réflexion et diffraction des ondes de surface sont présentés sur le modèle simple des équations de Saint-Venant 2D, linéaires, sans rotation et à profondeur  $h_r$  constante. Cette dernière hypothèse exclut le phénomène de réfraction qui, dans un problème réaliste, vient se combiner aux deux précédents. La réponse d'un port de profondeur quelconque, mais constante, à une houle incidente est présentée par l'intermédiaire de la résolution de l'équation d'Helmoltz.

### 1.1 Réflexion des ondes de surface

Les équations de Saint-Venant 2D linéaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (9.1)$$

dont on déduit

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2 \Delta \eta = 0 \quad \text{avec} \quad c_r = \sqrt{g h_r}, \quad (9.2)$$

décrivent la dynamique d'une couche d'eau dont la profondeur constante  $h_r$  est petite devant l'extension horizontale des ondes que l'on étudie. Les composantes du champ de vitesse sont  $u$  et  $v$  tandis que  $\eta$  désigne l'élévation de la surface libre, supposée petite devant  $h_r$ .

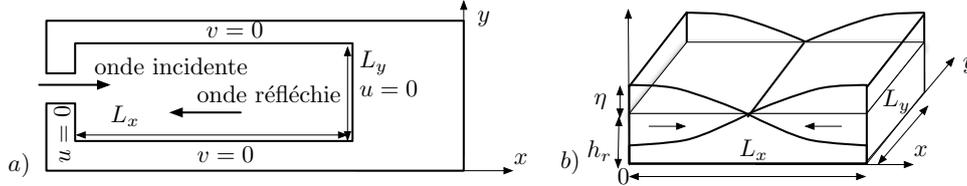


FIG. 9.2 – a) Domaine de piégeage d'une onde de surface. b) Onde stationnaire appelée seiche.

Pour illustrer le phénomène de réflexion des ondes de surface dans un domaine fermé ou presque fermé, on considère un domaine rectangulaire (figure 9.2a), de côtés  $L_x$  et  $L_y$ , dans lequel la source d'énergie ondulatoire peut-être due à l'entrée d'une onde incidente, au forçage par le potentiel de marée ou encore à une tension de vent à la surface.

Des conditions aux limites parfaitement absorbantes seraient obtenues en imposant  $\eta = 0$  sur les frontières. Nous considérons ici des conditions aux limites parfaitement réfléchissantes obtenues en imposant la nullité des vitesses normales aux parois, ce qui entraîne la nullité de la dérivée normale  $\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ . Pour la géométrie considérée ici, ces conditions s'écrivent  $u = 0$  ou  $v = 0$ , selon l'orientation de la frontière.

En l'absence de rotation, ce problème revient à calculer les modes résonnants du domaine rectangulaire ce qui conduit à la famille de solutions

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k c_r t), \\ u &= \eta_0 \frac{g k_x}{c_r k} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k c_r t), \\ v &= \eta_0 \frac{g k_y}{c_r k} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k c_r t), \end{aligned} \quad (9.3)$$

où  $\eta_0$  est une amplitude réelle,  $(k_x, k_y) = \pi (n_1/L_x, n_2/L_y)$ ,  $n_1$  et  $n_2$  des entiers et  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Le mode  $(n_1, n_2) = (1, 0)$  correspond à la superposition de deux ondes de surface  $\eta_R = \frac{1}{2}\eta_0 \cos[k(x - c_r t)]$  et  $\eta_L = \frac{1}{2}\eta_0 \cos[k(x + c_r t)]$  de même amplitude avec  $k = \pi/L_x$  et se propageant en sens contraires (figure 9.2b). Une réflexion sans dissipation sur les parois de normale  $\underline{e}_x$  permet d'obtenir l'égalité de ces amplitudes.

Lorsque la fréquence du forçage est proche de l'une des fréquences propres d'oscillation du bassin, on est en présence d'un phénomène de résonance. Le bassin oscille alors à la fréquence du forçage avec une amplitude importante. Les modes de basse fréquence étant, dans la nature, moins dissipés que les autres, on les observe dans de nombreux lacs ou mers intérieures. On parle alors de phénomène de "seiche".

## 1.2 Diffraction des ondes de surface

Comme les équations de Saint-Venant (9.1) sont linéaires à coefficients réels, on peut chercher une solution complexe de la forme

$$\eta(x, y, t) = F(x, y) e^{-i\omega t}, \quad (9.4)$$

où  $\omega$  est une pulsation particulière. En reportant dans les équations, la fonction  $F$  doit vérifier l'équation d'Helmoltz

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = k c_r. \quad (9.5)$$

Pour introduire maintenant le phénomène de diffraction, on considère une onde incidente  $\eta_i(x, y, t) = \eta_m \cos(ky - \omega t)$ , avec  $\omega = k c_r$ , qui arrive sur une jetée d'équation  $y = 0$  pour  $x \geq 0$  (figure 9.3). Si la jetée est parfaitement réfléchissante, les conditions aux limites s'écrivent  $v = 0$ , ce qui entraîne  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ . En prenant le bout de la jetée comme origine des axes, une solution analytique est donnée par l'expression

$$F(x, y) = \eta_m \frac{1+i}{2} \left\{ S \left[ \frac{2k}{\pi}(r+y) \right] e^{iky} + S \left[ \frac{2k}{\pi}(r-y) \right] e^{-iky} \right\}, \quad (9.6)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $S(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du$ . Cette solution était utilisée localement au voisinage de la jetée pour des applications pratiques avant l'avènement des ordinateurs. La figure 9.3 décrit la hauteur instantanée  $\eta(x, y, t)$  correspondante ainsi qu'une schématisation en terme de plans de phase et de rayons.

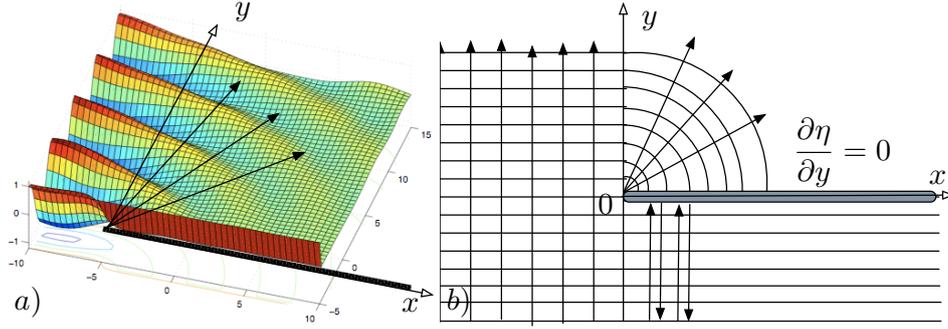


FIG. 9.3 – Onde incidente réfractée par une jetée. a) Champ de hauteur  $\eta(x, y, t)$  à un temps donné. b) Schématisation des plans de phase et des rayons.

### 1.3 Cas des profondeurs quelconques

On cherche à montrer ici que la résolution de l'équation d'Helmholtz, introduite dans le cas des ondes de surface en milieu peu profond (équations de Saint-Venant linéaires) permet de traiter aussi le cas de la houle dans un milieu de profondeur quelconque. Les petites oscillations d'une couche fluide à surface libre et de profondeur  $h_r$  constante autour de sa position de repos sont régies par les équations d'Euler linéaires, incompressibles et irrotationnelles qui s'écrivent ici

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = 0, \\
 \Delta \phi &= 0 & \text{pour } -h_r \leq z \leq 0, \\
 \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = -h_r,
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

où  $g$  est la gravité et  $\phi(x, y, z, t)$  le potentiel du champ de vitesse  $\underline{U}(x, y, z, t)$  défini par  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ . L'élévation de la surface libre se déduit de  $\phi$  par la relation  $\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t)$ .

Comme la profondeur est constante, le domaine occupé par le fluide est déterminé par le domaine surfacique  $\Omega$  d'une section horizontale. Sur la frontière  $\partial\Omega$  de normale  $\underline{n}$ , la condition aux limites  $\partial\eta/\partial n = 0$  traduit le fait que la vitesse normale à la paroi  $\underline{U} \cdot \underline{n}$  est nulle. Cette condition aux limites est obtenue avec un mur vertical parfaitement réfléchissant. La condition aux limites  $\eta = 0$  correspond à une frontière parfaitement absorbante. On l'obtient,

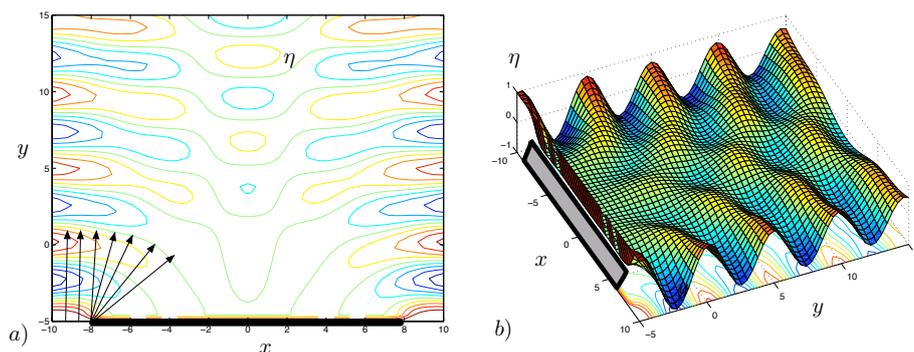


FIG. 9.4 – Figure de diffraction de la houle derrière un mur. a) Iso-contours de  $\eta$ . b) Déformation de la surface libre.

en pratique, par des enrochements dans lesquels les ondes de surface vont se dissiper.

