

# Chapitre 8

## Réfraction de la houle

*O. Thual, 26 juin 2010*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Propriétés des ondes de surface . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1	Relation de dispersion dans le cas homogène . . . . .	3
1.2	Ondes de surface en milieu inhomogène . . . . .	5
1.3	Énergie des ondes de surface . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Tracé de rayons . . . . .</b>	<b>8</b>
2.1	Paquets d'ondes dispersés . . . . .	8
2.2	Méthode WKB (Wentzel, Kramer et Brillouin) . . . . .	10
2.3	Équation de l'Eikonale . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Transport de l'énergie . . . . .</b>	<b>14</b>
3.1	Conservation de l'énergie le long des rayons . . . . .	14
3.2	Réfraction et shoaling de la houle . . . . .	16
3.3	Critères de déferlement . . . . .	18

---

## Introduction

Lorsque la houle arrive près des côtes, les crêtes des vagues (lignes de phase) ont tendance à s'aligner avec les lignes d'iso-profondeur (isobathes). Ce phénomène de réfraction se généralise à toutes les ondes qui se propagent dans un milieu inhomogène lentement variable. Les rayons, qui sont perpendiculaires aux lignes de phase pour les ondes de surface, convergent les uns vers les autres à l'approche des caps et divergent dans les baies. Comme l'énergie est conservée entre deux rayons, on comprend pourquoi les vagues sont plus fortes près des caps.



FIG. 8.1 – Réfraction de la houle par la bathymétrie. Photo de Ian West.

On présente tout d'abord les modèles linéaires décrivant les ondes de surface dans une couche de profondeur constante ou variable, quelconque ou petite. Dans le cas homogène, on rappelle la relation de dispersion des ondes de surface. Les notions de paquet d'ondes dispersé, de pulsation locale et de vecteur d'onde local sont introduites. La méthode WKB est présentée sur l'exemple simple des équations de Korteweg-de-Vries linéaires et permet d'énoncer que la relation de dispersion locale relie la pulsation locale d'un paquet d'ondes

dispersé à son vecteur d'onde local.

Cette relation est appelée "équation de l'Eikonale" et se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles pour le champ de phase. On peut la résoudre par un "tracé de rayons" défini comme étant celui des lignes de champs de la vitesse de groupe. Les ondes sont "réfractées" lorsque les inhomogénéités du milieu dévient les rayons de la ligne droite. On montre que l'énergie de la houle, dont on explicite l'expression, est conservée entre deux rayons. La concentration de l'énergie sur une profondeur de plus en plus faible rend compte de l'accroissement de la hauteur de la houle jusqu'au déferlement.

On n'aborde pas ici les phénomènes complémentaires de "diffraction" et de "réflexion", qui interviennent en présence de frontières ou lorsque le paquet d'ondes n'est pas suffisamment dispersé.

## 1 Propriétés des ondes de surface

Après un rappel de la relation de dispersion des ondes de surface en milieu homogène, le problème de la propagation des ondes de surface en présence d'une bathymétrie inhomogène est posé dans le cadre des hypothèses d'écoulement irrotationnel et de petites oscillations. L'énergie de la houle et son flux sont explicités.

### 1.1 Relation de dispersion dans le cas homogène

Le modèle permettant d'appréhender les ondes de surface est constitué ici des équations d'Euler incompressibles à surface libre qui s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} \right) = -\operatorname{grad} p - \rho g \underline{e}_z, \quad (8.1)$$

où  $g$  est la gravité,  $\underline{e}_z$  la vecteur unitaire vertical et  $\rho$  la masse volumique supposée constante. Les conditions aux limites sur la surface libre d'équation  $z = \eta(x, y, t)$ , où  $\eta$  désigne l'élévation de cette surface libre par rapport à un niveau de référence  $z = 0$ , sont  $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \eta = w$  et  $p = p_a$  où  $p_a$  est la pression atmosphérique que l'on suppose constante. Les conditions aux limites  $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} h_f + w = 0$  valables pour une profondeur  $h_f(x, y)$  quelconque s'écrivent  $w = 0$  dans le cas d'une profondeur  $h_f = h_r$  constante que nous considérons ici, dans un premier temps.

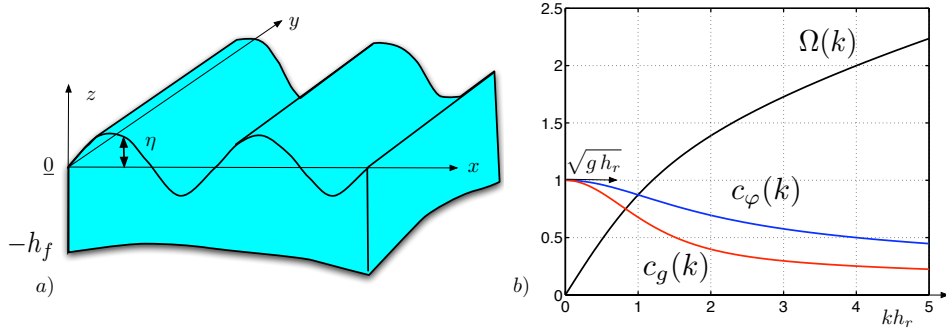


FIG. 8.2 – a) Géométrie d'un écoulement à surface libre avec fond variable. b) Relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k})$  des ondes de surface, modules de la vitesse de phase  $c_\varphi$  et de groupe  $c_g$ .

On considère les petites oscillations  $(\eta, p, \underline{U}) = (0, p_a - \rho g z, \underline{0}) + (\eta, \tilde{p}, \underline{U})$  autour de l'équilibre. En supposant  $\eta$ ,  $\tilde{p}$  et  $\underline{U}$  petits, on peut négliger les termes non linéaires  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } \eta$  et remplacer les conditions aux limites en  $z = \eta$  par des conditions en  $z = 0$ . On obtient alors  $\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \underline{U}) = \underline{0}$  ce qui permet de se restreindre au cas  $\text{rot } \underline{U} = \underline{0}$  en supposant que la vorticité est nulle à l'instant initial. On peut donc se restreindre à des écoulements irrotationnels dont le champ de vitesse s'écrit donc  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ .

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors  $\Delta \phi = 0$  et l'équation de quantité de mouvement linéarisée s'intègre en  $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ , la constante d'intégration pouvant être choisie nulle en ajoutant une fonction  $C(t)$  au potentiel  $\phi$  puisqu'il est défini à une constante en espace près. Les conditions aux limites s'écrivent  $\frac{\partial \eta}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$  en  $z = 0$  (et non plus  $z = \eta$ ) et  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$  en  $z = -h_r$ .

Les équations sont invariantes par les translations horizontales et en temps. On peut alors considérer des solutions complexes sous la forme  $\phi = \Phi(z) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$  où  $\underline{k} = (k_x, k_y)$  est un vecteur d'onde horizontal et  $\underline{x} = (x, y)$  le vecteur des coordonnées horizontales. En reportant dans les équations, le profil complexe  $\Phi(z)$  doit vérifier  $\Phi'' - k^2 \Phi = 0$  avec  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  ainsi que les conditions aux limites  $-\omega^2 \Phi(0) + g \Phi'(0) = 0$  et  $\Phi'(-h_r) = 0$ . Il n'existe de solution non triviale de cette équation linéaire que si la relation de dispersion  $\omega^2 = g k \tanh(k h_r)$  est vérifiée. On a alors  $\Phi(z) = \Phi_m \cosh[k(z + h_r)]$  où  $\Phi_m$  est une amplitude complexe arbitraire. En adoptant la convention  $\omega \geq 0$ , on peut

écrire la relation de dispersion des ondes de surface sous la forme

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} \quad \text{avec} \quad k = \|\underline{k}\|. \quad (8.2)$$

La vitesse de phase associée est  $\underline{c}_\varphi(\underline{k}) = c_\varphi(\underline{k}) \underline{e}_k(\underline{k})$  avec  $c_\varphi(\underline{k}) = \Omega(\underline{k})/k$  et  $\underline{e}_k(\underline{k}) = \underline{k}/k$  vecteur unitaire. La vitesse de groupe  $\underline{c}_g(\underline{k}) = \text{grad}_k \Omega(\underline{k})$  est égale à  $\underline{c}_g(\underline{k}) = c_g(\underline{k}) \underline{e}_k(\underline{k})$  avec  $c_g/c_\varphi = 1/2 + k h_r / \sinh(2 k h_r)$ .

Dans la limite  $k h_r \rightarrow \infty$ , on est en présence d'ondes en eaux très profondes et on peut écrire  $\Omega(\underline{k}) \sim \sqrt{g k}$  et  $c_g \sim \frac{1}{2} c_\varphi \sim \frac{1}{2} \sqrt{g/k}$ . Dans la limite  $k h_r \rightarrow 0$ , on retrouve la relation de dispersion des ondes de surface en eaux peu profondes avec  $\Omega(\underline{k}) \sim c_r k$  et  $c_\varphi \sim c_g \sim c_r = \sqrt{g h_r}$ .

