

Chapitre 7

Ondes de surface

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

1	Génération des ondes de surface	3
1.1	Relation de dispersion généralisée	3
1.2	Dynamique linéaire d'un écoulement cisailé	5
1.3	Cas des profondeurs infinies	6
2	Dispersion de la houle	7
2.1	Relation de dispersion	8
2.2	Champs oscillants de la houle	9
2.3	Trajectoires des particules	10
3	Problèmes aux conditions initiales	11
3.1	Décomposition en ondes monochromatiques	11
3.2	Paquets d'ondes localisés en espace	13
3.3	Réponse impulsionnelle	14

Introduction

Ce chapitre présente les notions de base permettant de comprendre le mécanisme de génération de la houle sous l'action du vent ainsi que sa dynamique linéaire en l'absence de forçage. Ce problème est idéalisé par le calcul de stabilité linéaire de l'écoulement cisailé de deux fluides parfaits de masse volumiques différentes. Ce calcul conduit aussi bien à la relation de dispersion généralisée de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qu'à la relation de dispersion des ondes de gravité externes, c'est-à-dire la houle linéaire.



FIG. 7.1 – Vagues générées par le vent lors d'une tempête. Photo de Flavie Jactel.

La description du champ de vitesse de ces ondes linéaires est explicitée. La dispersion des ondes est mise en évidence à travers l'analyse d'un paquet d'ondes, la vitesse de groupe étant plus lente que la vitesse de phase. La réponse impulsionnelle du milieu dispersif constitue une autre illustration du rôle de la vitesse de groupe.

Ces notions nécessitent quelques développements mathématiques comme la

“méthode de la phase stationnaire” qui sont un point de passage obligé pour la compréhension de la dispersion des ondes.

1 Génération des ondes de surface

Lorsque le vent souffle suffisamment fort sur la surface de l’océan, on observe une instabilité qui conduit à la formation de vagues. On dérive ici la “relation de dispersion généralisée” qui décrit le taux de croissance et la pulsation des ondes en fonction des paramètres du forçage.

1.1 Relation de dispersion généralisée

On considère deux couches fluides superposées de masses volumiques ou de vitesses différentes. En présence d’un cisaillement de vitesse, on va voir qu’il peut se développer des instabilités ou simplement des oscillations de la surface libre autour d’un état d’équilibre.

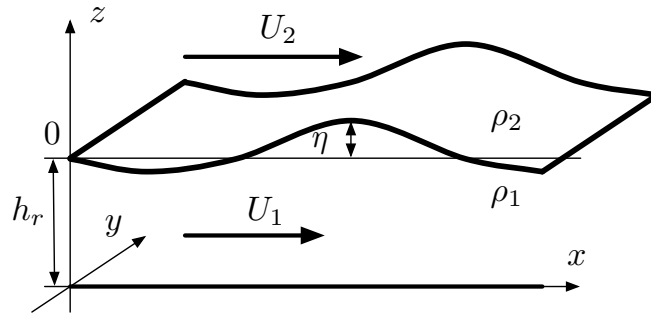


FIG. 7.2 – Deux couches fluides superposées avec un fond en $z = -h_r$.

Nous supposons ici que les fluides sont parfaits et incompressibles et nous notons ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des fluides respectivement situés en bas et en haut. La dynamique est modélisée par les équations d’Euler incompressibles

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U}_1 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_1 = -\frac{1}{\rho_1} \operatorname{grad} p_1 - g \underline{e}_z, \\ \operatorname{div} \underline{U}_2 = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}_2}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \operatorname{grad} \underline{U}_2 = -\frac{1}{\rho_2} \operatorname{grad} p_2 - g \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (7.1)$$

où $\underline{U}_1(\underline{x}, t) = (u_1, v_1, w_1)$ et $\underline{U}_2(\underline{x}, t) = (u_2, v_2, w_2)$ sont les champs de vitesse et $p_1(\underline{x}, t)$ et $p_2(\underline{x}, t)$ les champs de pression. Le vecteur unitaire \underline{e}_z est vertical et g est l'intensité de la gravité.

On suppose que la géométrie du problème induit les conditions aux limites

$$\underline{U}_1 \cdot \underline{e}_z = 0 \quad \text{pour } z = -h_r \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x, \quad (7.2)$$

où \underline{e}_x est un vecteur unitaire horizontal et \underline{e}_z le vecteur unitaire vertical.

On suppose que l'équation de la surface libre est $F(\underline{x}, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$, ce qui exclut les déformations de type déferlement. Les deux conditions aux limites cinématiques, qui s'écrivent $\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}} F = 0$, expriment que la dérivée particulaire de F est nulle pour les deux mouvements. La condition dynamique $p_1 = p_2$ s'obtient en assurant la continuité des efforts de contact et en négligeant donc l'effet de tension superficielle. Les conditions à l'interface des deux fluides s'écrivent alors

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_1, \quad p_1 = p_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{U}_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta = w_2. \quad (7.3)$$