Le problème avec ses conditions aux limites étant posé, on cherche des solutions de la forme

$$\{\eta(x, y, t), \phi(x, y, z, t)\} = \left\{ 1, \frac{g}{i\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \right\} F(x, y) e^{-i\omega t}. \quad (9.8)$$

En reportant dans les équations, on obtient

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = g k \tanh(k h_r). \quad (9.9)$$

On se ramène donc bien à la résolution d'une équation d'Helmoltz. Dans la limite  $k h_r \rightarrow 0$ , on retrouve le problème des eaux peu profondes avec  $k = \omega/c_r$  et  $c_r = \sqrt{g h_r}$ .

On peut alors résoudre numériquement ce problème aux conditions aux limites pour étudier, par exemple, la figure de diffraction d'une houle incidente perpendiculaire à un mur de longueur finie (figure 9.4).

## 2 Modélisation de la marée

La modélisation de la marée terrestre nécessite le calcul du potentiel des forces de marées induites par l'interaction gravitationnelle avec la Lune et le Soleil.

On s'intéresse ici à la réponse de l'océan à ce potentiel de marée. Cette réponse est environ deux fois plus forte, en moyenne, que celle de la Terre solide.

## 2.1 Système binaire d'astres en interaction

On considère la Terre, de centre  $\underline{x}_T$  et de masse  $M_T$  en interaction gravitationnelle avec un astre de centre  $\underline{x}_A$  et de masse  $M_A$ . On suppose que ces deux astres parcourent chacun un cercle autour de leur centre de gravité  $\underline{0}$  défini par  $M_T \underline{x}_T + M_A \underline{x}_A = \underline{0}$ . C'est approximativement le cas pour le système binaire formé par la Lune, avec  $M_L/M_T = 0.012$ , ou le Soleil, avec  $M_S/M_T = 329390$ .

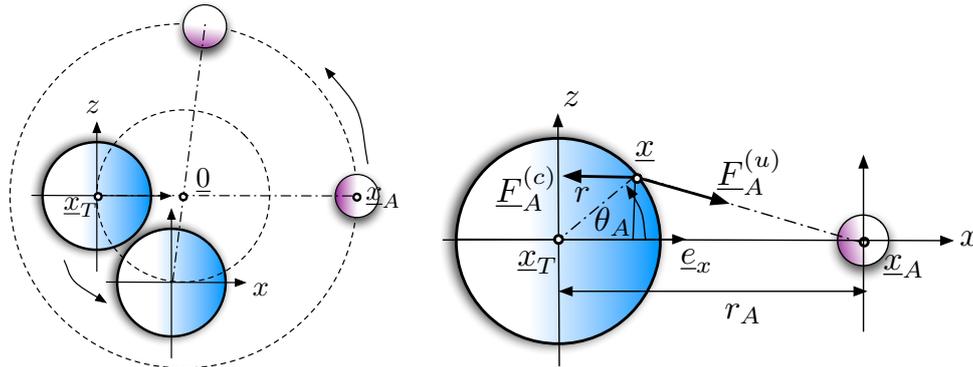


FIG. 9.5 – Rotation de la Terre de centre  $\underline{x}_T$  et d'un astre de centre  $\underline{x}_A$  autour du centre de gravité  $\underline{0}$  du système.

En faisant abstraction de sa rotation autour de son axe, d'ailleurs prise en compte dans la définition de la gravité  $g$ , on considère que la Terre est en rotation solide autour du centre de gravité du système binaire, c'est-à-dire que ses axes pointent toujours dans la même direction (figure 9.5). Ce n'est pas le cas de la Lune, par exemple, dont une des faces est constamment tournée vers la Terre.

Comme la Terre est animée d'un mouvement de rotation solide, chacun de ses points est soumis à une force massique constante  $\underline{F}_A^{(c)} = -F_A^{(c)} \underline{e}_x$  (force centripète) où  $\underline{e}_x$  est le vecteur unitaire défini par  $\underline{x}_A - \underline{x}_T = r_A \underline{e}_x$ . De plus, l'attraction de l'astre  $A$  exerce une force massique  $\underline{F}_A^{(u)}(\underline{x}) = GM_A \frac{\underline{x}_A - \underline{x}}{\|\underline{x}_A - \underline{x}\|^3}$  où  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  est la constante universelle de gravitation.

En utilisant les équations du mouvement au centre de la masse de la Terre, on obtient

$$\underline{F}_A^{(u)}(\underline{x}_T) = \underline{F}_A^{(c)} = -F_A^{(c)} \underline{e}_x \quad \text{avec} \quad F_A^{(c)} = GM_A/r_A^2. \quad (9.10)$$

Les deux forces  $\underline{F}_A^{(c)}$  et  $\underline{F}_A^{(u)}(\underline{x})$  dépendent d'un potentiel, ce qui permet d'écrire  $\underline{F}_A^{(c)} + \underline{F}_A^{(u)}(\underline{x}) = -\text{grad } V_A(\underline{x})$  où le potentiel de marée  $V_A$ , induit par l'astre  $A$ , est

$$V_A(\underline{x}) = GM_A \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{\|\underline{x}_A - \underline{x}\|} + \frac{(\underline{x} - \underline{x}_T) \cdot \underline{e}_x}{r_A^2} \right], \quad (9.11)$$

la constante d'intégration  $1/r_A$  étant choisie de façon à ce que ce potentiel s'annule au centre de la Terre. Pour tout point  $\underline{x}$ , on note  $r = \|\underline{x} - \underline{x}_T\|$  sa distance au centre de la Terre et  $\theta_A$  l'angle  $(\underline{x}_A - \underline{x}_T, \underline{x} - \underline{x}_T)$  que l'on appelle "distance zénithale de l'astre  $A$ ". Le potentiel des marées  $V_A$  est alors

$$V_A(r, \theta_A) = GM_A \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r r_A \cos \theta_A + r_A^2}} + \frac{r}{r_A^2} \cos \theta_A \right). \quad (9.12)$$

Comme le rayon de la Terre est petit devant  $r_A$ , le rapport  $r/r_A$  est un petit paramètre pour tout point  $\underline{x}$  proche de la Terre. Dans ce cas, un développement limité permet de simplifier l'expression du potentiel  $V_A$  qui s'écrit alors

$$V_A(r, \theta_A) = \frac{3Gr^2 M_A}{2r_A^3} \left( \cos^2 \theta_A - \frac{1}{3} \right) + O\left(\frac{r^3}{r_A^3}\right). \quad (9.13)$$

## 2.2 Potentiel total de marée

En réponse au potentiel de marée de l'astre  $A$ , un océan de vitesse nulle (marée statique) et de pression  $p(\underline{x})$  vérifierait les équations

$$\underline{0} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \underline{F}_A^{(c)} + \underline{F}_A^{(u)} + \underline{F}_T^{(u)}. \quad (9.14)$$

Cette équation met en évidence l'équilibre entre quatre forces. Dans la mesure où la profondeur de l'océan est petite devant le rayon de la Terre, la force de gravité  $\underline{F}_T^{(u)}(\underline{x}) = -\text{grad } V_T^{(u)}(\underline{x})$  dépend d'un potentiel que l'on peut approximer par  $V_T^{(u)}(\underline{x}) = gr$  (à une constante près). En notant  $C$  une constante arbitraire, les surfaces iso-pression sont alors définies par l'équation

$$\frac{p}{\rho} + V_A + V_T^{(u)} = \frac{p}{\rho} + \frac{3Gr^2 M_A}{2r_A^3} \left( \cos^2 \theta_A - \frac{1}{3} \right) + gr = C. \quad (9.15)$$

En supposant la pression atmosphérique constante, la surface isobare correspondante représenterait la surface de l'océan. Cette vision statique n'est qu'une première approximation de la marée réelle que nous étudierons plus loin. Elle permet cependant de comprendre les grandes lignes du phénomène.

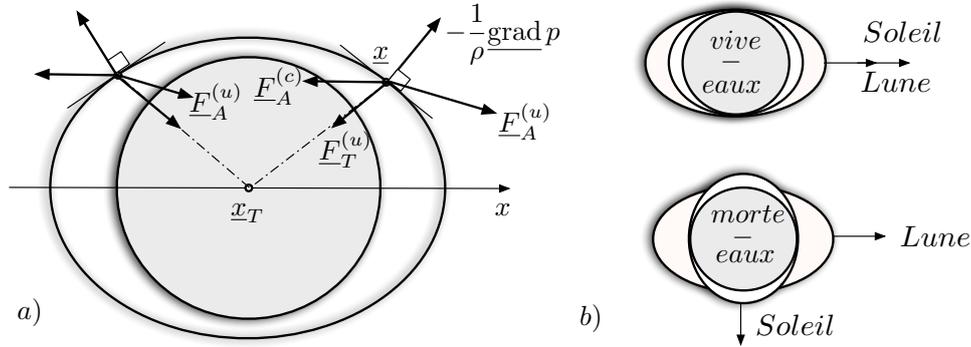


FIG. 9.6 – a) Surface iso-pression de l'océan en présence d'un astre  $A$ . b) Configurations de vives-eaux et de mortes-eaux.