Les lignes de phase d'une onde monochromatique de vecteur d'onde  $\underline{k}$  sont les droites perpendiculaires à  $\underline{k}$  et donc à  $\underline{c}_\varphi(\underline{k})$ . Ce sont, par exemple, les lignes des crêtes ou des creux des vagues. Les "rayons" sont, par définition, les lignes de champs de la vitesse de groupe  $\underline{c}_g(\underline{k})$ . Dans le cas d'une onde monochromatique, ce sont donc des droites qui se trouvent être perpendiculaires aux lignes de phase pour les ondes de surface (ce n'est par exemple pas le cas pour les ondes de gravité internes dont la vitesse de groupe est orthogonale à la vitesse de phase).

## 1.2 Ondes de surface en milieu inhomogène

Dans le cas d'une profondeur inhomogène  $h_f(\underline{x})$ , avec  $\underline{x} = (x, y)$ , les petites oscillations d'une couche fluide à surface libre autour de sa position de repos sont régies par l'équation linéaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = 0, \\ \Delta \phi &= 0 & \text{pour } -h_f(x, y) \leq z \leq 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h_f}{\partial y} &= 0 & \text{en } z = -h_f(x, y), \end{aligned} \quad (8.3)$$

où  $g$  est la gravité et  $\phi(x, y, z, t)$  le potentiel du champ de vitesse  $\underline{U}(x, y, z, t)$  défini par  $\underline{U} = \text{grad } \phi$ . L'élévation de la surface libre  $\eta$  a été éliminée des deux conditions aux limites  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t) = -g \eta(x, y, t)$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0, t)$ .

Lorsque la couche est peu profonde, une autre manière d'aborder les petites oscillations consiste à considérer les équations de Saint-Venant bidimension-

nelles linéaires qui s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_f u) + \frac{\partial}{\partial y}(h_f v) = 0, \quad (8.4)$$

où  $\eta(x, y, t)$  est l'élevation de la surface libre,  $\underline{U}_H(x, y) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$  la perturbation de vitesse et  $h_f(x, y)$  la profondeur. Comme la vorticité verticale  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  vérifie  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ , elle est nulle si elle l'est à l'instant initial, ce que l'on suppose ici. On peut alors écrire  $\underline{U}_H = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y = \underline{\text{grad}}_H \phi_H$  où  $\phi_H(x, y)$  est le potentiel de la vitesse horizontale et  $\underline{\text{grad}}_H$  l'opérateur "gradient horizontal". Comme  $\phi_H$  est défini à une constante près, on peut écrire  $\frac{\partial \phi_H}{\partial t}(x, y, t) = -g \eta(x, y, t)$  en intégrant les équations de conservation de la quantité de mouvement. En remplaçant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient "l'équation des ondes" suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial t^2} - \text{div}_H \left[ c^2(\underline{x}) \underline{\text{grad}}_H \phi_H \right] = 0. \quad (8.5)$$

où  $\text{div}_H$  est l'opérateur de divergence horizontale et  $c(\underline{x}) = \sqrt{g h_f(x, y)}$ . On retrouve bien la relation de dispersion  $\omega^2 = c_r^2 k^2$  dans le cas homogène où  $c(\underline{x}) = c_r = \sqrt{g h_r}$  est une constante.

### 1.3 Énergie des ondes de surface

Comme le champ de forces volumiques  $-\rho g \underline{e}_z = -\underline{\text{grad}} V$  dépend du potentiel  $V = \rho g z$ , l'équation de conservation de l'énergie totale définie par  $\frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 + V$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \right) \left[ \rho \left( \frac{1}{2} \underline{U}^2 + g z \right) \right] + \text{div} (p \underline{U}) = 0. \quad (8.6)$$

Comme  $\text{div} \underline{U} = 0$ , cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) + \text{div} \left( \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \underline{U} \right) + \text{div} (\rho g z \underline{U} + p \underline{U}) = 0. \quad (8.7)$$

On souhaite alors intégrer cette équation sur la verticale. On définit la pression dynamique  $\tilde{p}$  comme étant l'écart de pression à la pression hydrostatique. En notant

$$W_{\text{cin}} = \int_{-h_f}^{\eta} \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 dz, \quad W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = \int_{-h_f}^{\eta} \tilde{p} \underline{U}_H dz, \quad (8.8)$$

l'énergie cinétique  $W_{\text{cin}}$ , l'énergie potentielle  $W_{\text{pot}}$  et le flux  $\underline{I}$  de l'énergie totale  $W = W_{\text{cin}} + W_{\text{pot}}$ , on obtient, après plusieurs manipulations algébriques prenant en compte les conditions aux limites, la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_H (\underline{N} + \underline{I}) = 0, \quad (8.9)$$

avec  $\underline{N} = \int_{-h_f}^{\eta} \left( \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) \underline{U}_H dz$  où  $\underline{U}_H$  est la projection de  $\underline{U}$  sur l'horizontale et  $\text{div}_H$  l'opérateur de divergence horizontale.

En approximant les intégrales de la forme  $\int_{-h_f}^{\eta}$  par l'intégrale approchée  $\int_{-h_f}^0$ , puisque  $\eta$  est petit et en utilisant les relations  $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ ,  $\eta = -g \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0}$ ,  $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$  et  $\underline{U}_H = \underline{\text{grad}}_H \phi$  on peut écrire

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \rho \int_{-h_f}^0 (\underline{\text{grad}} \phi)^2 dz + \frac{\rho}{2g} \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} \right)^2 \\ \text{et } \underline{I} &= -\rho \int_{-h_f}^0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \underline{\text{grad}}_H \phi dz. \end{aligned} \quad (8.10)$$

À l'ordre dominant de l'approximation linéaire, le terme de flux  $\underline{N}$  est négligeable.

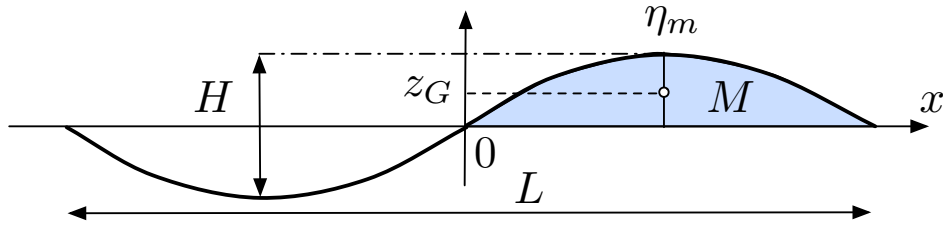


FIG. 8.3 – Centre de gravité  $z_G$  de la bosse de la vague.

Dans le cas d'une onde monochromatique de la forme

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi_m \cosh[k(z + h_r)] \sin(kx - \omega t), \\ \eta &= \Phi_m \cosh(k h_r) (\omega/g) \cos(kx - \omega t), \\ u &= \Phi_m k \cosh[k(z + h_r)] \cos(kx - \omega t), \\ w &= \Phi_m k \sinh[k(z + h_r)] \sin(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (8.11)$$

on obtient

$$\int_0^L W_{\text{cin}} dx = \int_0^L W_{\text{pot}} dx \quad \text{et} \quad \int_0^L W dx = \frac{1}{8} \rho g H^2 L = 2 M g z_G, \quad (8.12)$$

où  $L = 2\pi/k$  est la longueur d'onde,  $z_G$  est l'altitude centre de gravité de la bosse de la vague (voir figure 8.3) et  $M$  sa masse linéique. C'est l'énergie nécessaire pour déplacer la bosse vers le creux en la déformant de manière à reconstruire une interface plane.

Si l'on considère maintenant le modèle  $\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial t^2} - \text{div}_H [c^2(\underline{x}) \text{grad}_H \phi_H] = 0$  obtenu à partir des équations de Saint Venant pour les lames d'eau peu profondes, on définit l'énergie et son flux par les relations

$$W = \frac{\rho c^2}{2g} (\text{grad}_H \phi_H)^2 + \frac{\rho}{2g} \left( \frac{\partial \phi_H}{\partial t} \right)^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = -\frac{\rho c^2}{g} \frac{\partial \phi_H}{\partial t} \text{grad}_H \phi_H. \quad (8.13)$$

Comme  $\frac{\partial \phi_H}{\partial t} = -g\eta$ ,  $\underline{U}_H = \text{grad}_H \phi_H$  et  $c^2 = gh_f$ , on retrouve l'expression de l'énergie des ondes de surface dans la limite  $kh_f \rightarrow 0$ , en invoquant le fait que la vitesse verticale devient négligeable devant la vitesse horizontale dans cette limite.