On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chacune des couches fluides ($\underline{\text{rot}} \underline{U}_1 = \underline{\text{rot}} \underline{U}_2 = \underline{0}$), ce qui permet d'écrire les champs de vitesse sous la forme

$$\underline{U}_1 = \underline{\text{grad}} (U_1 x + \phi_1) \quad \text{et} \quad \underline{U}_2 = \underline{\text{grad}} (U_2 x + \phi_2), \quad (7.4)$$

où U_1 est une vitesse constante que l'on souhaite considérer comme état de base pour la couche inférieure. Le système d'équations s'écrit alors

$$\begin{aligned} \Delta \phi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_1)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g z \right] &= \underline{0}, \\ \Delta \phi_2 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\text{grad}} \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \phi_2)^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g z \right] &= \underline{0}. \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_r \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \underline{\text{grad}} \phi_2 = \underline{0} \quad , \\ \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_1 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \underline{\text{grad}} \phi_2 \cdot \underline{\text{grad}} \eta &= \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{et} \quad p_1 = p_2 \quad \text{en } z = \eta. \end{aligned}$$

Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont respectivement définis à une “constante” (en espace) $C_1(t)$ et $C_2(t)$ près, on peut choisir une pression de référence p_r arbitraire permettant d’éliminer la pression en écrivant

$$\begin{aligned} p_1 &= p_r - \rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_1)^2 + g z \right], \\ p_2 &= p_r - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi_2)^2 + g z \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

1.2 Dynamique linéaire d’un écoulement cisailé

On s’intéresse à l’état de base $\underline{U}_1 = U_1 \underline{e}_x$, $\underline{U}_2 = U_2 \underline{e}_x$ et $\eta = 0$. La pression est alors $p_0(z) = p_r - \rho_1 g z$ pour $z \leq 0$ et $p_0(z) = p_r - \rho_2 g z$ pour $z \geq 0$ où p_r est une pression de référence arbitraire.

On linéarise autour de cet état de base en posant $p_1 = p_0(z) + \tilde{p}_1$ pour $z \leq 0$, $p_2 = p_0(z) + \tilde{p}_2$ pour $z \geq 0$, et en supposant que \tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 , η , ϕ_1 et ϕ_2 sont des petites perturbations. La linéarisation conduit à négliger les termes non linéaires dans les équations mais aussi à remplacer les conditions aux limites sur la surface mobile d’équation $z = \eta(x, y, t)$ par des conditions aux limites sur la surface fixe d’équation $z = 0$. En effet, pour un champ quelconque $f(x, y, z, t)$ on peut écrire

$$f[x, y, \eta(x, y, t), t] = f(x, y, 0, t) [1 + O(\eta)]. \quad (7.6)$$

Le modèle linéaire est alors constitué des équations de Laplace $\Delta \phi_1 = \Delta \phi_2 = 0$ dans les fluides avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0 \text{ en } z = -h_r & \text{et} & & \lim_{z \rightarrow +\infty} \text{grad } \phi_2 &= \underline{0}, \\ \text{en } z = 0 : & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, & p_1 = p_2 & , & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

En remplaçant la pression par sa valeur et en linéarisant, la condition $p_1 = p_2$ s’écrit

$$\rho_1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 + g \eta \right] = \rho_2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 + g \eta \right] \text{ en } z = 0. \quad (7.7)$$

Dans la mesure où le problème est invariant par translations en temps et en espace dans les directions horizontales, on cherche des solutions complexes sous la forme

$$(\phi_1, \eta, \phi_2) = [\Phi_1(z), \eta_m, \Phi_2(z)] e^{ik_x x + ik_y y + st}, \quad (7.8)$$

avec $s = \sigma - i\omega$. On note $\underline{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde horizontal. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, les parties réelles de ces solutions sont aussi solutions.

L'écoulement de base est instable s'il existe des solutions dont le taux de croissance temporel σ est positif. Dans le cas où $\sigma = 0$, on obtient des ondes de pulsation ω .

On note ici $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Le problème à résoudre est donc

$$\begin{aligned} \Phi_1'' - k^2 \Phi_1 &= 0 & \text{et} & & \Phi_2'' - k^2 \Phi_2 &= 0 & \text{avec} \\ (s + i k_x U_1) \eta_m &= \Phi_1'(0) & \text{et} & & (s + i k_x U_2) \eta_m &= \Phi_2'(0) , \\ \rho_1 [(s + i k_x U_1) \Phi_1(0) + g \eta_m] &= & \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_2(0) + g \eta_m] , \\ \Phi_1'(-h_r) &= 0 & \text{et} & & \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2'(z) &= 0 . \end{aligned} \quad (7.9)$$

On en déduit $\Phi_1(z) = \Phi_{1m} \cosh[k(z+h_r)]$ et $\Phi_2(z) = \Phi_{2m} e^{-kz}$, les amplitudes complexes Φ_{1m} et Φ_{2m} vérifiant le système d'équations

$$\begin{aligned} (s + i k_x U_1) \eta_m &= \Phi_{1m} k \sinh(k h_r) & \text{et} & & (s + i k_x U_2) \eta_m &= -\Phi_{2m} k , \\ \rho_1 [(s + i k_x U_1) \Phi_{1m} \cosh(k h_r) + g \eta_m] &= & \rho_2 [(s + i k_x U_2) \Phi_{2m} + g \eta_m] . \end{aligned}$$

En reportant les valeurs de Φ_{1m} et Φ_{2m} en fonction de η_m et en simplifiant par η_m , on obtient la relation de dispersion généralisée

$$\rho_1 \left[g k + \frac{(s + i k_x U_1)^2}{\tanh(k h_r)} \right] = \rho_2 \left[g k - (s + i k_x U_2)^2 \right] . \quad (7.10)$$

1.3 Cas des profondeurs infinies

On considère tout d'abord le cas où la profondeur est infinie, c'est-à-dire la limite $kh_r \rightarrow \infty$. L'équation de dispersion s'écrit alors

$$\rho_1 \left[g k + (s + i k_x U_1)^2 \right] = \rho_2 \left[g k - (s + i k_x U_2)^2 \right] . \quad (7.11)$$

On montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équilibre soit instable est

$$g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 . \quad (7.12)$$

Si ρ_1 est plus grand que ρ_2 (couche lourde en bas), on voit donc que l'écoulement n'est instable que si $U_1 \neq U_2$ (instabilité de Kelvin-Helmholtz) et

on montre que les modes de petites longueurs d'ondes (grands k) sont les plus instables. Une modélisation plus physique consiste alors à prendre en compte la viscosité qui a pour effet de dissiper l'énergie aux petites échelles et de mettre en avant des échelles instables de taille finie (figure 7.3a).