En considérant maintenant l'action conjointe de la Lune et du Soleil, chaque point  $\underline{x}$  sur la Terre est donc soumis à la force de marée  $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}_L^{(c)} + \underline{F}_L^{(u)}(\underline{x}) + \underline{F}_S^{(c)} + \underline{F}_S^{(u)}(\underline{x})$ . Un point  $\underline{x}$  situé sur cette surface est donc soumis à une force massique de marée

$$\underline{F}(\underline{x}) = -\text{grad } V(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad V(\underline{x}) = V_L(r, \theta_L) + V_S(r, \theta_S), \quad (9.16)$$

où  $\theta_L$  et  $\theta_S$  sont, respectivement, les distances zénithales de la Lune et du Soleil.

En présence de la Lune et du Soleil, les bourrelets induits par chacun des astres peuvent se superposer (vives-eaux) ou au contraire être en opposition (mortes-eaux) comme indiqué sur la figure 9.6b.

Comme les distances zénithales  $\theta_L(t)$  et  $\theta_S(t)$  de la Lune et du Soleil en un point donné  $\underline{x}$  varient avec le temps, on peut décomposer le potentiel total  $V$  en séries de Fourier

$$V(\underline{x}, t) = \sum_n A_n(\underline{x}) \cos[\omega_n t - \varphi_n(\underline{x})] \quad (9.17)$$

de périodes respectives  $T_n = 2\pi/\omega_n$ . La table 9.1 indique les principales "ondes

Onde	Dénomination	$A_n$	$T_n$
$M_2$	lunaire moyenne	0,4543	12,420 h
$S_2$	solaire moyenne	0,2120	12,000 h
$N_2$	elliptique majeure lunaire	0,0880	12,658 h
$K_1$	déclinationnelle	0,2655	23,934 h
$O_1$	lunaire principale	0,1826	25,819 h
$P_1$	solaire principale	0,0880	24,065 h
$M_b$	bi-mensuelle	0,0783	18,77 j
$M_m$	mensuelle	0,0414	27,55 j

TAB. 9.1 – Quelques composantes du potentiel de marée de périodes  $T_n$ . Amplitudes  $A_n$  typiques en unités arbitraires.

de marées” en indiquant leur période  $T_n$  et des valeurs représentatives des amplitudes  $A_n$ .

L’océan va répondre de manière complexe à ce forçage multi-périodique et l’on observe, en un point  $\underline{x}$  donné, une décomposition du signal  $\eta(\underline{x}, t)$  de la marée (élévation de la surface libre) qui exhibe les mêmes périodes  $T_n$  que le forçage avec des amplitudes  $\eta_n(\underline{x})$  qui dépendent de l’espace :

$$\eta(\underline{x}, t) = \sum_n \eta_n(\underline{x}) \cos[\omega_n t - \varphi_n(\underline{x})]. \quad (9.18)$$

En enregistrant le signal en un point  $\underline{x}$  sur de longues périodes (plusieurs années) on peut alors identifier les amplitudes  $\eta_n(\underline{x})$ . Cette méthode permet de prévoir la marée de manière très précise.

### 2.3 Modélisation de la marée dynamique

L’océan va répondre au forçage gravitationnel en amplifiant certaines ondes par le jeu des réflexions sur les continents, de la réfraction sur les plateaux continentaux ou encore de la diffraction autour du contour des côtes. Un modèle simple pouvant être utilisé pour étudier la marée dynamique repose sur les équations de Saint-Venant linéaires sur la sphère qui s’écrivent

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + f \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad}(g\eta + V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}(h_f \underline{U}) = 0, \quad (9.19)$$

où  $\underline{U}(\lambda, \phi, t)$  est la vitesse horizontale sur la sphère,  $(\lambda, \phi)$  le couple de coordonnées (longitude, latitude),  $\underline{e}_z(\lambda, \phi)$  le vecteur unitaire vertical en  $\underline{x}$ ,

$f(\phi) = 2\Omega \sin \phi$  le double de la projection du vecteur rotation de la Terre sur la verticale du lieu,  $\eta(\lambda, \phi, t)$  l'élévation de la surface libre et  $h_f(\lambda, \phi)$  la profondeur de l'océan (figure 9.7). Les termes non linéaires ont été négligés en supposant que  $\eta$  et  $\underline{U}$  sont de petites perturbations. Le frottement sur le fond et la dissipation turbulente ne sont pas considérés dans ce modèle.

Comme la profondeur de l'océan est petite devant le rayon de la Terre  $a$ , on suppose que le potentiel des marées  $V(\lambda, \phi, t)$ , dans le repère tournant lié à la Terre, ne dépend que des angles  $\lambda$  et  $\phi$  (en posant  $r = a$ ) ainsi que du temps. En notant  $\underline{U}(\lambda, \phi, t) = u \underline{e}_\lambda + v \underline{e}_\phi$  les composantes de la vitesse, ces équations s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f(\phi) v &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g \eta + V) , \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f(\phi) u &= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} (g \eta + V) , \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (h_f u) + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (h_f v \cos \phi) &= 0 . \end{aligned} \quad (9.20)$$

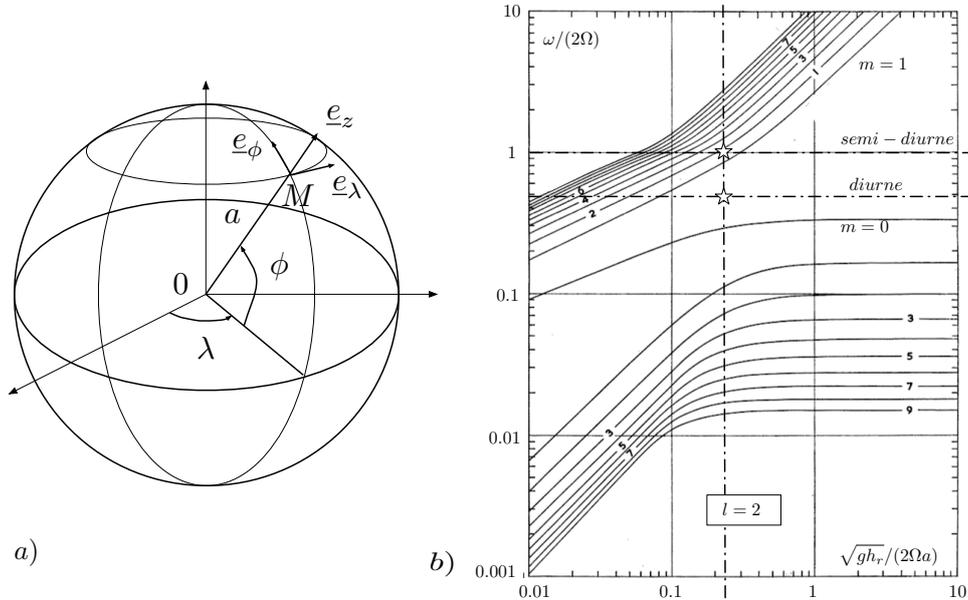


FIG. 9.7 – a) Coordonnées sphériques. b) Pulsations propres  $\omega(l, m)$  pour  $l = 2$ . Courbes de Longuet-Higgins (1968).

On exprime alors le potentiel de marée sous la forme

$$V(\lambda, \phi, t) = \sum_n \sum_l \widehat{V}_{l,n}(\phi) e^{i(\lambda l - \omega_n t)}. \quad (9.21)$$

où  $\widehat{V}_{l,n}(\phi)$  sont des amplitudes complexes et  $l$  et  $n$  des entiers. Nous considérons désormais que le cas idéalisé d'une "aquaplanète" de rayon  $a$ , sans continent et avec un océan de profondeur constante  $h_f = h_r$ . Le problème est linéaire à coefficients constants. On peut alors traiter séparément les forçages  $\widehat{V}_{l,n} \exp[i(\lambda l - \omega_n t)]$  et chercher, pour chacun d'entre eux, des solutions complexes de la forme

$$(u, v, \eta) = [\widehat{u}(\phi), \widehat{v}(\phi), \widehat{\eta}(\phi)] e^{i(\lambda l - \omega_n t)}. \quad (9.22)$$

Pour chaque couple  $(l, n) \in \mathbb{N}_+^2$ , on doit résoudre, après élimination de  $\widehat{u}$  et  $\widehat{v}$ , des équations de la forme

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(l, \omega_n) [g \widehat{\eta}(\phi) + \widehat{V}_{l,n}(\phi)] = 0 \\ \text{avec } \mathcal{L}(l, \omega) &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ L_1(\phi) + L_2(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] + \left[ L_3(\phi) - L_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (9.23)$$

où  $L_1 = \frac{2\Omega f(\phi)l}{\omega^2 - f^2(\phi)}$ ,  $L_2 = \frac{2\omega\Omega \cos \phi}{\omega^2 - f^2(\phi)}$  et  $L_3 = \frac{2\omega\Omega l^2}{[\omega^2 - f^2(\phi)] \cos \phi} - \frac{2a^2\omega\Omega \cos \phi}{gh_r}$ .