Pour les deux modèles (8.3) et (8.5) les grandeurs  $W(\underline{x}, t)$  et  $\underline{I}(\underline{x}, t)$  vérifient la relation

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}_H \underline{I} = 0. \quad (8.14)$$

## 2 Tracé de rayons

La notion de paquets d'ondes dispersés ainsi que leur description par la méthode WKB sont présentées. L'équation de l'Eikonale, qui relie la pulsation et le vecteur d'onde locaux par la relation de dispersion locale est ensuite résolue par la méthode du tracé de rayons.

### 2.1 Paquets d'ondes dispersés

On s'intéresse à des solutions complexes des modèles linéaires d'écoulements à surface libre présentés ci-dessus dont l'élévation est écrite sous la forme

$$\eta(\underline{x}, t) = \eta_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)} \quad \text{avec} \quad \underline{x} = (x, y). \quad (8.15)$$



Dans le cas général, le champ de vitesse s'en déduit en résolvant le problème elliptique  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta$  en  $z = 0$ ,  $\Delta \phi = 0$  partout et  $\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h_f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$  en  $z = -h_f(x, y)$ . Dans le cas peu profond, il suffit d'exprimer le potentiel de la vitesse horizontale sous la forme  $\frac{\partial \phi_H}{\partial t}(x, y, t) = -g\eta(x, y, t)$ .

On définit alors la "pulsation locale" et le "vecteur d'onde local" de cette solution par les relations

$$\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \underline{k}(\underline{x}, t) = \text{grad } \varphi(\underline{x}, t). \quad (8.16)$$

On dit que cette solution est un "paquet d'ondes bien dispersé" si sa pulsation locale  $\omega(\underline{x}, t)$ , son vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  et son amplitude locale  $\eta_m(\underline{x}, t)$  ont une échelle de variation spatiale  $\mathcal{L}$  grande devant les longueurs d'ondes  $L(\underline{x}, t) = 2\pi/k(\underline{x}, t)$  avec  $k = \|\underline{k}\|$ . On suppose de même que l'échelle de variation temporelle  $\mathcal{T}$  de ces trois champs est grande devant les périodes locales  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ .

Pour simplifier la présentation dans tout ce qui suit, on supposera, sans perte de généralité, que  $\eta_m(\underline{x}, t)$  est réel.

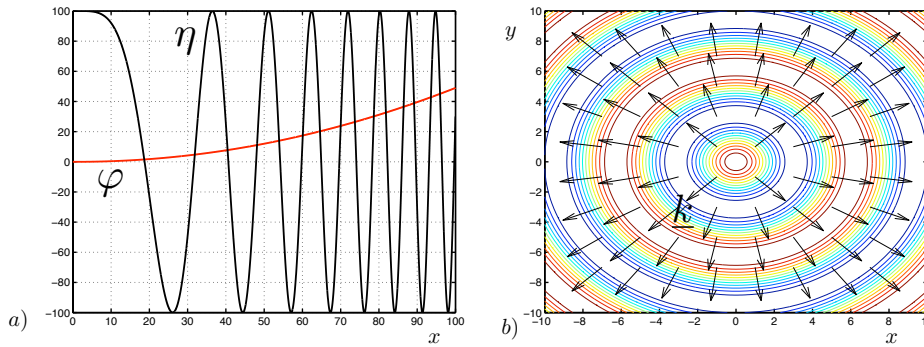


FIG. 8.4 – Exemples de paquets d'ondes dispersés  $\eta(\underline{x}, t) = \eta_m e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$  avec  $\eta_m$  constant. a) 1D :  $\varphi(x, t) = \alpha \left( \frac{x^2}{2} - c_r t x \right)$ . b) 2D :  $\varphi(x, y, t) = k_0 (r - c_r t)$  où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , iso- $\varphi$  et vecteurs d'onde locaux  $\underline{k}(\underline{x})$ .

Deux exemples de paquets d'ondes sont présentés par la figure 8.4. On voit, pour ces exemples, que l'hypothèse de paquet d'ondes "dispersé" n'est vraie, respectivement, que pour  $x$  ou  $r$  suffisamment grand.

Certains résultats généraux découlent des définitions  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \text{grad } \varphi$  et  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\varphi$  comme par exemple  $\text{rot } \underline{k} = \underline{0}$  ou  $\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \text{grad } \omega = 0$ . Ces relations rappellent que  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  et  $\omega(\underline{x}, t)$  ne sont pas des champs quelconques mais découlent du champ de phase  $\varphi(\underline{x}, t)$ .

## 2.2 Méthode WKB (Wentzel, Kramer et Brillouin)

Les équations de Korteweg de Vries (KdV) linéaires

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta(x) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (8.17)$$

modélisent la dynamique d'un paquet d'ondes de surface de grandes longueurs d'ondes qui se propagent toutes dans la même direction. Sans entrer dans le détail du développement asymptotique qui permet d'aboutir à ce modèle, on peut en comprendre le principe en examinant le cas homogène  $\alpha = \alpha_0$  et  $\beta = \beta_0$ . Dans ce cas, les solutions  $\eta(x, t) = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$  du modèle ont une amplitude non nulle à condition de vérifier la relation de dispersion

$$\omega = \Omega(k_x) = \alpha_0 k_x - \beta_0 k_x^3. \quad (8.18)$$

Si  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont les constantes du développement limité  $\sqrt{g k \tanh(k h_r)} = \alpha_0 k - \beta_0 k^3 + O(k^5)$ , le modèle de KdV linéaire décrit bien la dispersion 1D des grandes ondes de surface ( $\alpha_0 = c_r$  et  $\beta_0 = c_r h_r^2/6$ ).

Dans le cas où  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  varient "lentement" en espace, c'est-à-dire sur une échelle grande devant la longueur d'onde des paquets d'ondes considérés, on cherche des solutions sous la forme

$$\eta(x, t) = \eta_m(x, t) e^{i \varphi(x, t)} = \eta_d e^{\frac{i}{\epsilon} \Phi(\epsilon x, \epsilon t) + \Sigma(\epsilon x, \epsilon t)}, \quad (8.19)$$

où  $\eta_d$  est une constante avec dimension (même unité que  $\eta$ ), et  $\Phi(\chi, \tau)$  et  $\Sigma(X, T)$  des champs réels définis par

$$\eta_m(x, t) = \eta_d e^{\Sigma(\epsilon x, \epsilon t)} \quad \text{et} \quad \varphi(x, t) = \frac{1}{\epsilon} \Phi(\epsilon x, \epsilon t). \quad (8.20)$$

On suppose que  $\epsilon$  est un petit paramètre afin de décrire une situation où les ondes sont localement monochromatiques. On dit que l'on est en présence d'un paquet d'ondes "dispersé".

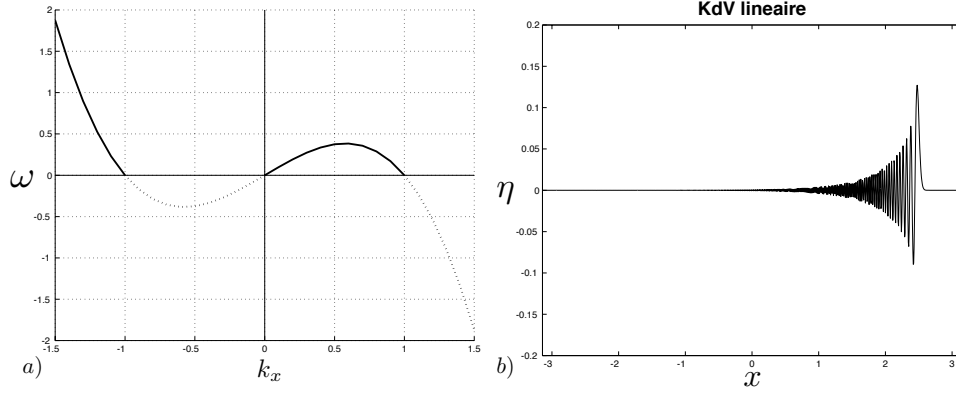


FIG. 8.5 – a) Relation de dispersion de KdV linéaire avec la convention  $\omega > 0$ . b) Solution  $\eta(x, t)$  après dispersion d'une impulsion initiale.

En notant  $\chi = \epsilon x$  et  $\tau = \epsilon t$  et en reportant l'expression asymptotique de  $\eta$  dans cette équation, l'ordre dominant en  $\epsilon$  est une équation pour la phase  $\Phi(\chi, \tau)$  qui s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} - \beta \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right)^3 = 0. \quad (8.21)$$

En utilisant  $\varphi(x, t) = \frac{1}{\epsilon} \Phi(\epsilon x, \epsilon t)$ , on obtient donc la phase de la solution asymptotique  $\eta(x, t) = \eta_m(x, t) e^{i\varphi(x, t)}$  comme étant la solution de l'équation

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta(x) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^3 = \Omega \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, x \right), \quad (8.22)$$

où la fonction  $\Omega(k_x, x) = \alpha(x) k_x - \beta(x) k_x^3$  se déduit de la relation de dispersion du modèle linéaire de Korteweg de Vries en laissant varier  $\alpha$  et  $\beta$  avec l'espace.