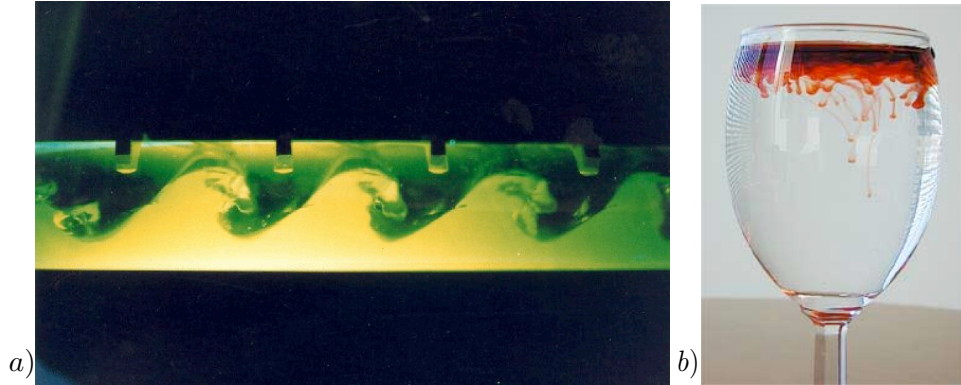


FIG. 7.3 – a) *Instabilité de Kelvin-Helmholtz. Photo LADHYX.* b) *Instabilité de Rayleigh-Taylor. Photo de J. Riordon.*

Dans le cas particulier $U_1 = U_2 = 0$, la relation de dispersion généralisée s'écrit

$$\rho_1 (gk + s^2) = \rho_2 (gk - s^2) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} gk. \quad (7.13)$$

Si $U_1 = U_2 = 0$ et que ρ_1 est plus grand que ρ_2 , les deux racines s_1 et s_2 sont imaginaires pures et le système est marginal (oscillations). Les ondes qui se développent à l'interface des deux fluides sont des ondes de gravité.

Si $U_1 = U_2 = 0$ et que ρ_2 est plus grand que ρ_1 , c'est-à-dire si le fluide du haut est le plus lourd, il existe une famille de modes instables (instabilité de Rayleigh-Taylor) dont le taux de croissance augmente avec k . Il faut alors enrichir le modèle avec des termes de dissipation qui vont stabiliser les très petites échelles et sélectionner l'échelle des ondes instables (figure 7.3b).

2 Dispersion de la houle

Une tempête en haute mer génère des ondes de surface de nombres d'onde différents. Les crêtes de ces ondes vont alors se propager à des vitesses de phase

différentes. Un ensemble d'ondes de nombres d'onde voisins forme un paquet d'ondes qui se déplace à la vitesse de groupe. Comme la dissipation affecte moins les vagues de grande longueur d'ondes, ce sont elles qui constituent les paquets d'ondes qui atteignent le littoral.

2.1 Relation de dispersion

On considère désormais le cas des profondeurs quelconques et on suppose que $\rho_1 \gg \rho_2$. C'est le cas de la houle forcée par le vent et l'on voit, à partir de la relation (7.12), que l'instabilité est obtenue pour des vitesses U_2 très grandes ou bien en observant le phénomène sur des temps très longs. C'est pourquoi le développement d'une mer agitée ne s'observe qu'au bout d'une grande distance, appelée "fetch", sur laquelle le vent doit souffler de manière significative.

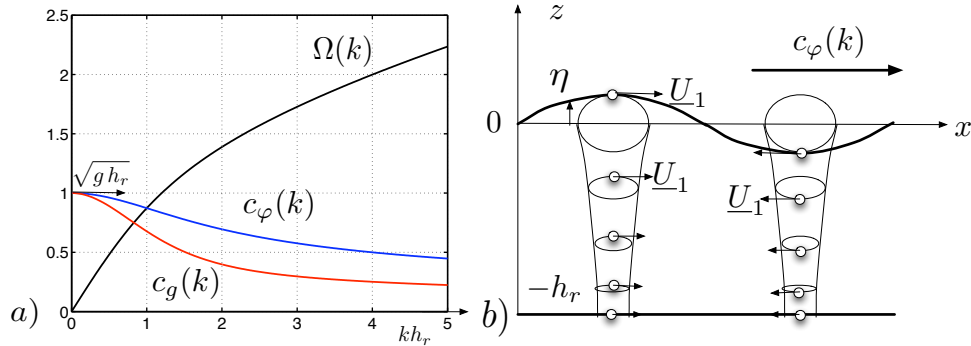


FIG. 7.4 – a) Relation de dispersion $\Omega(k)$, vitesse de phase $c_\varphi(k)$ et vitesse de groupe $c_g(k)$ pour les ondes de surface. b) Onde monochromatique et mouvement des particules.