Pour un  $l \in \mathbb{N}$  donné, on montre que le noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}(l, \omega)$  est non trivial pour un spectre discret  $\omega(l, m)$  avec  $m \in \mathbb{N}^+$ . Les modes associés  $\widehat{\eta}(l, m; \phi)$  sont les modes propres associés aux pulsations propres  $\omega(l, m)$ . Si certaines pulsations  $\omega_n$  du forçage  $V$  sont proches de certaines pulsations propres  $\omega(l, m)$  du modèle des équations de Saint-Venant sur l'aquaplanète, le système est proche de la résonance et l'amplitude de la réponse de l'océan au forçage de la marée devient importante. La figure 9.7b compare les fréquences propres  $\omega(l, m)$  du système pour  $l = 2$  dans le cas d'un océan de profondeur  $h_r = 4\,000$  m avec celles des marées diurnes et semi-diurnes obtenues pour les valeurs  $\Omega$  et  $a$  associées à la Terre. On voit que les ondes de marées semi-diurnes sont proches de la résonance.

Pour prendre en compte les continents, on peut rajouter les conditions aux limites  $\underline{U} \cdot \underline{n}$  sur les frontières du domaine,  $\underline{n}$  étant la normale aux côtes. Une méthode de résolution consiste à calculer la solution  $\eta_{aqua}$  de l'aquaplanète puis de chercher la solution  $\eta_{libre}$  du problème obtenu en posant  $V = 0$  et en considérant les conditions aux limites  $\underline{U}_{libre} \cdot \underline{n} = -\underline{U}_{aqua} \cdot \underline{n}$  où  $\underline{n}$  est la normale aux frontières. Le champ  $\eta = \eta_{aqua} + \eta_{libre}$  est alors solution du problème forcé

par le potentiel de marée  $V$  avec les conditions aux limites homogènes. On peut donc voir la marée comme la superposition de l'onde forcée par le potentiel de marées et d'ondes libres émises par les frontières des continents pour satisfaire les conditions aux limites. Ces ondes vont donc être réfléchies, réfractées ou diffractées par les côtes et la variation du fond.

### 3 Ondes d'inertie

Pour simplifier l'étude des ondes de surface en milieu peu profond et en présence de rotation, telles les ondes de marées, on suppose ici que le paramètre de Coriolis  $f = 2\Omega \sin \phi$  est constant et que la géométrie est cartésienne.

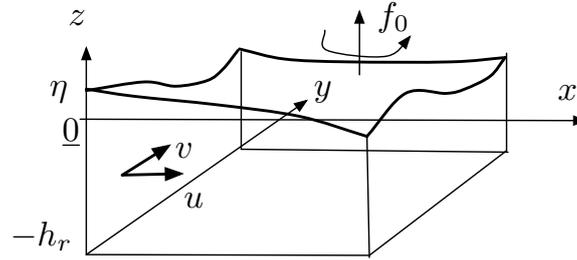


FIG. 9.8 – Géométrie d'une couche d'eau en rotation avec  $h_r$  et  $f_0$  constants.

#### 3.1 Ondes de Poincaré

Les équations de Saint-Venant linéaires avec  $f = f_0$  et  $h_f = h_r$  constants s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Les “**Ondes de Poincaré**” constituent une première famille de solutions de la forme

$$(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) e^{i k_x x + i k_y y - i \omega t}. \quad (9.25)$$

En reportant dans les équations, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f_0 & g i k_x \\ f_0 & -i\omega & g i k_y \\ h_r i k_x & h_r i k_y & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = 0. \quad (9.26)$$

La relation de dispersion de ces ondes est obtenue en annulant le déterminant de ce système linéaire, ce qui s'écrit  $i\omega[\omega^2 - f_0^2 - c_r^2(k_x^2 + k_y^2)] = 0$  avec  $c_r = \sqrt{g h_r}$  (on peut simplifier les calculs en tournant les axes de manière à obtenir  $k_y = 0$ ). La racine  $\omega = 0$  correspond aux équilibres géostrophiques définis par  $f_0 \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -g \underline{\text{grad}} \eta$  avec  $\underline{U} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$ . Les autres racines décrivent la relation de dispersion des “ondes de Poincaré” que l'on peut écrire

$$\omega^2 = f_0^2 + c_r^2(k_x^2 + k_y^2). \quad (9.27)$$

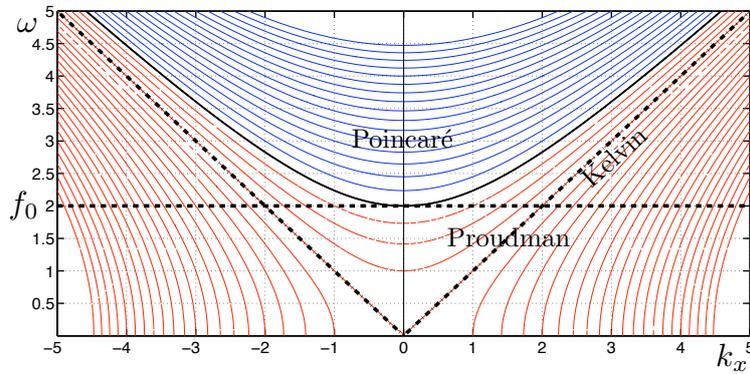


FIG. 9.9 – Relation de dispersion des ondes d'inertie. Ondes de Poincaré :  $\omega^2 = f_0^2 + c_r^2(k_x^2 + k_y^2)$ . Ondes de Proudman :  $\omega^2 = f_0^2 + c_r^2(k_x^2 - \alpha_y^2)$ . Ondes de Kelvin de bord :  $\omega^2 = c_r^2(k_x^2 + k_y^2)$ .

En se ramenant, par rotation des axes, au cas où  $k_y = 0$ , les champs oscillants associés à ces ondes de Poincaré s'écrivent

$$\hat{u} = \frac{g\omega}{c_r^2 k_x} \hat{\eta} \quad \text{et} \quad \hat{v} = -i \frac{g f_0}{c_r^2 k_x} \hat{\eta}. \quad (9.28)$$

Les champs réels sont donc, outre  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$  avec  $\eta_m$  réel,

$$u = \frac{g\omega}{c_r^2 k_x} \eta_m \cos(k_x x - \omega t) \quad \text{et} \quad v = \frac{g f_0}{c_r^2 k_x} \eta_m \sin(k_x x - \omega t). \quad (9.29)$$

Comme les oscillations sont petites, les trajectoires  $[x(t), y(t)]$  vérifient approximativement les équations différentielles  $\dot{x} = u(x_0, y_0; t)$  et  $\dot{y} = v(x_0, y_0; t)$  où  $(x_0, y_0)$  est la position moyenne. Dans le cas général, les trajectoires sont donc des ellipses (voir figure 9.10a) dont le rapport entre les axes est égal à  $\omega/f_0 = \sqrt{1 + c_r^2 k^2/f_0^2}$  avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

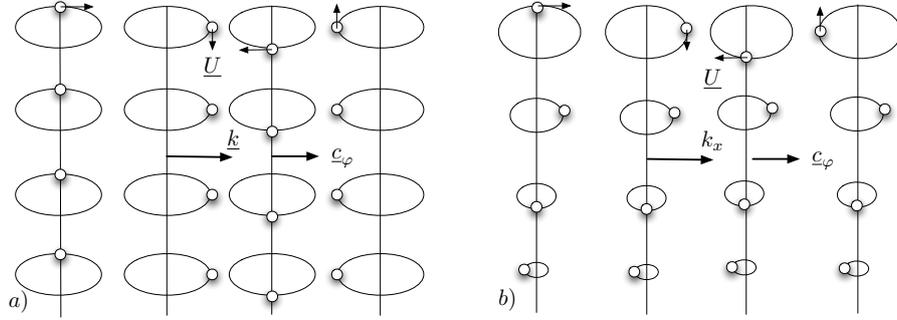


FIG. 9.10 – Trajectoire des particules. a) Ondes de Poincaré. b) Ondes de Proudman.

### 3.2 Ondes de Proudman

Les “Ondes de Proudman” sont des solutions de la forme

$$(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) e^{i k_x x + \alpha_y y - i \omega t} . \quad (9.30)$$

Ces ondes se sont pas bornées dans la direction  $y \rightarrow \infty$  (respectivement  $-\infty$ ) si  $\alpha_y > 0$  (respectivement  $< 0$ ). La relation de dispersion de ces “ondes de Proudman” s’obtient en remplaçant  $k_y$  par  $-i \alpha_y$  dans le précédent calcul de relation de dispersion et s’écrit

$$\omega^2 = f_0^2 + c_r^2 (k_x^2 - \alpha_y^2) . \quad (9.31)$$

Pour le cas particulier  $k_x^2 = \alpha_y^2$ , équivalent à  $f_0^2 = \omega^2$ , seul le cas  $k_x + \alpha_y = 0$  conduit à des amplitudes non nulles pour le système linéaire. Les champs oscillants de ces ondes particulières vérifient  $\hat{u} = g \hat{\eta} (f_0^2 - c_r^2 k_x^2)/(2 c_r^2 f_0 k_x)$  et  $\hat{v} = -i g \hat{\eta} (f_0^2 + c_r^2 k_x^2)/(2 c_r^2 f_0 k_x)$ .