L'ordre dominant du développement asymptotique WKB (appelé ordre de l'optique géométrique) permet donc de déterminer la phase  $\varphi(x, t)$  comme solution d'une équation aux dérivées partielles (non-linéaire) appelée équation de l'Eikonale. L'amplitude  $\eta_m(x, t)$  du paquet d'ondes est déterminée à l'ordre suivant (ordre de l'optique physique).

### 2.3 Équation de l'Eikonale

L'exemple simple de l'équation de Korteweg de Vries linéaire se généralise à tous les systèmes qui admettent une relation de dispersion locale  $\omega = \Omega(\underline{k}, \underline{x})$ . Lorsque les ondes sont suffisamment dispersées, on peut écrire les champs solutions sous la forme  $\eta(\underline{x}, t) = \eta_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$ . Localement, c'est-à-dire au voisinage de  $(\underline{x}, t)$  dans l'espace-temps, ces paquets d'ondes peuvent être vus comme des ondes monochromatiques de pulsation  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$ , de vecteur d'onde  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \text{grad } \varphi(\underline{x}, t)$  et d'amplitude  $\eta_m(\underline{x}, t)$ . En effet, on a supposé que les échelles de variations spatiale  $\mathcal{L}$  et temporelle  $\mathcal{T}$  étaient grandes devant la longueur d'onde locale  $L(\underline{x}, t) = 2\pi/k(\underline{x}, t)$  et la période locale  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$ .

Dans le cas d'un milieu homogène de relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k})$ , l'équation de l'Eikonale s'écrit  $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t)]$  où  $\omega = \Omega(\underline{k})$  est la relation de dispersion. Dans un milieu inhomogène, elle s'écrit

$$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] , \quad (8.23)$$

où  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est une fonction des variables  $\underline{k}$  et de  $\underline{x}$  qui traduit la relation de dispersion locale. Pour les ondes de surface on écrira  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{gk \tanh[k h_f(\underline{x})]}$  dans le cas général, avec  $\underline{k} = (k_x, k_y)$  et  $k = \|\underline{k}\|$ , et  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(\underline{x})k$  dans le cas des faibles profondeurs, avec  $c(\underline{x}) = \sqrt{g h_f(\underline{x})}$ . Cette approche inhomogène n'est valable que si l'échelle de variation de  $h_f$  est grande devant la longueur d'onde de la houle.

En utilisant la définition de  $\omega(\underline{x}, t)$  et  $\underline{k}(\underline{x}, t)$ , l'équation de l'Eikonale s'écrit

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) = \Omega[\text{grad } \varphi(\underline{x}, t), \underline{x}] \quad \iff \quad \omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] , \quad (8.24)$$

où la fonction  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  décrit le comportement dispersif inhomogène du milieu. En dérivant par rapport au temps (et en utilisant la relation  $\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ ) on obtient l'équation

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \text{grad } \underline{k} = -\text{grad}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) , \quad (8.25)$$

où  $\text{grad}_x$  désigne le gradient par rapport aux variables  $\underline{x}$  et où la vitesse de groupe locale est définie par la relation  $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \text{grad}_k \Omega(\underline{k}, \underline{x})$ .

Cette équation se résout en considérant le système dynamique dans  $\mathbb{R}^6$  suivant en  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \text{grad}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k}, \underline{x}) \quad \text{et} \quad \dot{\underline{k}} = -\text{grad}_{\underline{x}} \Omega(\underline{k}, \underline{x}). \quad (8.26)$$

Les trajectoires  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  parcourent ce que l'on appelle les "rayons" (figure 8.6). Si par tout point  $\underline{x}_*$  et pour tout temps  $t_*$  passe une trajectoire  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  telle que  $\underline{x}(t_*) = \underline{x}_*$ , on peut construire un champ  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  en posant  $\underline{k}(\underline{x}_*, t_*) = \underline{k}(t_*)$ . Par construction, ce champ vérifie l'équation (8.25) car  $\frac{d}{dt} \{\underline{k}[\underline{x}(t), t], t\} = \left( \frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g \cdot \text{grad}_{\underline{k}} \right) [\underline{x}(t), t]$ . On peut voir les trajectoires  $\underline{x}(t)$  comme étant les "courbes caractéristiques" de cette équation, la grandeur  $\underline{k}$  étant alors la "fonction de Riemann" associée qui devient un "invariant de Riemann" dans le cas homogène.

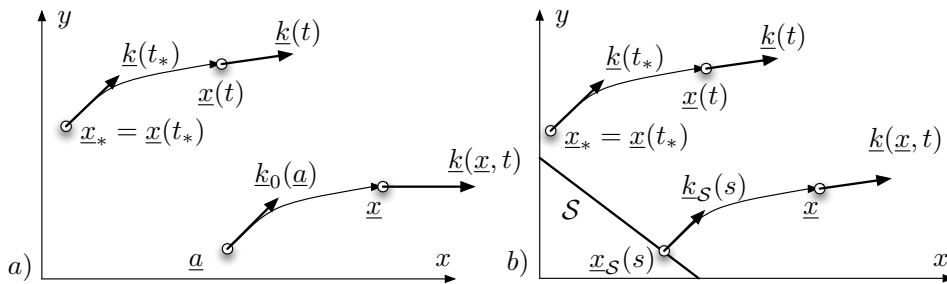


FIG. 8.6 – Tracé de rayons : a) à partir d'une condition initiale  $k_0(\underline{a}) = \underline{k}(\underline{a}, 0)$ , b) à partir d'une condition aux limites  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \underline{k}_S(s)$  pour  $\underline{x} = \underline{x}_S(s)$ .

Un premier exemple consiste à se donner une condition initiale en  $t = 0$  permettant de définir  $\underline{k}_0(\underline{x}) = \underline{k}(\underline{a}, 0)$  pour tout point d'un domaine plan  $(x, y)$ . Les rayons issus des conditions initiales  $[\underline{x}(0), \underline{k}(0)] = [\underline{a}, \underline{k}_0(\underline{a})]$  permettent de construire la solution  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  sur tout le domaine spatio-temporel qu'ils explorent (figure 8.6a).

Un autre exemple consiste à imposer des conditions aux limites stationnaires  $\underline{k}(x, y, t) = \underline{k}_S(s)$  le long d'une ligne  $\mathcal{S}$  du plan  $(x, y)$  d'équation  $\underline{x} = \underline{x}_S(s)$  où  $s$  est une abscisse curviligne variant sur un intervalle. Les rayons issus des points  $(x, y)$  de cette ligne vont propager l'information dans le domaine spatial pour y définir  $\underline{k}(\underline{x}, t)$  (figure 8.6b).

On remarque finalement que le système dynamique de  $\mathbb{R}^6$  considéré répond à

la définition d'un système dynamique hamiltonien

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}(\underline{p}, \underline{q}) \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}(\underline{p}, \underline{q}) \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (8.27)$$

en notant  $\underline{q} = \underline{x}$ ,  $\underline{p} = \underline{k}$  et  $\mathcal{H} = \Omega$ . Le Hamiltonien  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est une fonction de six variables.

Par conséquent, le champ  $\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$  est constant le long des rayons (propriété des systèmes dynamiques hamiltoniens autonomes que l'on peut vérifier facilement). On peut retrouver ce résultat en remarquant que la dérivation par rapport au temps de  $\Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}]$ , combinée à la relation  $\frac{\partial}{\partial t} \underline{k} + \underline{\text{grad}} \omega = 0$  permet d'écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \underline{\text{grad}} \omega = 0 . \quad (8.28)$$

### 3 Transport de l'énergie

En moyennant sur une période, locale dans le cas d'un paquet d'ondes, on montre que le flux moyen de "l'action", définie comme étant le quotient de l'énergie et de la pulsation, est le produit de la vitesse de groupe locale et de l'action. Les rayons, qui sont les lignes de champs de la vitesse de groupe, vont donc transporter l'énergie.

#### 3.1 Conservation de l'énergie le long des rayons

Dans le cas des petites oscillations d'une surface libre en milieu inhomogène de profondeur  $h_f(x, y)$ , on a vu que la densité volumique d'énergie  $W(\underline{x}, t)$  des ondes de surface et son flux  $\underline{I}(\underline{x}, t)$  étaient définis par les relations

$$W_{\text{cin}} = \int_{-h_f}^0 \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 dz , \quad W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 , \quad \underline{I} = \int_{-h_f}^0 \tilde{p} \underline{U}_H dz \quad (8.29)$$

et  $W = W_{\text{cin}} + W_{\text{pot}}$ , où  $\underline{U}_H = (u, v)$  est la projection horizontale du champ de vitesse  $\underline{U} = (u, v, w) = \underline{\text{grad}} \phi$  et  $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$  la pression dynamique, c'est-à-dire l'écart à la pression hydrostatique.