Lorsque le vent est retombé ou lorsque les vagues s'éloignent de la tempête, on peut négliger le second membre de la relation de dispersion qui s'écrit alors

$$(s + i k_x U_1)^2 + g k \tanh(k h_r) = 0 . \quad (7.14)$$

En se plaçant dans le repère mobile se déplaçant à la vitesse U_1 , ce que nous supposons désormais, on voit que $s = -i\omega$ avec

$$\omega^2 = g k \tanh(k h_r) . \quad (7.15)$$

La relation de dispersion des ondes de surface s'écrit donc

$$\omega = \Omega(k) \quad \text{ou} \quad \omega = -\Omega(k) \quad \text{avec} \quad \Omega(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)}. \quad (7.16)$$

Les normes de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe (figure 7.4a) sont telles que

$$c_\varphi(k) = \frac{\Omega(k)}{k} \quad \text{et} \quad c_g(k) = \Omega'(k) = c_\varphi(k) \left[\frac{1}{2} + \frac{k h_r}{\sinh(2 k h_r)} \right]. \quad (7.17)$$

2.2 Champs oscillants de la houle

Dans le cas $\rho_1/\rho_2 \gg 1$ et en notant $\phi = \phi_1$, une onde monochromatique s'écrit

$$\begin{aligned} (\eta, \phi) &= (\eta_m, \Phi_m \cosh[k(z+h)]) e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t}, \\ \Phi_m &= g \eta_m / [i \omega \cosh(k h_r)], \end{aligned} \quad (7.18)$$

la relation entre Φ_m et η_m découlant, par exemple, de la condition $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta = 0$ en $z = 0$. La relation de dispersion $\omega = \pm \Omega(k)$, avec $\Omega(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)}$, doit être satisfaite.

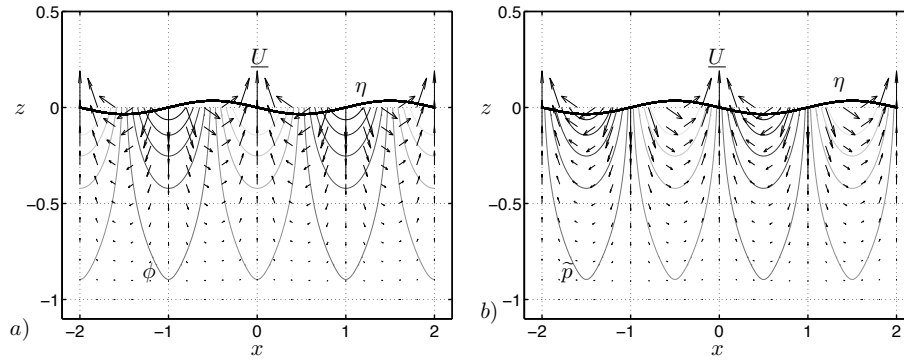


FIG. 7.5 – Onde de surface monochromatique. Vecteurs vitesses \underline{U} , surface libre η et isovalues a) du potentiel ϕ , b) des fluctuations de pression \tilde{p} .

L'expression générale d'une onde rectiligne progressive est donc, en choisissant η_m réel,

$$\eta = \eta_m \cos(k_x x + k_y y - \omega t),$$

$$\phi = \frac{g \eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x + k_y y - \omega t). \quad (7.19)$$

On en déduit le champ de vitesse réel dont les composantes sont

$$\begin{aligned} u &= \frac{g \eta_m}{\omega} k_x \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x + k_y y - \omega t), \\ v &= \frac{g \eta_m}{\omega} k_y \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x + k_y y - \omega t), \\ w &= \frac{g \eta_m}{\omega} k \frac{\sinh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x + k_y y - \omega t). \end{aligned} \quad (7.20)$$

La relation $\tilde{p} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ permet de calculer l'expression de la fluctuation de pression, aussi appelée "pression dynamique", qui s'écrit

$$\tilde{p} = \rho g \eta_m \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x + k_y y - \omega t). \quad (7.21)$$

2.3 Trajectoires des particules

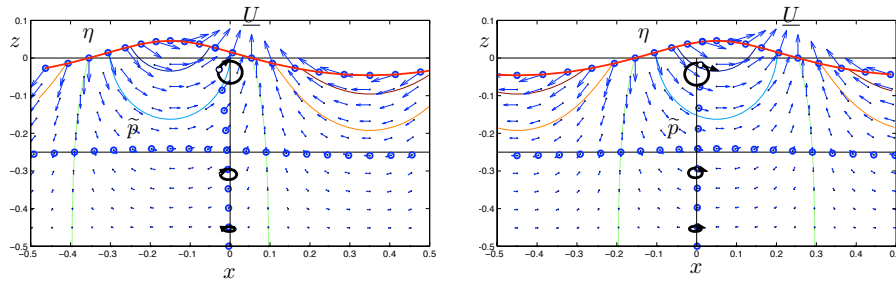


FIG. 7.6 – Onde de surface monochromatique à deux instants successifs. Iso- \tilde{p} (isolignes), champ de vitesse (vecteurs), surface libre (trait gras), trajectoires des particules (ellipses).