Dans le cas  $k_x^2 \neq \alpha_y^2$ , équivalent à  $f_0^2 \neq \omega^2$ , les champs oscillants associés aux ondes de Proudman s'écrivent

$$\hat{u} = \frac{g}{c_r^2} \frac{\omega k_x + f_0 \alpha_y}{k_x^2 - \alpha_y^2} \hat{\eta} \quad \text{et} \quad \hat{v} = -i \frac{g}{c_r^2} \frac{\omega \alpha_y + f_0 k_x}{k_x^2 - \alpha_y^2} \hat{\eta}. \quad (9.32)$$

Les champs réels sont donc, outre  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t) e^{\alpha_y y}$  avec  $\eta_m$  réel,

$$\begin{aligned} u &= \frac{g}{c_r^2} \frac{\omega k_x + f_0 \alpha_y}{k_x^2 - \alpha_y^2} \eta_m \cos(k_x x - \omega t) e^{\alpha_y y}, \\ v &= \frac{g}{c_r^2} \frac{\omega \alpha_y + f_0 k_x}{k_x^2 - \alpha_y^2} \eta_m \sin(k_x x - \omega t) e^{\alpha_y y}. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Comme les oscillations sont petites, les trajectoires sont des ellipses (voir figure 9.10b) dont le rapport entre les axes est égal à  $(\omega k_x + f_0 \alpha_y)/(\omega \alpha_y + f_0 k_x)$ .

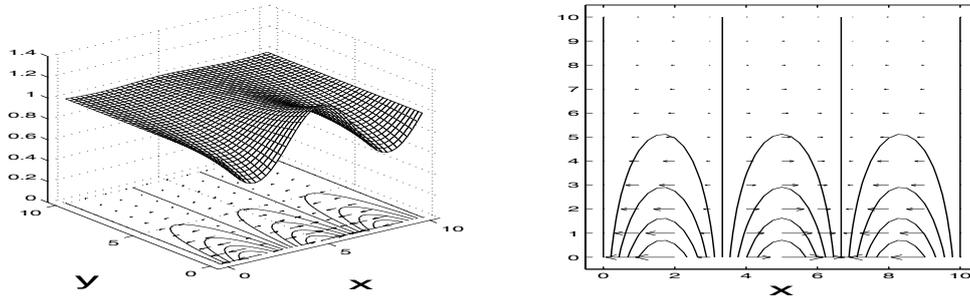


FIG. 9.11 – Onde de Kelvin de bord pour  $\omega = k_x c_r = 2.25 f_0$ . a) Champ de hauteur  $\eta$ . b) Champ de vitesse  $\underline{U}$  superposé aux isocontours du champ  $\eta$ .

Les “**Ondes de Kelvin de bord**” sont des ondes de Proudman dont le champ de vitesse  $v(x, y, t)$  est identiquement nul. Elles vérifient donc la relation  $\omega \alpha_y + f_0 k_x = 0$ , ce qui conduit, compte tenu de la relation de dispersion  $\omega^2 = f_0^2 + c_r^2(k_x^2 - \alpha_y^2)$ , à  $(\omega, \alpha_y) = \pm(f_0, -k_x)$  ou  $(\omega, \alpha_y) = \pm(k_x c_r, -f_0/c_r)$ . Le premier couple de valeurs est incompatible avec l'hypothèse  $k_x^2 \neq \alpha_y^2$ . Le deuxième couple de valeurs caractérise donc les ondes de Kelvin de bord dont les champs oscillants s'écrivent

$$(\eta, u, v) = \hat{\eta} \left( 1, \pm \frac{g}{c_r}, 0 \right) \cos[k_x(x \mp c_r t)] e^{\mp \frac{f_0}{c_r} y}. \quad (9.34)$$

Les trajectoires associées à ces ondes de Kelvin de bord sont des segments de droites dans la direction  $x$  (voir figure 9.11).

### 3.3 Amphidromie de Kelvin

On suppose toujours que l'écoulement est confiné entre deux parois d'équations  $y = 0$  et  $y = L_y$  où la condition aux limites est  $v = 0$ .

Les ondes de Kelvin de bord satisfont ces deux conditions aux limites dans la mesure où  $v = 0$  partout. On s'intéresse alors à la superposition de deux ondes de Kelvin de bord de même pulsation  $\omega_0$  et de même longueur d'onde  $L_0 = 2\pi/k_0$ , se propageant en sens contraire avec la même célérité mais d'amplitudes différentes et de signes opposés. On considère donc l'élévation de surface libre

$$\eta(x, y, t) = \hat{\eta}_L \cos(k_0 x + \omega_0 t) e^{\frac{f_0}{k_0} y} - \hat{\eta}_R \cos(k_0 x - \omega_0 t) e^{-\frac{f_0}{k_0} y}, \quad (9.35)$$

avec  $\omega_0 = k_0 c_r$ . En utilisant l'expression des champs oscillants des ondes de Kelvin de bord, le champ de vitesse associé s'écrit  $v = 0$  et

$$u(x, y, t) = -\frac{g}{c_r} \hat{\eta}_L \cos(k_0 x + \omega_0 t) e^{\frac{f_0}{k_0} y} - \frac{g}{c_r} \hat{\eta}_R \cos(k_0 x - \omega_0 t) e^{-\frac{f_0}{k_0} y}. \quad (9.36)$$

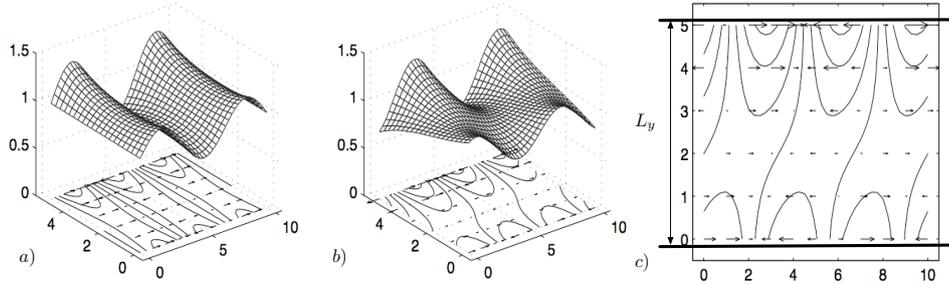


FIG. 9.12 – Superposition de deux ondes de Kelvin de bord pour  $\hat{\eta}_R/\hat{\eta}_L = 0.6$  : a) et b) hauteur  $\eta$  à deux instants distincts, c) hauteur  $\eta$  et champ de vitesse  $\underline{U}_H$ .

En effectuant le changement de variable

$$X = k_0 x, \quad T = \omega_0 t = k_0 c_r t, \quad Y = \frac{f_0}{c_r} y - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{\hat{\eta}_R}{\hat{\eta}_L} \quad \text{et} \quad \hat{\eta}_0 = \sqrt{\hat{\eta}_R \hat{\eta}_L}, \quad (9.37)$$

l'expression du champ de hauteur peut se mettre sous la forme

$$\eta = \hat{\eta}_0 \left[ \cos(X + T) e^Y - \cos(X - T) e^{-Y} \right]$$

$$= 2 \hat{\eta}_0 [\sinh(Y) \cos(X) \cos(T) - \cosh(Y) \sin(X) \sin(T)] . \quad (9.38)$$

En définissant  $B$  par  $B = \sqrt{\sinh^2(Y) \cos^2(X) + \cosh^2(Y) \sin^2(X)}$  et  $\Theta$  par les relations  $\sin(\Theta) = \sinh(Y) \cos(X)/B$  et  $\cos(\Theta) = \cosh(Y) \sin(X)/B$ , on peut écrire

$$\eta = \hat{\eta}_0 R \cos(T - \Theta) , \quad (9.39)$$

avec  $R = \sqrt{2} \sqrt{\cosh(2Y) - \cos(2X)}$  et  $\Theta$  vérifiant  $\tanh(\Theta) = \tanh(Y)/\text{tg}(X)$ .

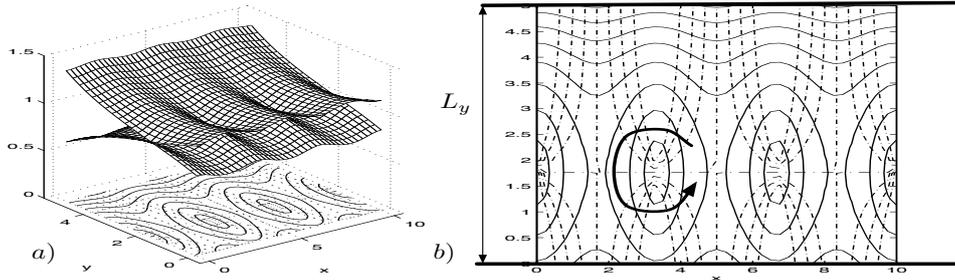


FIG. 9.13 – Superposition de deux ondes de Kelvin de bord. a) Hauteurs maximales et minimales. b) Amplitude (lignes pleines) et phase (lignes pointillées) de l'oscillation.