Dans le cas homogène  $h_f = h_r$  constant, une onde plane monochromatique  $\eta(\underline{x}, t) = \eta_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t}$  avec  $\eta_m \in \mathcal{C}$  constant est solution à condition que soit

vérifiée la relation de dispersion  $\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)}$  avec  $k = \|\underline{k}\|$ . On définit alors la moyenne d'un champ  $b$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$  par la relation

$$\langle b \rangle^T = \frac{1}{T} \int_0^T b dt . \quad (8.30)$$

On vérifie que l'on a

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T , \quad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho g |\eta_m|^2 = \frac{1}{8} \rho g H^2 . \quad (8.31)$$

où  $H = 2 \eta_m$  est la hauteur de la vague. On vérifie aussi la relation

$$\langle \underline{I} \rangle^T = c_g \langle W \rangle^T , \quad (8.32)$$

où  $c_g = c_\varphi [1/2 + k h_r / \sinh(2k h_r)]$  est la vitesse de groupe,  $c_\varphi = c_\varphi \underline{k} / k$  est la vitesse de phase avec  $c_\varphi(\underline{k}) = \Omega(\underline{k}) / k$ . Cette importante relation, qui se trouve être vérifiée pour tout type d'ondes (ondes sonores, ondes de gravité interne, ondes d'inertie, ...), permet d'affirmer que l'énergie voyage à la vitesse de groupe dans la mesure où son flux est dans sa direction.

Dans le cas d'une profondeur  $h_f(\underline{x})$  constante ou lentement variable en espace, on peut considérer les paquets d'ondes dispersés de la forme  $\eta(\underline{x}, t) = \eta_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)}$ , l'amplitude  $\eta_m$  pouvant être choisie réelle sans perte de généralité. Le vecteur d'onde local  $\underline{k}(\underline{x}, t) = \text{grad } \varphi(\underline{x}, t)$  permet de définir une période locale  $T(\underline{x}, t) = 2\pi/\omega(\underline{x}, t)$  où  $\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t)$  est la pulsation locale. On peut alors définir la moyenne locale  $\langle b \rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t)$  d'un champ  $b(\underline{x}, t)$  dans la mesure où l'on suppose que la période  $T(\underline{x}, t)$  varie sur une échelle de temps lente par rapport à sa valeur. On peut voir alors la solution  $\eta(\underline{x}, t)$  comme étant localement une onde monochromatique et calculer des quantités comme  $\langle W \rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \rho g \eta_m^2(\underline{x}, t)$ .

Le deuxième ordre de l'approximation WKB (parfois appelé ordre de l'optique physique), qui n'est pas développé ici, permet d'établir l'équation de conservation de l'action  $W/\omega$  moyennée sur une période qui s'écrit à l'aide des deux relations importantes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{W}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) + \text{div} \left\langle \frac{\underline{I}}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) = 0 \\ \text{avec} \quad & \left\langle \frac{\underline{I}}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) = c_g \left\langle \frac{W}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x}, t)}(\underline{x}, t) , \end{aligned} \quad (8.33)$$

où la moyenne est effectuée sur la période locale  $T(\underline{x}, t)$ . Cette équation complète le tracé de rayons dans les applications pratiques lorsque l'on s'intéresse à l'amplitude des ondes réfractées.

### 3.2 Réfraction et shoaling de la houle

On suppose qu'une onde incidente de fréquence constante  $\omega = 2\pi/T$  et d'amplitude constante se réfracte sur une bathymétrie  $h_f(x, y)$  lentement variable en espace. Comme la pulsation est constante le long des rayons, la pulsation  $\omega$  est constante partout. De plus, le tracé de rayons est stationnaire.

On considère un rayon passant par les points  $\underline{x}_A$  et  $\underline{x}_B$ , les vecteurs d'ondes en ces points étant respectivement  $\underline{k}_A$  et  $\underline{k}_B$ . On note  $\underline{c}_{gA} = \underline{c}_g(\underline{k}_A, \underline{x}_A)$  et  $\underline{c}_{gB} = \underline{c}_g(\underline{k}_B, \underline{x}_B)$  les vitesses de groupe respectives en ces points. On choisit un petit segment de longueur  $\delta l_A$  autour de  $\underline{x}_A$  et normal à la vitesse  $\underline{c}_{gA}$ . En suivant les rayons passant par les extrémités de ce segment (voir figure 8.7), on mesure la longueur  $\delta l_B$  du segment correspondant autour de  $\underline{x}_B$ . On a, par exemple,  $\delta l_B < \delta l_A$  si les rayons se rapprochent.

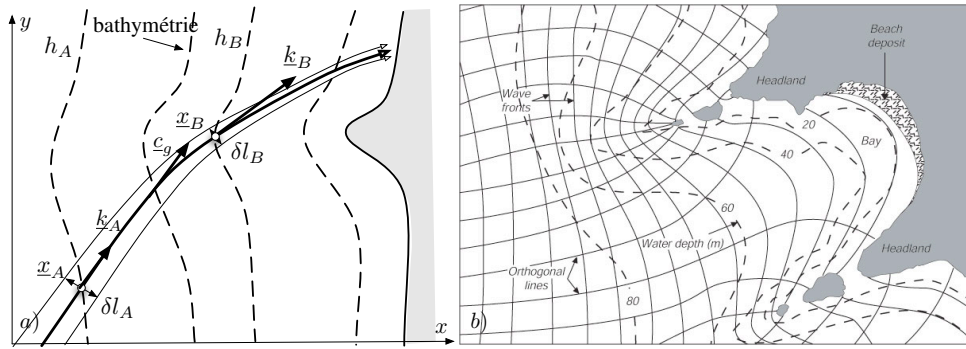


FIG. 8.7 – Réfraction de la houle sur une bathymétrie inhomogène. a) Explication des coefficients de shoaling  $K_s$  et de réfraction  $K_r$ . b) Cas réaliste.

Pour ce cas stationnaire, la loi de conservation de l'action, et donc de l'énergie puisque  $\omega$  est constant, s'écrit

$$\operatorname{div} \langle \underline{I} \rangle^T = 0 \quad \text{avec} \quad \langle \underline{I} \rangle^T = \underline{c}_g \langle W \rangle^T \quad (8.34)$$



sur la surface délimitée par les deux petits segments et les deux portions de rayons situées entre leurs extrémités, on peut écrire

$$\delta l_A c_{gA} \langle W \rangle^T(\underline{x}_A) = \delta l_B c_{gB} \langle W \rangle^T(\underline{x}_B), \quad (8.35)$$

où  $c_{gA}$  et  $c_{gB}$  sont les modules des vitesses de groupe. En notant  $H(\underline{x}) = 2\eta_m(\underline{x})$  le champ de hauteur de houle, on peut écrire  $\langle W \rangle^T = \frac{1}{8} \rho g H^2(\underline{x})$ . En notant  $H_A = H(\underline{x}_A)$  et  $H_B = H(\underline{x}_B)$ , peut donc écrire

$$\frac{H_B}{H_A} = K_s K_r \quad \text{avec} \quad K_s = \sqrt{\frac{c_{gA}}{c_{gB}}} \quad \text{et} \quad K_r = \sqrt{\frac{\delta l_A}{\delta l_B}}. \quad (8.36)$$

Le coefficient  $K_s$  est le coefficient de “shoaling”. Il explique la variation de la hauteur de la houle due à la modulation du fond. Le coefficient  $K_r$  est le coefficient de “réfraction”. Il explique la variation de la hauteur de la houle due au rapprochement ou à l'écartement des rayons.

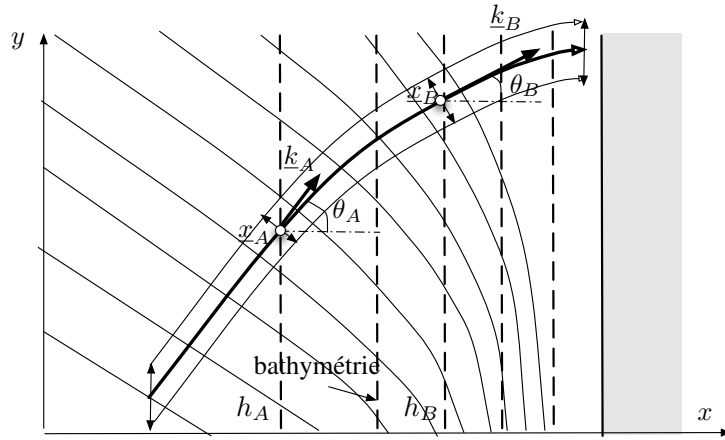


FIG. 8.8 – Réfraction sur une bathymétrie homogène en  $y$ .