Comme l'amplitude de l'onde est petite, on peut remplacer les positions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ par leurs moyennes x_0 , y_0 et z_0 dans l'expression du champ de vitesse qui intervient dans l'équation $\dot{x}(t) = \underline{U}[x(t), t]$. Cette hypothèse d'onde infinitésimale, compatible avec la démarche de linéarisation suivie pour l'étude

des ondes, se traduit par la condition $\eta_m \ll \frac{\omega^2}{gk^2}$ (il suffit d'adimensionner l'amplitude η_m avec g , k et ω). Pour simplifier l'écriture, on peut supposer que $k_y = 0$, ce qui revient à effectuer une rotation des axes. L'équation des trajectoires dans un plan $y = y_0$, paramétrées par les positions (x_0, z_0) , est alors

$$\begin{aligned} x(x_0, z_0; t) &= x_0 - \frac{g \eta_m}{\omega^2} k_x \frac{\cosh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x_0 - \omega t) \\ z(x_0, z_0; t) &= z_0 + \frac{g \eta_m}{\omega^2} k \frac{\sinh[k(z_0 + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \cos(k_x x_0 - \omega t), \end{aligned} \quad (7.22)$$

avec $k = |k_x|$. Ces trajectoires décrivent des ellipses de centres (x_0, z_0) — voir figure 7.6.

3 Problèmes aux conditions initiales

Comme le modèle décrivant les petites oscillations est linéaire et à coefficients constants, il suffit de décomposer une condition initiale en série de Fourier pour voir la solution qui en découle comme étant la superposition d'ondes monochromatiques. Ces ondes se dispersent alors pour former des paquets d'ondes dont l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe.

3.1 Décomposition en ondes monochromatiques

On cherche à décrire la dispersion d'un paquet d'ondes de nombres d'onde voisins dans le cadre des ondes de surface ($U_1 = U_2 = 0$ et $\rho_1 \gg \rho_2$), et à montrer qu'il se déplace à la vitesse de groupe. On se restreint ici au cas bidimensionnel en cherchant l'écoulement $[\eta(x, t), \phi(x, z, t)]$ issu de la condition initiale

$$[\eta(x, 0), \phi(x, z, 0)] = [\eta_0(x), \phi_0(x, z)]. \quad (7.23)$$

Pour que le champ de vitesse initial soit incompressible et compatible avec les conditions aux limites au fond, il faut que $\Delta\phi_0 = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z}\phi_0 = 0$ en $z = -h_r$.

Dans le cas général, une partie de l'énergie de cette condition initiale va se propager vers la gauche et l'autre vers la droite. Pour le voir, on montre tout d'abord que l'on peut décomposer la condition initiale sous la forme de

l'intégrale de Fourier

$$\begin{aligned}\eta_0(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\eta}_0(k_x) e^{i k_x x} dk_x \\ \text{et } \phi_0(x, z) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}_0(k_x) \cosh[k(z + h_r)] e^{i k_x x} dk_x.\end{aligned}\quad (7.24)$$

où $k = |k_x|$. En effet, la propriété $\Delta\phi_0 = 0$ avec $\frac{\partial}{\partial z}\phi_0 = 0$ en $z = -h_r$ de la condition initiale permet de démontrer la forme $\hat{\Phi}_0(k_x) \cosh[k(z + h_r)]$ de la transformée de Fourier en x de $\phi_0(x, z)$.

Comme on s'intéresse à des conditions initiales réelles, on a $\hat{\eta}_0(-k_x) = \hat{\eta}_0^*(k_x)$ et $\hat{\Phi}_0(-k_x) = \hat{\Phi}_0^*(k_x)$ où * désigne le complexe conjugué. On peut donc ne s'intéresser qu'aux valeurs de $\hat{\eta}_0(k_x)$ et $\hat{\Phi}_0(k_x)$ pour lesquelles $k_x \geq 0$, les autres s'en déduisant par conjugaison.

Pour chaque vecteur d'onde k_x (1D), on cherche à effectuer la décomposition

$$\hat{\eta}_0(k_x) = \hat{\eta}_{G0}(k_x) + \hat{\eta}_{D0}(k_x) \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}_0(k_x) = \hat{\Phi}_{G0}(k_x) + \hat{\Phi}_{D0}(k_x)$$

de telle sorte que les couples $[\hat{\eta}_{G0}(k_x), \hat{\Phi}_{G0}(k_x)]$ et $[\hat{\eta}_{D0}(k_x), \hat{\Phi}_{D0}(k_x)]$ vérifient les relations, pour $k_x > 0$,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{G0}(k_x) &= \frac{-g}{i \Omega(k) \cosh(k h_r)} \hat{\eta}_{G0}(k_x) \\ \hat{\Phi}_{D0}(k_x) &= \frac{g}{i \Omega(k) \cosh(k h_r)} \hat{\eta}_{D0}(k_x).\end{aligned}\quad (7.25)$$

Ces couples peuvent alors être vus comme les conditions initiales d'ondes monochromatiques se propageant en sens contraires avec des $[\eta(x, t), \phi(x, z, t)]$ qui, pour $k_x \geq 0$, s'écrivent :

$$\begin{aligned}\text{onde à gauche (G)} &: \left(\hat{\eta}_{G0}(k_x), \hat{\Phi}_{G0}(k_x) \cosh[k(z + h)] \right) e^{i k_x x + i \Omega(k) t}, \\ \text{onde à droite (D)} &: \left(\hat{\eta}_{D0}(k_x), \hat{\Phi}_{D0}(k_x) \cosh[k(z + h)] \right) e^{i k_x x - i \Omega(k) t}.\end{aligned}$$

En effet, la relation (7.18) entre les amplitudes complexes η_m et Φ_m montre que l'onde à gauche vérifie bien $\omega = -\Omega(k)$ alors que l'onde à droite vérifie la relation $\omega = \Omega(k)$. Comme on a supposé $k_x \geq 0$ et que $\Omega(k)$ est positif, on voit que ces ondes se propagent bien dans les sens indiqués.