On veut montrer que les lignes d'égale amplitude  $R(X, Y) = cste$  sont orthogonales aux lignes d'égale phase  $\Theta(X, Y) = cste$ , appelées lignes cotidales. On veut montrer aussi que ces lignes cotidales convergent vers les points où l'amplitude est nulle, appelés points amphidromiques. Pour cela, on note  $Z = X + iY \in \mathcal{C}$  et  $W = R[\cos(\Theta) + i \sin(\Theta)] = U + iV$ . On peut alors écrire  $W = \cosh(Y) \sin(X) + i \sinh(Y) \cos(X)$  et remarquer que  $W = \cos(iY) \sin(X) + \sinh(iY) \cos(X) = \sin(X + iY) = \sin(Z)$ . L'application  $Z \rightarrow W$  est donc holomorphe. Les directions orthogonales dans le plan  $(X, Y)$  le restent donc dans le plan  $(U, V)$ , et donc dans le plan des coordonnées polaires  $(R, \Theta)$ . Les lignes cotidales sont donc perpendiculaires aux lignes d'égales amplitudes et convergent vers les points amphidromiques.

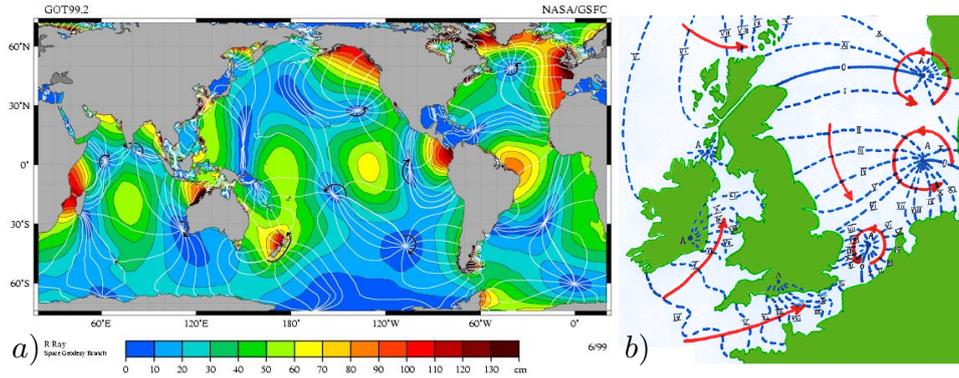


FIG. 9.14 – a) Points amphidromiques (marée nulle) et lignes cotidales (égales phases). a) Onde M2 sur le globe. Par R. Ray, NASA. b) en Manche et Mer du Nord. Par Ann Andersen, SHOM.

## FORMULAIRE

### Phénomène de seiche

Saint-Venant linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

Diffraction peu profonde :

$$\eta(x, y, t) = F(x, y) e^{-i\omega t}, \quad \Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = k c_r.$$

Diffraction en profondeur quelconque :

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = g k \tanh(k h_r).$$

## Modélisation de la marée

Potentiel de marée :

$$V_A(r, \theta_A) = \frac{3 G r^2 M_A}{2 r_A^3} \left( \cos^2 \theta_A - \frac{1}{3} \right) + O \left( \frac{r^3}{r_A^3} \right).$$

Composantes de marées :

$$\eta(\underline{x}, t) = \sum_n \eta_n(\underline{x}) \cos[\omega_n t - \varphi_n(\underline{x})].$$

Marée dynamique :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + f \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad}(g \eta + V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div}(h_f \underline{U}) = 0.$$

## Ondes d'inertie

Ondes de Poincaré :

$$\omega = \sqrt{f_0^2 + c_r^2 (k_x^2 + k_y^2)}.$$

Ondes de Proudman :

$$\omega = \sqrt{f_0^2 + c_r^2 (k_x^2 - \alpha_y^2)}.$$

Ondes de Kelvin de bord :

$$(\eta, u, v) = \hat{\eta} \left( 1, \pm \frac{g}{c_r}, 0 \right) \cos[k_x (x \mp c_r t)] e^{\mp \frac{f_0}{c_r} y}.$$

Amphidromie de Kelvin :

$$\eta(x, y, t) = \hat{\eta}_L \cos(k_0 x + \omega_0 t) e^{\frac{f_0}{k_0} y} - \hat{\eta}_R \cos(k_0 x - \omega_0 t) e^{-\frac{f_0}{k_0} y}.$$

## EXERCICES

**EXERCICE 9.1** Réflexions dans un bassin

On considère une couche fluide dans un bassin fermé par des parois verticales d'équations respectives  $x = 0$ ,  $x = L_x$ ,  $y = 0$  et  $y = L_y$ . La profondeur  $h_r$  du fluide au repos est constante et on note  $c_r = \sqrt{g h_r}$ . On suppose que les parois sont réfléchissantes et que les ondes observées ont une longueur d'onde grande devant la profondeur. On notera  $(u, v)$  les composantes de la vitesse horizontale et  $\eta(x, y, t)$  la hauteur de la surface libre.

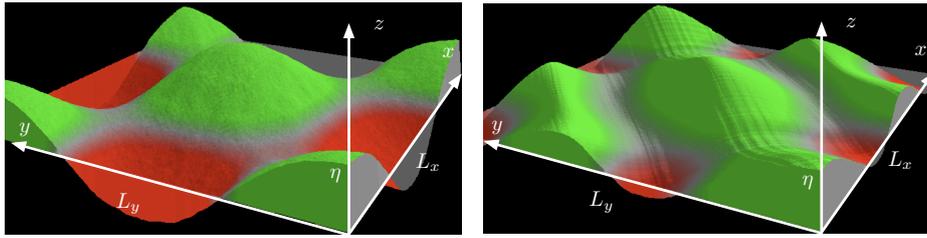


FIG. 9.15 – Géométrie du bassin fermé et exemples de modes propres. Logiciel de Paul Falstad.

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant 2D linéaire dans le cas où il n'y a pas de rotation ( $f_0 = 0$ ). Éliminer le champ de vitesse pour ne garder qu'une équation en  $\eta$ . Écrire la relation de dispersion des ondes monochromatiques obtenues en prenant la partie réelle d'une solution complexe de la forme  $\eta = \hat{\eta} \exp(i k_x x + i k_y y - i \omega t)$ . Écrire les conditions aux limites correspondant à la géométrie du bassin.

Les équations s'écrivent  $\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ . En éliminant  $u$  et  $v$ , on obtient l'équation des ondes  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2 \Delta \eta = 0$ . La relation de dispersion est  $\omega = c_r k$  avec  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Les conditions aux limites sont  $u = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = L_x$  et  $v = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = L_y$ . Elles s'écrivent donc  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$  pour  $x \in \{0, L_x\}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$  pour  $y \in \{0, L_y\}$  après élimination de la vitesse.

- 2) Montrer que l'élévation de la surface libre pour les modes propres de la cavité s'écrit  $\eta = \eta_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega_n t)$  où  $\omega_n$  sont des pulsations que l'on décrira. Décrire la structure des six premiers modes

propres d'oscillation de la cavité classés par ordre de fréquences propres croissantes lorsque  $\beta = L_x^2/L_y^2 = 3$ . Indiquer les valeurs de nombres  $A_n = \omega_n^2 L_x^2 / (\pi c_r)^2$ . Pour chacun de ces modes, tracer les lignes d'amplitude nulle.

On a  $\omega_n = c_r \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $k_x = n_1 \pi / L_x$  et  $k_y = n_2 \pi / L_y$  où  $n_1$  et  $n_2$  sont des entiers. On a donc  $A_n = n_1^2 + \beta n_2^2$ . Les six premières fréquences propres correspondent à  $A_1 < A_2 < A_3 = A_4 < A_5 < A_6$  avec  $A_n \in \{1, 3, 4, 4, 7, 9\}$  pour les couples  $(n_1, n_2) \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 0)\}$ .

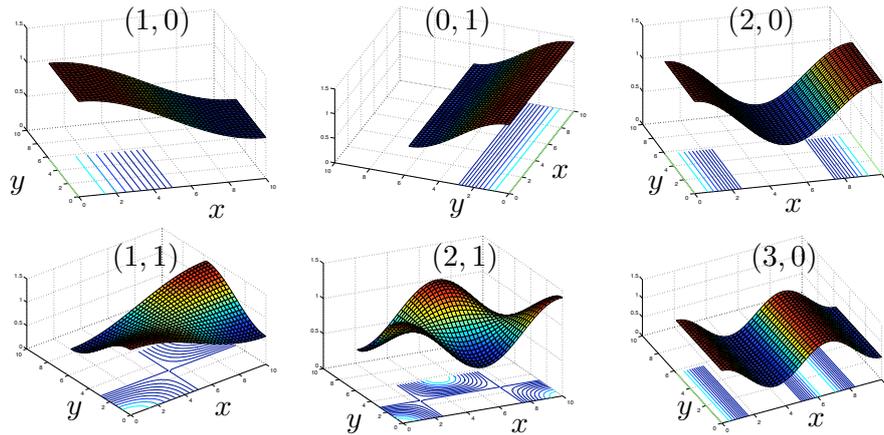


FIG. 9.16 – Classement des modes propres par ordre de fréquences croissantes.

### EXERCICE 9.2 Ondes de Poincaré

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant 2D linéaire dans le cas d'une profondeur  $h_r$  constante et d'un paramètre de Coriolis  $f = f_0$  non nul. On note  $c_r = \sqrt{g h_r}$ . Calculer alors la relation de dispersion des ondes planes  $(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) \exp(i k_x x + i k_y y - i \omega t)$ , où  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta})$  sont des amplitudes complexes, dans le cas particulier  $k_y = 0$  puis dans le cas général. Exprimer le champ de vitesse  $\underline{U}$  de ces ondes de Poincaré lorsque  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$  avec  $\eta_m$  réel.