À titre d'exemple, on considère le cas particulier où la profondeur  $h_f(\underline{x}) = h_f(x)$  ne dépend pas de la direction  $y$  (voir figure 8.8). La relation de dispersion s'écrit alors

$$\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g k \tanh[k h_f(x)]} \quad \text{avec} \quad k = \|\underline{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (8.37)$$

Le tracé de rayons  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ , où  $\underline{k}(t)$  est le vecteur d'onde du champ d'ondes au point  $\underline{x}(t)$ , est obtenu en résolvant les équations

$$\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_y}, \quad \dot{k}_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dot{k}_y = 0, \quad (8.38)$$

où  $\Omega$  désigne  $\Omega[k_x(t), k_y(t), x(t)]$ . On définit les coordonnées polaires  $(k, \theta)$  d'un vecteur d'onde  $\underline{k}$  par les relations  $k_x = k \cos \theta$  et  $k_y = k \sin \theta$ . On considère deux points  $A$  et  $B$  de coordonnées  $\underline{x}_A$  et  $\underline{x}_B$  appartenant à un même rayon. On note  $\underline{k}_A$  et  $\underline{k}_B$  les vecteurs d'ondes aux points  $A$  et  $B$  et  $(k_A, \theta_A)$  et  $(k_B, \theta_B)$  les coordonnées polaires associées. Comme  $\dot{k}_y = 0$ , on a  $k_{2A} = k_{2B}$ , ce qui s'écrit  $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$ . En écrivant que les rayons se déduisent les uns des autres par une translation dans la direction  $y$ , un simple raisonnement géométrique permet de calculer que  $K_r = \sqrt{\cos \theta_A / \cos \theta_B}$ .

Dans le cas des ondes de surface en milieu peu profond, on a  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(x) k$  où  $k$  est le module de  $\underline{k}$  et  $c(x) = \sqrt{g h_f(x)}$  ne dépend pas de  $y$ . On appelle "indice de réfraction" le nombre  $n(x) = c_r / c(x)$  où  $c_r = \sqrt{g h_r}$  est une vitesse de référence constante.

Comme  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est constant le long d'un rayon, on a  $c_A k_A = c_B k_B$ . On en déduit la loi de Snell qui s'écrit

$$\frac{\sin \theta_A}{c_A} = \frac{\sin \theta_B}{c_B} \quad \Longleftrightarrow \quad n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B, \quad (8.39)$$

où  $n_A$  et  $n_B$  sont les indices de réfraction des points  $A$  et  $B$ . Dans la mesure où l'on a  $c_g(x) = c(x)$ , on peut écrire  $K_s^2 = c_A / c_B = \sin \theta_A / \sin \theta_B$ . En effectuant le produit  $K_r K_s$ , on trouve alors que  $H_B / H_A = \sqrt{\sin(2\theta_A) / \sin(2\theta_B)}$ .

### 3.3 Critères de déferlement

L'étude de la fonction  $\tanh \xi$  avec  $\xi = 2\pi h_f / L$  qui intervient dans la relation de dispersion des ondes de surface montre qu'une houle de longueur d'onde  $L = 2\pi/k$  pour une profondeur  $h_f$  peut être considérée en "eaux peu profondes" si  $h_f / L \leq \frac{1}{20}$  et en "eaux profondes" si  $h_f / L \geq \frac{1}{2}$ .

Si  $H$  est la hauteur de la houle, on définit sa cambrure comme étant  $H/L$ . Le déferlement de la houle dépend des trois longueurs  $H$ ,  $L$  et  $h_f$ . On utilise souvent, pour des applications pratiques, le critère de déferlement de Miche qui s'écrit

$$\frac{H}{L} = 0.14 \tanh\left(\frac{2\pi h_f}{L}\right) = 0.14 \tanh(k h_f), \quad (8.40)$$

Dans la limite des eaux profondes, cette condition rejoint le critère de Michell qui s'écrit  $H/L = 0.14$ . Dans la limite des eaux peu profondes cette condition

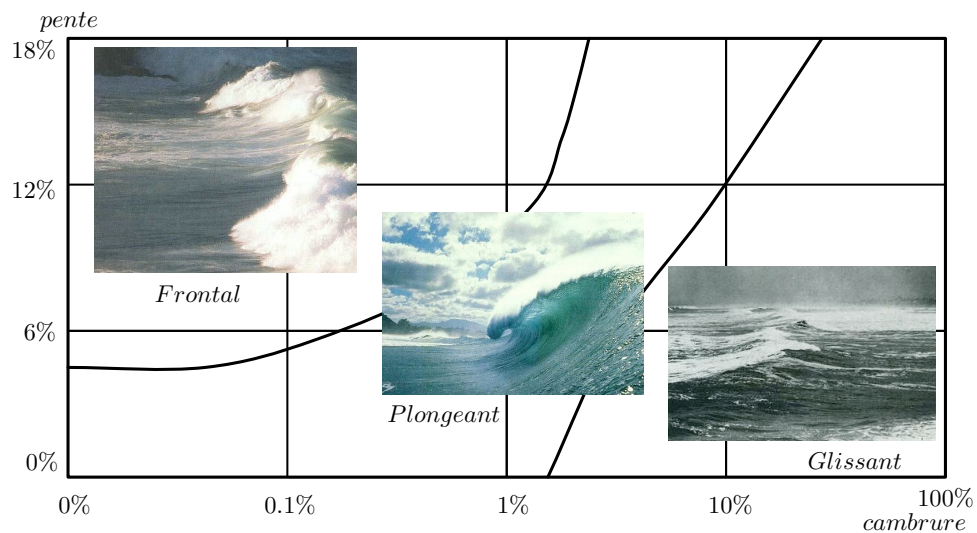


FIG. 8.9 – Types de déferlement dans le plan (cambrure, pente).

s'écrit  $H/h_f = 0.88$ , qui est proche du critère de Munk  $H/h_f = 0.78$  obtenu en tenant compte du caractère non linéaire des vagues au moment du déferlement.

Par ailleurs, les différents types de déferlement peuvent être classifiés dans un diagramme faisant intervenir la cambrure et la pente de la plage (voir figure 8.9).

## FORMULAIRE

### Propriétés des ondes de surface

Relation de dispersion :

$$\omega = \Omega(\underline{k}) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} \quad \text{avec} \quad k = \|\underline{k}\| .$$

Équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial t^2} - \operatorname{div}_H \left[ c^2(\underline{x}) \operatorname{grad}_H \phi_H \right] = 0 .$$

Énergie des ondes :

$$W_{\text{cin}} = \int_{-h_f}^0 \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 dz , \quad W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \quad \text{et} \quad \underline{I} = \int_{-h_f}^0 \tilde{p} \underline{U}_H dz .$$

### Tracé de rayons

Paquet dispersé :

$$\eta(\underline{x}, t) = \eta_m(\underline{x}, t) e^{i\varphi(\underline{x}, t)} \quad \text{avec} \quad \underline{x} = (x, y) .$$

Grandeurs locales :

$$\omega(\underline{x}, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \underline{k}(\underline{x}, t) = \operatorname{grad} \varphi(\underline{x}, t) .$$

Équation de l'Eikonale :

$$\omega(\underline{x}, t) = \Omega[\underline{k}(\underline{x}, t), \underline{x}] .$$

Transport de  $\underline{k}$  :

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial t} + \underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) \cdot \operatorname{grad} \underline{k} = -\operatorname{grad}_x \Omega(\underline{k}, \underline{x}) .$$

### Transport de l'énergie

Ondes monochromatiques :

$$\langle W_{\text{cin}} \rangle^T = \langle W_{\text{pot}} \rangle^T , \quad \langle W \rangle^T = \frac{1}{2} \rho g |\eta_m|^2 = \frac{1}{8} \rho g H^2 .$$

Conservation de l'action :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{W}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x},t)} + \operatorname{div} \left\langle \frac{I}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x},t)} = 0 \quad \text{avec} \quad \left\langle \frac{I}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x},t)} = c_g \left\langle \frac{W}{\omega} \right\rangle^{T(\underline{x},t)} .$$

Réfraction et shoaling :

$$\frac{H_B}{H_A} = K_s K_r \quad \text{avec} \quad K_s = \sqrt{\frac{c_{gA}}{c_{gB}}} \quad \text{et} \quad K_r = \sqrt{\frac{\delta l_A}{\delta l_B}} .$$

Critère de déferlement Miche :

$$\frac{H}{L} = 0.14 \tanh \left( \frac{2\pi h_f}{L} \right) = 0.14 \tanh(k h_f) .$$

## EXERCICES

### EXERCICE 8.1 Loi de Snel

On considère un milieu 2D inhomogène caractérisé par une relation de dispersion  $\omega = \Omega(k_x, k_y, x)$  indépendante de la coordonnée  $y$ . On considère un champ d'ondes suffisamment dispersé pour que l'équation de l'Eikonale soit valide et l'on s'intéresse à une région de l'espace où les rayons ne se coupent pas.

- 1) Écrire le système dynamique régissant le tracé d'un rayon  $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$  où  $\underline{k}(t)$  est le vecteur d'onde du champ d'ondes au point  $\underline{x}(t)$ .