Nous avons donc montré que l'on peut décomposer la condition initiale $[\eta_0(x), \phi_0(x, z)]$ en la somme d'un train d'ondes partant vers la gauche et

d'un train d'ondes partant vers la droite, tous deux formés d'ondes monochromatiques dont les amplitudes sont déterminées en effectuant la décomposition $\hat{\eta}_0(k_x) = \hat{\eta}_{G0}(k_x) + \hat{\eta}_{D0}(k_x)$ avec, pour $k_x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{G0}(k_x) &= \frac{1}{2} \left[\hat{\eta}_0(k_x) - i \frac{\Omega(k)}{g} \hat{\Phi}_0(k_x) \cosh(k h_r) \right], \\ \hat{\eta}_{D0}(k_x) &= \frac{1}{2} \left[\hat{\eta}_0(k_x) + i \frac{\Omega(k)}{g} \hat{\Phi}_0(k_x) \cosh(k h_r) \right].\end{aligned}\quad (7.26)$$

3.2 Paquets d'ondes localisés en espace

On suppose que pour tout k_x on a $\hat{\eta}_{G0}(k_x) = 0$ et donc $\hat{\eta}_{D0}(k_x) = \hat{\eta}_0(k_x)$. Ceci permet de ne considérer qu'un paquet d'ondes dont les vitesses de phase sont toutes dirigées vers la droite. La solution issue de cette condition s'écrit alors

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} \hat{\eta}_0(k_x) e^{i k_x x - i \Omega(k) t} dk_x + \text{c.c.}, \\ \phi(x, z, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{g \hat{\eta}_0(k_x)}{i \Omega(k)} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} e^{i k_x x - i \Omega(k) t} dk_x + \text{c.c.},\end{aligned}\quad (7.27)$$

où la notation "c.c." désigne le complexe conjugué du terme qui la précède.

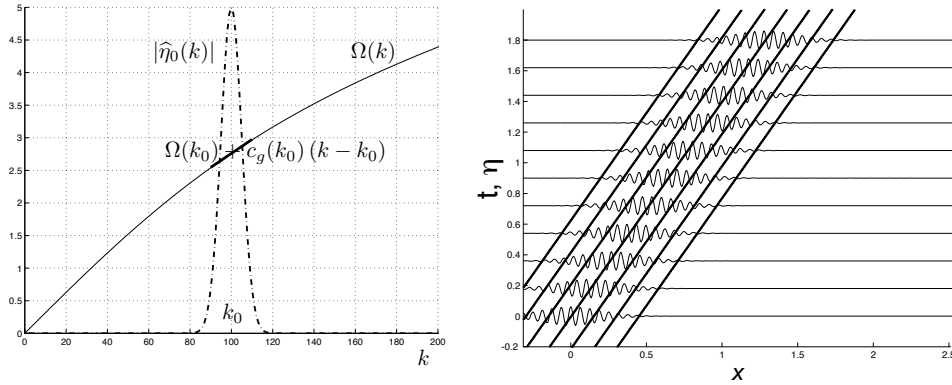


FIG. 7.7 – Paquet d'ondes centré autour du nombre d'onde k_0 . a) Relation de dispersion $\omega = \Omega(k)$, courbe $|\hat{\eta}_0(k_x)|$ et droite tangente à la relation de dispersion en $k = k_0$ pour $k \geq 0$. b) Évolution temporelle de la solution et droites représentant la vitesse de groupe $c_g(k_0)$ dans le plan (x, t) .

On considère tout d'abord le cas où la condition initiale est un “paquet d'ondes” de nombres d'onde centrés autour de k_0 et définis par les relations

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_0(k_x) &= \eta_p \left[\widehat{E}(k_x - k_0) + \widehat{E}(k_x + k_0) \right] \\ &\iff \eta_0(x) = 2 \eta_p \cos(k_0 x) E(x), \end{aligned} \quad (7.28)$$

où η_p est une amplitude réelle, $\widehat{E}(q)$ une fonction très localisée autour de zéro et $E(x)$ sa transformée de Fourier inverse. Ce choix correspond à une condition initiale constituée d'une oscillation spatiale de période $2\pi/k_0$ modulée par l'enveloppe $E(x)$ (voir figure 7.7). Par exemple, si $\widehat{E}(q) = \exp\left(\frac{-q^2}{2\chi^2}\right)$ est une gaussienne d'écart-type χ , l'enveloppe $E(x) = \chi \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{\chi^2 x^2}{2}\right)$ est une gaussienne d'écart type $1/\chi$.

Si $\widehat{E}(q)$ est très localisée autour de $q = 0$ (c'est-à-dire pour χ très petit dans le cas d'une gaussienne), on peut remplacer $\Omega(k)$ par son approximation linéaire $\Omega(k) = \Omega(k_0) + \Omega'(k_0)(k - k_0) + O[(k - k_0)^2]$ dans l'intégrale (7.27). On peut alors calculer $\eta(x, t)$ en négligeant les termes d'ordre 2, ce qui s'écrit

$$\eta(x, t) = 2 \eta_p \cos[k_0 x - \Omega(k_0) t] E[x - c_g(k_0) t], \quad (7.29)$$

où l'on a noté $c_g(k) = \Omega'(k)$ la “vitesse de groupe” associée au nombre d'onde k . Cette appellation vient du fait que l'enveloppe du paquet d'ondes $\eta(x, t)$ se propage bien à la vitesse de groupe $c_g(k_0)$ alors que la vitesse de phase de l'onde porteuse est $c_\varphi(k_0) = \Omega(k_0)/k_0$. Ces deux vitesses sont différentes du fait que les ondes sont dispersives.