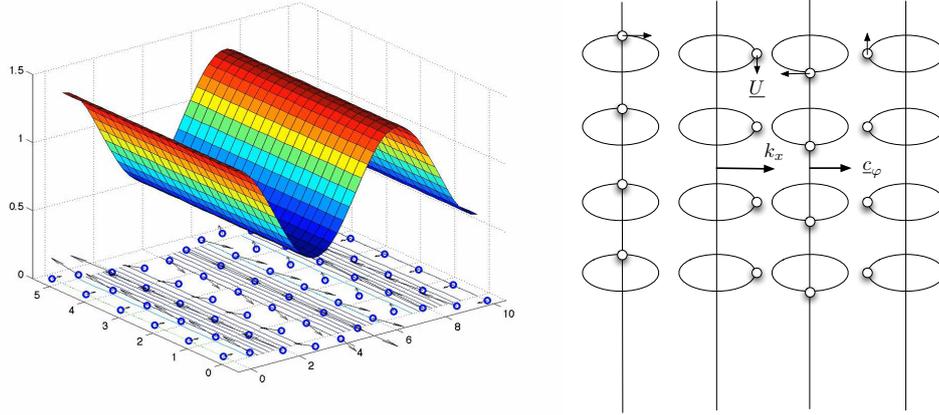


FIG. 9.17 – Onde de Poincaré.

Les équations de Saint-Venant 2D linéaires en rotation s'écrivent  $\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ . La relation de dispersion est  $\begin{vmatrix} -i\omega & -f_0 & gik_x \\ f_0 & -i\omega & 0 \\ h_r ik_x & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = i\omega(\omega^2 - f_0^2 - g h_r k_x^2) = 0$  dans le cas particulier où  $k_y = 0$ . En écartant le cas  $\omega = 0$  et en revenant au cas général  $k_y \neq 0$ , la relation de dispersion s'écrit  $\omega^2 = f_0^2 + g h_r (k_x^2 + k_y^2) = f_0^2 + c_r^2 k^2$ . Dans le cas  $k_y = 0$ , le système linéaire  $-i\omega \hat{u} - f_0 \hat{v} = -ig k_x \hat{\eta}$ ,  $-i\omega \hat{v} + f_0 \hat{u} = 0$  et  $-i\omega \hat{\eta} + ik_x h_r \hat{u} = 0$  permet d'écrire  $\hat{u} = \frac{1}{c_r^2 k_x} \omega g \hat{\eta}$  et  $\hat{v} = -i \frac{1}{c_r^2 k_x} f_0 g \hat{\eta}$ , en remarquant que  $\frac{1}{\omega^2 - f_0^2} k_x = \frac{1}{c_r^2 k_x}$ . En prenant la partie réelle de la solution complexe lorsque  $\hat{\eta} = \eta_m$  est réel, on obtient, outre  $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ , le champ de vitesse  $\underline{U} = [u, v] = \frac{g\omega}{c_r^2 k_x} \eta_m [\omega \cos(k_x x - \omega t), f_0 \sin(k_x x - \omega t)]$ . Si  $\eta_m$  est petit, les trajectoires  $\underline{x}(t)$  vérifient  $\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{U}(x_0, y_0, t)$  où  $(x_0, y_0)$  est la position moyenne. Les particules décrivent donc des ellipses dans un plan horizontal.

### EXERCICE 9.3 Modélisation de la marée

On modélise la marée par le forçage d'une couche fluide contenue dans un canal périodique de longueur  $P$  et de profondeur constante  $h_r$ . On néglige l'effet de la rotation terrestre.

- 1) On suppose que l'élevation  $\eta(x, t)$  de la surface libre de l'océan périodique obéit à l'équation  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = V_0 \sin(2k_0 x - \omega_n t)$  avec  $c_r = \sqrt{g h_r}$  et

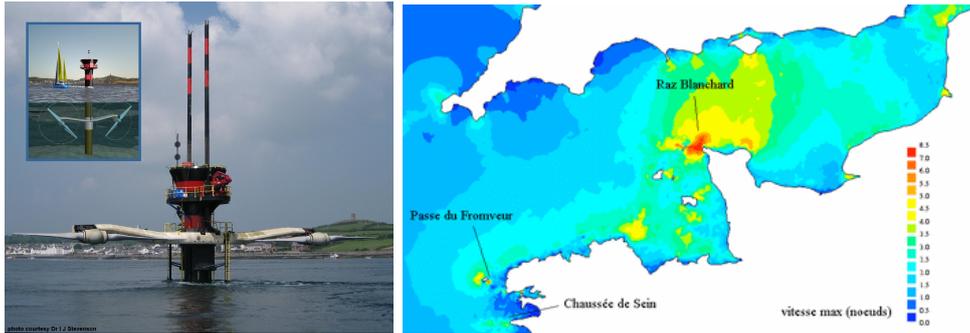


FIG. 9.18 – a) Hydrauliques. Photo par Marine Current Turbines Ltd. b) Intensité des courants. Carte du SHOM.

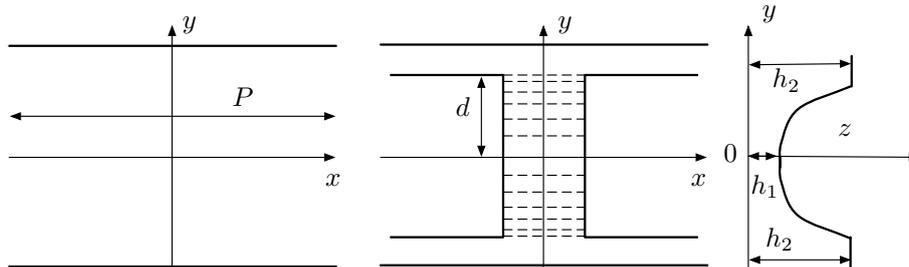


FIG. 9.19 – a) Canal périodique de période  $P$ . b) Modélisation de la Mer du Nord et de la Manche avec une bathymétrie  $h_f(y)$  parabolique.

$k_0 = 2\pi/P$ . Quelles sont les pulsations propres  $\omega(l)$  des oscillations de la surface libre en l'absence de forçage? Quelle est la réponse du canal au forçage? Que se passe-t-il si  $\omega_n$  est proche de  $\omega(2)$ ?

Les pulsations propres du canal s'écrivent  $\omega(l) = l k_0 c_r = 2\pi l c_r / P$  avec  $l$  entier. La réponse du canal est  $\eta(x, t) = -\frac{V_0}{\omega_n^2 - 4k_0^2 c_r^2} \sin(2k_0 x - \omega_n t)$ . Si  $\omega_n$  est proche de  $\omega(2) = 2k_0 c_r$ , on est proche de la résonance.

- 2) On modélise très sommairement la Mer du Nord et la Manche par un canal transversal de longueur  $2d = 2000$  km dont la bathymétrie est  $h_f(y) = h_1 + \alpha y^2$  avec  $h_1 = 40$  m et  $h_2 = h_f(d) = 4000$  m. Si  $H_2 = 1$  m est l'amplitude de la marée semi-diurne mesurée en  $y = \pm d$ , calculer son amplitude  $H_1$  en  $y = 0$ . Quel temps  $\tau$  met la marée pour traverser le canal? Comparer avec le temps que l'on trouverait si  $h_f$  était égal à  $h_1$

dans tout le canal. Dessiner schématiquement les lignes d'égalité d'amplitude et d'égalité de phase en considérant que deux ondes de marées d'égalité d'énergie traversent le canal en sens contraire. Comment ce schéma est-il modifié par la rotation de la terre ? Quel est l'âge de la marée en  $y = 0$  ?

On peut considérer que le milieu est peu profond. On a donc  $K_s = (h_2/h_1)^{1/4} = \sqrt{10} = 3.2$ . L'amplitude de la marée est donc de  $H_1 = K_s H_2 = 3.2$  m. Comme  $c(y) = \sqrt{g h_f(y)}$  est la vitesse de propagation de la marée, le temps nécessaire pour traverser le canal est  $\tau = 2 \int_0^d \frac{1}{c(y)} dy = 2 \int_0^d \frac{1}{\sqrt{g(h_1 + \alpha y^2)}} dy = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \operatorname{argsh} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{h_1}} d \right) = 8$  h. En calculant ce temps avec la plus petite vitesse  $c_1 = \sqrt{g h_1} = 20$  m/s, le temps serait  $2d/c_0 = 10^5$  s soit 28 h. Comme  $\omega_n = \sqrt{g h_f} k$  longueur d'onde est  $L = cT$  avec  $T = \omega_n/(2\pi) = 12$  h et  $c = \sqrt{g(h_1 + \alpha y^2)}$ . Le minimum est  $L_1 = \sqrt{g h_1} T = 860$  km. En superposant les deux ondes de marées (et en négligeant la rotation de la Terre), on obtient deux noeuds (marnages nuls) en  $y = \pm L_1/2 = \pm 430$  km. Tous les points du canal sont en phase. La rotation de la terre induit des points amphidromiques. L'âge de la marée en  $y = 0$  est de 4 h.