Le tracé de rayon est obtenu en résolvant les équations  $\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_x}$ ,  $\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_y}$ ,  $\dot{k}_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$  et  $\dot{k}_y = 0$  où  $\Omega$  désigne  $\Omega[k_x(t), k_y(t), x(t)]$ .

- 2) On définit les coordonnées polaires  $(k, \theta)$  d'un vecteur d'onde  $\underline{k}$  par les relations  $k_x = k \cos \theta$  et  $k_y = k \sin \theta$ . On considère deux points  $A$  et  $B$  de coordonnées  $\underline{x}_A$  et  $\underline{x}_B$  appartenant à un même rayon. On note  $\underline{k}_A$  et  $\underline{k}_B$  les vecteurs d'ondes aux points  $A$  et  $B$  et  $(k_A, \theta_A)$  et  $(k_B, \theta_B)$  les coordonnées polaires associées. Démontrer que  $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$ .

| Comme  $\dot{k}_y = 0$ , on a  $k_{yA} = k_{yB}$ , ce qui s'écrit  $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$ .

- 3) On suppose maintenant que la relation de dispersion s'écrit  $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(x) k$  où  $k$  est le module de  $\underline{k}$  et  $c(x) > 0$  ne dépend pas de  $y$ . On appelle "indice de réfraction" le nombre  $n(\underline{x}) = c_0/c(x)$  où  $c_0$  est une vitesse de référence constante. Démontrer la loi de Snell  $n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B$  où  $n_A$  et  $n_B$  sont les indices de réfraction des points  $A$  et  $B$ .

| Comme  $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$  est constant le long d'un rayon, on a  $c_A k_A = c_B k_B$ . On en déduit  $\frac{\sin \theta_A}{c_A} = \frac{\sin \theta_B}{c_B}$  ou encore  $n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B$ .

### EXERCICE 8.2 Tsunamis

Un tremblement de terre abaisse la surface de l'océan d'une hauteur  $H_0 = 1$  m sur un disque de rayon  $r_0 = 100$  km à une distance  $d = 1600$  km de la côte où la profondeur de l'océan est  $h_0 = 4000$  m. On étudie le tsunami généré par cet effondrement.

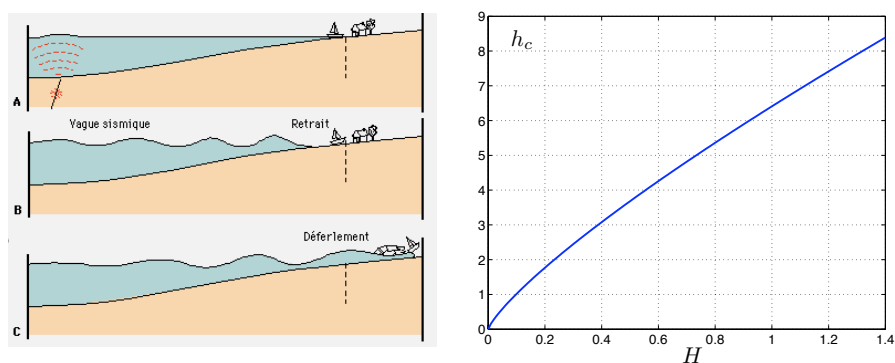


FIG. 8.10 – a) Schéma d'un tsunami. b) Fonction  $h_c(H) = h_0^{1/5} \left(\frac{H}{0.78}\right)^{4/5}$  pour  $h_0 = 4$  km.

- 1) À quelle profondeur  $h_c$  le tsunami déferle-t-il et quelle est la surcote  $H_c$  qui inonde le rivage? Que deviennent ces valeurs pour  $H_0 = 4$  m? On pourra utiliser le graphique de la figure 8.10b.

Comme  $r_0/d = 25 \geq 20$ , on peut considérer que l'océan est peu profond pour ce tsunami. On a donc  $K_r = \sqrt{r_0/d} = 0.25$  au voisinage de la côte et  $K_s = (h_0/h_f)^{1/4}$  partout. Le critère de déferlement de Munk  $H_c = 0.78 h_c$  et la relation  $H = K_r K_s H_0$  conduisent à  $h_c = h_0^{1/5} \left(\frac{H_r}{0.78}\right)^{4/5}$  avec  $H_r = K_r H_0 = \sqrt{r_0/d} H_0 = 25$  cm. On lit  $h_c = 2$  m sur la figure 8.10b et on a  $H_c = 0.78 h_c = 1.6$  m. Pour  $H_0 = 4$  m, on a  $H_r = 1$  m,  $h_c = 6.5$  m et  $H_c = 5$  m.

### EXERCICE 8.3 Déferlement de la houle sur une plage

On considère une houle monochromatique de période  $T = 10$  s dont les rayons sont perpendiculaires aux isobathes  $h_f(x) = \beta x$  avec  $\beta = 0.1$ .

- 1) Quelle est la longueur d'onde  $L_0$  au large? Montrer que  $c_{g0} = \frac{g}{2\omega}$  au large. À quelles profondeurs déferlent les houles de hauteurs respectives au large  $H_0 = 1$  m et  $H_0 = 4$  m? On pourra utiliser le tracé graphique des fonctions de la figure 8.11.

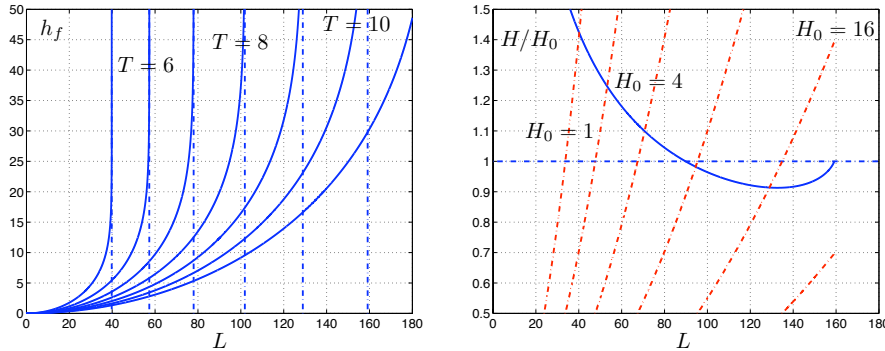


FIG. 8.11 – a) Fonction  $h_f(T, L) = \frac{L}{2\pi} \operatorname{argth} \left( \frac{2\pi L}{g T^2} \right)$  pour les périodes  $T = 5, 6, \dots, 11$  s. b) Fonction  $K_s(T, L) = H(T, L)/H_0 = \sqrt{\frac{g T^2}{4\pi L} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}}$  pour la période  $T = 10$  s et critère de Miche  $H_c(T, L)/H_0 = 0.14 L \tanh[2\pi h_f(T, L)/L]/H_0$  pour les hauteurs au large  $H_0 = 1, 2, 4, \dots, 32$  m.

Au large, le milieu est profond et on a  $\omega = \sqrt{gk_0}$  ce qui entraîne  $k_0 = \omega^2/g$  et donc  $L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 160$  m. La vitesse de groupe est  $c_{g0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0}} = \frac{g}{2\omega}$ . Comme  $\omega = 2\pi/T$  est constant le long des rayons, la longueur d'onde  $L = 2\pi/k$  dépend de la profondeur  $h_f$  à travers l'équation  $\omega^2 = gk \tanh(kh_f)$  dont on déduit la fonction  $h_f(T, L) = \frac{1}{k} \operatorname{argth}\left(\frac{\omega^2}{gk}\right) = \frac{1}{2\pi/L} \operatorname{argth}\left(\frac{4\pi^2/T^2}{2\pi g/L}\right)$ . Le coefficient de shoaling est  $K_s(T, L) = \sqrt{c_{g0}/c_g}$  avec  $c_{g0}(T) = \frac{g}{4\pi/T}$  et  $c_g(T, L) = \frac{2\pi/T}{2\pi/L} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}$ . On a donc  $H = K_r K_s H_0$  avec  $K_r = 1$  et  $K_s(T, L) = \sqrt{\frac{2\pi g/L}{8\pi^2/T^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}}$ . Le critère de Miche prévoit le déferlement pour la longueur d'onde  $L_c$  solution de l'équation implicite  $H_c(T, L) = 0.14 L \tanh[2\pi h_f(T, L)/L]$ . Pour  $H_0 = 1$  m, on lit  $K_s = 1.4$  et  $L_c = 40$  m sur la figure 8.11b puis  $h_c = 3$  m sur la figure 8.11a. Comme la cambrure est  $H_c/L_c = K_s H_0/L_c = 3.5\%$  et que la pente du fond est de 10 %, le déferlement est plongeant. On lit de même  $L_c = 65$  m,  $h_c = 4$  m et  $K_s = 1.1$  pour  $H_0 = 4$  m. La cambrure est  $H_c/L_c = K_s H_0/L_c = 7\%$  et le déferlement est plutôt glissant que plongeant.

- 2) Quelle est l'ordre de grandeur de la puissance disponible dans un houle arrivant sur une côte de longueur  $d = 100$  km avec  $T = 10$  s et  $H_0 = 1$  m.