3.3 Réponse impulsionnelle

Le deuxième exemple permettant d'illustrer la notion de vitesse de groupe et de dispersion est le cas de “l'impulsion de Dirac” à droite (ondes à gauche supposées nulles) définie par la relation

$$\widehat{\eta}_0(k) = \eta_m \iff \eta_0(x) = 2\pi \eta_m \delta(x), \quad (7.30)$$

où η_m est une amplitude réelle et $\delta(x)$ la distribution de Dirac. La solution issue de cette condition initiale s'écrit

$$\eta(x, t) = \eta_m \int_{\mathbb{R}^+} e^{i k_x x - i \Omega(k) t} dk_x + \text{c.c.} \quad \text{avec} \quad k = |k_x|. \quad (7.31)$$

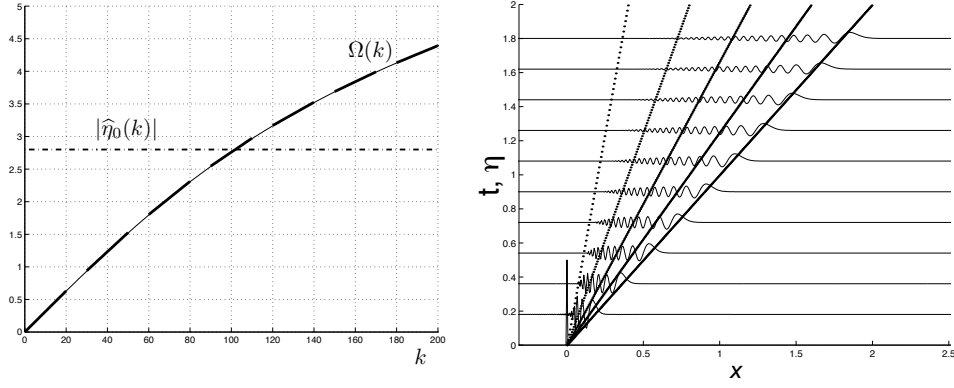


FIG. 7.8 – Paquets d’ondes issus de l’impulsion de Dirac. a) Relation de dispersion $\omega = \Omega(k)$, fonction constante $|\hat{\eta}_0(k)|$ et droites tangentes à la relation de dispersion en plusieurs nombres d’onde k . b) Évolution temporelle de la solution et droites représentant des vitesses de groupe $c_g(k)$ dans le plan (x, t) .

L’évolution de ce profil spatial en fonction du temps est représentée sur la figure 7.8. On voit que l’enveloppe du signal s’élargit au cours du temps et se disperse en un continuum de paquets d’ondes balayant tous les vecteurs k et dont les vitesses de groupe sont $c_g(k) = \Omega'(k)$.

Pour aller au-delà de cette observation graphique, on étudie le comportement de $\eta(x, t)$ aux temps longs en écrivant

$$\begin{aligned} I(t) = \eta(ct, t) &= \eta_m \int_{\mathbb{R}^+} e^{i[k_x c - \Omega(k)] t} dk_x + \text{c.c.} \\ &= \eta_m \int_{\mathbb{R}^+} e^{i\Psi(k_x) t} dk_x + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

où c est une vitesse constante et $\Psi(k_x) = k_x c - \Omega(k)$. Ceci revient à regarder le comportement de $\eta(x, t)$ en suivant une trajectoire d’équation $x = ct$, c’est-à-dire une particule fictive se déplaçant à une vitesse c choisie arbitrairement. La dérivée de la phase $\Psi(k_x)$ pour $k_x > 0$ est alors $\Psi'(k_x) = c - c_g(k)$ avec $k = |k_x|$.

La “méthode de la phase stationnaire” est une technique mathématique qui permet de calculer le comportement, lorsque t devient grand, de l’intégrale $I(t) = \int_{\mathbb{R}} g(k_x) e^{i\Psi(k_x) t} dk_x$ où $g(k_x)$ et $\Psi(k_x)$ sont des fonctions continues

quelconques. On se contente ici d'indiquer le résultat de cette méthode :

$$\begin{aligned} \text{si } \Psi \text{ est monotone} & : I(t) \text{ décroît exponentiellement,} \\ \text{s'il existe } k_* \text{ tel que } \Psi'(k_*) = 0 & : I(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G(k_*) e^{i\Psi(k_*)t}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

avec $G(k_*) = g(k_*) \sqrt{\frac{2\pi}{|\Psi''(k_*)|}} \exp\{i \operatorname{sign}[\Psi''(k_*)] \frac{\pi}{4}\}$. En appliquant cette méthode au cas $\Psi(k_x) = k_x c - \Omega(k)$ et $g = \eta_m$ considéré ici, on peut effectuer la discussion ci-dessous.

Lorsque $c > \sqrt{g h_r}$, c'est-à-dire lorsque l'on se déplace plus vite que la vitesse maximale des ondes, la phase $\Psi(k_x)$ est une fonction monotone (croissante). Dans ce cas, $I(t)$, donc η le long de la droite $x = ct$, décroît exponentiellement, donc très rapidement.