- 3) Calculer la puissance théorique par unité de surface  $E$  qu'une hydraulienne située en  $y = 0$  peut récupérer.

Le flux d'énergie linéique de l'onde de marée est  $I = c_1 \frac{1}{8} (\rho g H_1^2)$  avec  $c_1 = \sqrt{g h_1}$ . Une hydraulienne de surface  $S$  peut récupérer une puissance  $P = I S/h_1$ . On a donc  $E = P/S = I/h_1 = \frac{1}{8} (\rho g H_1^2) \sqrt{g/h_1} = 6$  kW/m<sup>2</sup>.

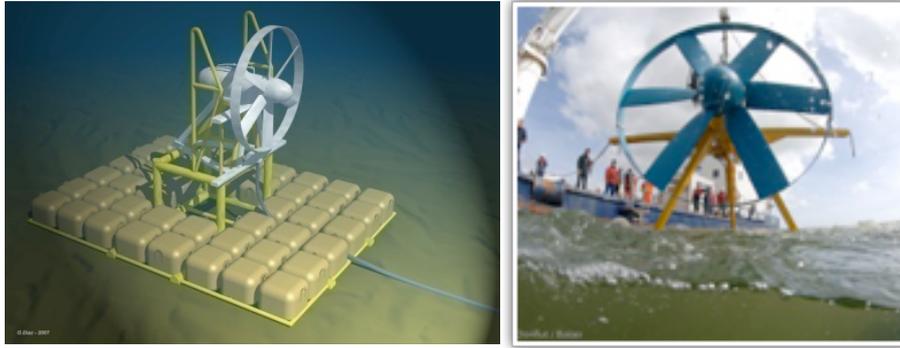


FIG. 9.20 – Hydraulienne Sabella D03. Image par SABELLA SAS. Photo par SABELLA-BALAO/Donfut.

## NOTATIONS

$a$	Rayon de la Terre (m)
$A_n$	Amplitudes typique des ondes de marées ( $s^{-2}$ )
atan	Inverse de la fonction tangente tan ()
$B$	Notation pour une fonction de $X$ et $Y$ ()
$c_r$	Vitesse $\sqrt{g h_r}$ ( $m s^{-1}$ )
$C$	Constante arbitraire ( $m^2 s^{-2}$ )
cosh	Cosinus hyperbolique ()
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée le long de $\underline{n}$ ( $m^{-1}$ )
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$\underline{e}_\lambda, \underline{e}_\phi$	Vecteurs de la base des coordonnées sphériques ()
$\underline{F}$	Résultante des forces de marées ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_A^{(c)}$	Force centripète entre l'astre $A$ et la Terre ( $m s^{-2}$ )
$F_A^{(c)}$	Module de $\underline{F}_A^{(c)}$ ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_L^{(c)}$	Force centripète entre la Lune et la Terre ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_S^{(c)}$	Force centripète entre le Soleil et la Terre ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_A^{(u)}$	Force gravitationnelle de l'astre $A$ ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_L^{(u)}$	Force gravitationnelle de la Lune ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_S^{(u)}$	Force gravitationnelle du Soleil ( $m s^{-2}$ )
$\underline{F}_T^{(u)}$	Force gravitationnelle de la Terre ( $m s^{-2}$ )
$F(x, y)$	Amplitude complexe (m)
$f$	Paramètre de Coriolis ( $s^{-1}$ )
$f_0$	Valeur constante de $f$ ( $s^{-1}$ )
$G$	Constante de gravité universelle ( $m^3 kg^{-1} s^{-2}$ )
$g$	Gravité ( $m s^{-2}$ )
grad	Opérateur gradient d'un champ scalaire ( $m^{-1}$ )
$h_f(\lambda, \phi)$	Profondeur de la mer (m)
$h_r$	Profondeur constante (m)
$\underline{k} = (k_x, k_y)$	Vecteur d'onde ( $m^{-1}$ )
$k$	Module de $\underline{k}$ ( $m^{-1}$ )
$k_0$	Nombre d'onde particulier ( $m^{-1}$ )
$l$	Indice azimuthal des modes propres ()
$\mathcal{L}(l, \omega)$	Opérateur différentiel ()
$L$	Longueur d'onde (m)
$L_0$	Longueur d'onde particulière (m)
$L_x$	Longueur en $x$ (m)

$L_y$	Longueur en $y$ (m)
$\text{Ln}$	Logarithme népérien ()
$L_i(\phi)$	Fonction de $\phi$ , pour $i = 1, 2, \dots, 4$ ()
$m$	Indice entier
$M_A$	Masse de l'astre $A$ (kg)
$M_T$	Masse de la Terre (kg)
$M_L$	Masse de la Lune (kg)
$M_S$	Masse du Soleil (kg)
$n$	Indice des ondes de marée ()
$n_1, n_2$	Entiers ()
$\underline{n}$	Normale à la frontière pointant vers l'extérieur ()
$p$	Champ de pression (Pascal)
$r$	Coordonnée radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (m)
$r_A$	Distance entre la Terre et l'astre $A$ (m)
$R$	Notation pour une fonction de $X$ et $Y$ (m)
$\sinh$	Sinus hyperbolique ()
$S(\zeta)$	Fonction définie à l'aide d'une intégrale ()
$t$	Temps (s)
$T$	Notation pour $\omega t$ ()
$T_n$	Périodes des ondes de marées (s)
$\tan$	Fonction tangente ()
$\tanh$	Tangente hyperbolique ()
$\underline{U} = (u, v)$	Champ de vitesse horizontal ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u(x_0, y_0; t)$	Vitesse $u$ d'une trajectoire centrée en $(x_0, y_0)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$v(x_0, y_0; t)$	Vitesse $v$ d'une trajectoire centrée en $(x_0, y_0)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\hat{u}(\phi), \hat{v}(\phi)$	Composantes de Fourier de $u$ et $v$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{U}_{\text{libre}}$	Solution sans forçage ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{U}_{\text{aqua}}$	Solution sans frontières ( $\text{m s}^{-1}$ )
$u$	Variable d'intégration
$V(\underline{x})$	Potentiel de marée dans un repère absolu ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$V(\lambda, \phi, t)$	Potentiel de marée dans le repère lié à la Terre ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$V_A$	Potentiel de marée de l'astre $A$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$V_L$	Potentiel de marée de la Lune ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$V_S$	Potentiel de marée du Soleil ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$V_T^{(u)}$	Potentiel gravitationnel de la Terre ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$\hat{V}_{l,n}(\phi)$	Composantes de Fourier du potentiel $V$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$ )
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$(x_0, y_0)$	Coordonnées constantes (m)

$\underline{x}'$	Coordonnées spatiales (m)
$\underline{x}_A$	Coordonnées du centre de l'astre $A$ (m)
$\underline{x}_T$	Coordonnées du centre de la Terre (m)
$X$	Notation pour $kx$ ()
$Y$	Notation pour un $y$ adimensionné et translaté ()
$\alpha_x$	Taux de croissance spatial ( $\text{m}^{-1}$ )
$\Delta$	Laplacien ( $\text{m}^{-2}$ )
$\delta$	Distribution de Dirac ( $\text{m}^{-1}$ )
$\zeta$	Variable de la fonction $S(\zeta)$ ()
$\eta$	Élévation de la surface libre (m)
$\eta_i(x, y, t)$	Élévation de la surface libre de l'onde incidente (m)
$\eta_{libre}(\lambda, \phi, t)$	Solution sans forçage (m)
$\eta_{aqua}(\lambda, \phi, t)$	Solution sans frontières (m)
$\eta_L(x, t)$	Onde à gauche (m)
$\eta_R(x, t)$	Onde à droite (m)
$\eta_n(\underline{x})$	Amplitudes locales des ondes de marées ( $m$ )
$\eta_m$	Amplitude réelle (m)
$\eta_0$	Amplitude réelle (m)
$\hat{\eta}$	Transformée de Fourier de $\eta$ (m)
$\hat{\eta}(l, m; \phi)$	Modes propres (m)
$\hat{\eta}_L$	Amplitude de l'onde de Kelvin à gauche (m)
$\hat{\eta}_R$	Amplitude de l'onde de Kelvin à droite (m)
$\hat{\eta}_0$	Notation pour $\sqrt{\hat{\eta}_R \hat{\eta}_L}$ (m)
$\theta_A$	Angle zénithal de l'astre $A$ ()
$\theta_L$	Angle zénithal de la Lune ()
$\theta_S$	Angle zénithal du Soleil ()
$\Theta$	Angle défini par une fonction implicite ()
$\lambda$	Longitude (m)
$\varphi_n$	Phases des ondes de marée ()
$\phi$	Latitude ()
$\phi$	Potentiel du champ de vitesse $\underline{U}$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\omega$	Pulsations ( $\text{s}^{-1}$ )
$\omega_0$	Pulsation particulière ( $\text{s}^{-1}$ )
$\omega_n$	Pulsations de la marée ( $\text{s}^{-1}$ )
$\omega(l, m)$	Pulsations propres ( $\text{s}^{-1}$ )
$\Omega$	Vitesse de rotation angulaire de la Terre ( $\text{s}^{-1}$ )
$\Omega$	Domaine spatial 2D ()