La puissance est  $P = c_{g0} W d = \left(\frac{gT}{4\pi}\right) \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) d \sim 10^9$  W, soit 1 000 MW.

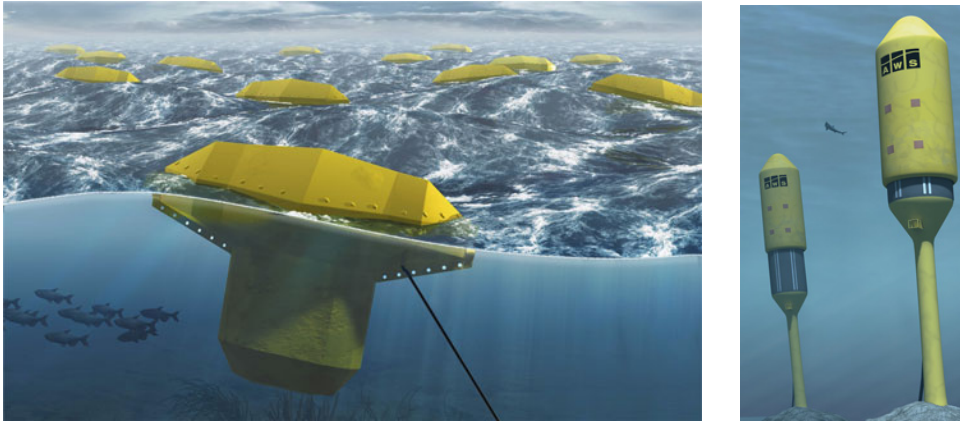


FIG. 8.12 – Récupération de l'énergie de la houle. a) Project SEAREV, École Centrale de Nantes. b) Bouées AWS.



## NOTATIONS

$\underline{a}$	Position initiale d'un rayon (m)
$\langle B \rangle^T$	Champ $B$ moyenné sur la période $T$
$C(t)$	Constante dépendant du temps uniquement ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\cosh$	Cosinus hyperbolique ()
$\underline{c}_\varphi$	Vitesse de phase ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_\varphi$	Module de la vitesse de phase ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{c}_g$	Vitesse de groupe ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_g$	Module de la vitesse de groupe ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_{gA}$	Vitesse de groupe en $A$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_{gB}$	Vitesse de groupe en $B$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c_r$	Vitesse constante ( $\text{m s}^{-1}$ )
$c$	Vitesse $\sqrt{g h_f}$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\text{div}$	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs ( $\text{m}^{-1}$ )
$\text{div}_H$	Divergence horizontale ( $\text{m}^{-1}$ )
$\frac{d}{dt}$	Dérivée particulaire $\frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad}$ ( $\text{s}^{-1}$ )
$\delta l_A$	Petit élément de longueur autour de $A$ (m)
$\delta l_B$	Petit élément de longueur autour de $B$ (m)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$\underline{e}_k$	Vecteur unitaire $\underline{k}/k$ ()
$g$	Gravité ( $\text{m s}^{-2}$ )
$\text{grad}$	Opérateur gradient d'un champ scalaire ( $\text{m}^{-1}$ )
$\text{grad}_x$	Gradient par rapport à $x$ ( $\text{m}^{-1}$ )
$\text{grad}_k$	Gradient par rapport à $k$ ( $\text{m}^{-1}$ )
$\text{grad}_H$	Opérateur gradient horizontal ( $\text{m}^{-1}$ )
$\mathcal{H}$	Hamiltonien
$H$	Hauteur de houle (m)
$H_A$	Hauteur de houle en $A$ (m)
$H_B$	Hauteur de houle en $B$ (m)
$h_f(x, y)$	Profondeur variable de la couche d'eau (m)
$h_r$	Profondeur constante (m)
$\underline{I}$	Flux d'énergie ( $\text{N s}^{-1}$ )
$KdV$	Korteweg de Vries
$K_r$	Coefficient de réfraction ()
$K_s$	Coefficient de shoaling ()
$\underline{k} = (k_x, k_y)$	Vecteur d'onde ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}_*$	Vecteur d'onde au temps $t_*$ ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}_A$	Vecteur d'onde en $A$ ( $\text{m}^{-1}$ )

$\underline{k}_B$	Vecteur d'onde en $B$ ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}(\underline{x}, t)$	Vecteur d'onde local ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}_0(\underline{x})$	Condition initiale ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}_S(s)$	Condition aux limites ( $\text{m}^{-1}$ )
$\underline{k}(t)$	Trajectoire d'un système dynamique ( $\text{m}^{-1}$ )
$\dot{\underline{k}}(t)$	Dérivée de $\underline{k}(t)$ ( $\text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$ )
$k$	Module du vecteur d'onde ( $\text{m}^{-1}$ )
$k_0$	Valeur constante de $k$ ( $\text{m}^{-1}$ )
$L(\underline{x}, t)$	Longueur d'onde locale (m)
$\mathcal{S}$	Courbe dans le plan $(x, y)$
$\text{Ln}$	Logarithme népérien ()
$\underline{N}$	Terme non linéaire de flux d'énergie ( $\text{N s}^{-1}$ )
$n(\underline{x})$	Indice de réfraction ()
$p$	Champ de pression (Pa)
$p_a$	Pression atmosphérique (Pa)
$\tilde{p}$	Perturbation du champ de pression (Pa)
$\underline{p}$	Vecteur de composantes $p_i$
$\underline{q}$	Vecteur de composantes $q_i$
$r$	Coordonnée radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (m)
$\sinh$	Sinus hyperbolique ()
$s$	Coordonnée curviligne (m)
$\mathcal{T}$	Échelle caractéristique du temps lent (s)
$T(\underline{x}, t)$	Période locale (s)
$t$	Temps (s)
$t_*$	Temps particulier (s)
$\tanh$	Tangente hyperbolique ()
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{U} \cdot \text{grad}$	Opérateur de dérivation suivant $\underline{U}$ ( $\text{s}^{-1}$ )
$\underline{U}_H = (u, v)$	Champ de vitesse horizontale ( $\text{m s}^{-1}$ )
$V$	Potentiel gravitationnel (N/m)
$W_{\text{cin}}$	Énergie cinétique (N/m)
$W_{\text{pot}}$	Énergie potentielle (N/m)
$W$	Énergie totale (N/m)
WKB	Wentzel, Kramer et Brillouin
$x, y, z$	Coordonnées spatiales (m)
$\underline{x} = (x, y)$	Coordonnées spatiales horizontales (m)
$\underline{x}_*$	Point particulier (m)
$\underline{x}_A$	Coordonnées du point $A$ (m)

$\underline{x}_B$	Coordonnées du point $B$ (m)
$\underline{x}(t)$	Trajectoire d'un système dynamique (m)
$\dot{\underline{x}}(t)$	Dérivée de $\underline{x}(t)$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{x}_{\mathcal{S}}(s)$	Paramétrage curviligne de la courbe $\mathcal{S}$ (m)
$x_0$	Valeur constante (m)
$z_G$	Altitude du centre de gravité (m)
$\alpha_0$	Coefficient de la relation de dispersion de KdV ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\alpha(x)$	Coefficient variable ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\beta_0$	Coefficient de la relation de dispersion de KdV ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
$\beta(x)$	Coefficient variable ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
$\Delta$	Opérateur Laplacien ( $\text{m}^{-2}$ )
$\zeta(x, y)$	Vorticité verticale ( $\text{s}^{-1}$ )
$\eta(x, y, t)$	Élévation de la surface libre (m)
$\eta_d$	Amplitude réelle constante (m)
$\eta_m$	Amplitude complexe constante (m)
$\eta_m(\underline{x}, t)$	Amplitude complexe variable (m)
$\theta_A$	Angle de $\underline{k}_A$ avec $\underline{e}_x$ (°)
$\theta_B$	Angle de $\underline{k}_B$ avec $\underline{e}_x$ (°)
$\mathcal{L}$	Échelle de variation spatiale lente (m)
$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\tau$	Variable de temps lente $\tau = \epsilon t$ (s)
$\phi(\underline{x}, t)$	Potentiel du champ de vitesse $\underline{U}$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\phi_H(x, y, t)$	Potentiel du champ de vitesse horizontale $\underline{U}_H$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\Phi(z)$	Profil en $z$ de $\phi$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\Phi_m$	Amplitude complexe ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\varphi$	Phase d'un paquet d'ondes (°)
$\chi$	Variable d'espace lente $\chi = \epsilon x$ (m)
$\Omega(\underline{k})$	Relation de dispersion en milieu homogène ( $\text{s}^{-1}$ )
$\Omega(\underline{k}, \underline{x})$	Relation de dispersion locale ( $\text{s}^{-1}$ )
$\omega$	Pulsation ( $\text{s}^{-1}$ )
$\omega(\underline{x}, t)$	Pulsation locale ( $\text{s}^{-1}$ )