Lorsque $0 < c < \sqrt{g h_r}$, il existe un seul nombre d'onde k_* tel que $\Psi'(k_*) = c - c_g(k_*) = 0$. C'est le nombre d'onde dont la vitesse de groupe c_g est égale à la vitesse c à laquelle on fait se déplacer une particule fictive. On peut donc écrire

$$I(t) = \eta(ct, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G(k_*) e^{[i k_* c - \Omega(k_*)]t}, \quad (7.34)$$

avec $G(k_*) = \eta_m \sqrt{\frac{2\pi}{|\Omega''(k_*)|}} \exp\{-i \operatorname{sign}[\Omega''(k_*)] \frac{\pi}{4}\}$. Comme k_* dépend du choix de $c = \frac{x}{t}$, on peut définir la notation $k_* = k_c(\frac{x}{t})$ valable pour $\frac{x}{t} \leq \sqrt{g h_r}$. Lorsque cette dernière inégalité est vérifiée, on peut alors écrire

$$\eta(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G\left[k_c\left(\frac{x}{t}\right)\right] e^{i k_c(\frac{x}{t}) x - i \Omega[k_c(\frac{x}{t})]t}. \quad (7.35)$$

Puisque t est grand, $k_c(\frac{x}{t})$ varie très peu lorsque x varie sur quelques longueurs d'ondes. En choisissant un point particulier \bar{x} , on peut donc écrire

$$\eta(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G\left[k_c\left(\frac{\bar{x}}{t}\right)\right] e^{i k_c(\frac{\bar{x}}{t}) x - i \Omega[k_c(\frac{\bar{x}}{t})]t}. \quad (7.36)$$

pourvu que x reste à quelques longueurs d'ondes $2\pi/k_0$ de \bar{x} . Ce raisonnement permet de conclure que l'on observe, dans le voisinage de la trajectoire d'équation $\bar{x} = ct$, le paquet d'ondes de nombre d'onde $k_c(c)$ dont la vitesse de groupe est justement $c_g[k_c(c)] = c$. On retrouve ici le fait que les paquets d'ondes voyagent à la vitesse de groupe.

FORMULAIRE

Génération des ondes de surface

Relation de dispersion :

$$\rho_1 \left[g k + \frac{(s + i k_x U_1)^2}{\tanh(k h_r)} \right] = \rho_2 \left[g k - (s + i k_x U_2)^2 \right] .$$

Instabilité en profondeur infinie :

$$g \sqrt{k_x^2 + k_y^2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) < k_x^2 \rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2 .$$

Vitesses nulles en profondeur infinie :

$$s^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} g k .$$

Dispersion de la houle

Onde de surface :

$$\omega = \Omega(k) = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} .$$

Vitesse de phase et de groupe :

$$c_\varphi(k) = \frac{\Omega(k)}{k} , \quad c_g(k) = \Omega'(k) = c_\varphi(k) \left[\frac{1}{2} + \frac{k h_r}{\sinh(2 k h_r)} \right] .$$

Champs oscillants :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_m \cos(k_x x + k_y y - \omega t) , \\ \phi &= \frac{g \eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x + k_y y - \omega t) , \end{aligned}$$

Problèmes aux conditions initiales

Droite et gauche :

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_{G0}(k_x) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{\eta}_0(k_x) + i \frac{\Omega(k)}{g} \widehat{\phi}_0(k_x) \cosh(k h_r) \right], \text{ pour } k_x \geq 0, \\ \widehat{\eta}_{D0}(k_x) &= \frac{1}{2} \left[\widehat{\eta}_0(k_x) - i \frac{\Omega(k)}{g} \widehat{\phi}_0(k_x) \cosh(k h_r) \right], \text{ pour } k_x \geq 0.\end{aligned}$$

Ondes à droite :

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} \widehat{\eta}_0(k_x) e^{i k_x x - i \Omega(k) t} dk_x + \text{c.c.}, \\ \phi(x, z, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{g \widehat{\eta}_0(k_x)}{i \Omega(k)} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} e^{i k_x x - i \Omega(k) t} dk_x + \text{c.c.}.\end{aligned}$$

Paquet d'ondes localisé :

$$\eta(x, t) = 2 \eta_p \cos[k_0 x - \Omega(k_0) t] E[x - c_g(k_0) t].$$

Réponse impulsionnelle :

$$\eta(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} G \left[k_c \left(\frac{\bar{x}}{t} \right) \right] e^{i k_c \left(\frac{\bar{x}}{t} \right) x - i \Omega \left[k_c \left(\frac{\bar{x}}{t} \right) \right] t}, \text{ pour } x \sim \bar{x}.$$

EXERCICES

EXERCICE 7.1 Milieu très profond

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation $z = \eta(x, t)$, est en contact avec l'atmosphère de pression constante p_a . On suppose que le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler incompressibles 2D

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z \quad (7.37)$$

où ρ est la masse volumique, $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$ est le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ est le champ de pression.

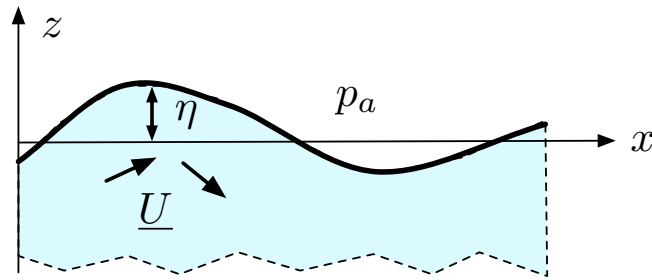


FIG. 7.9 – Couche infiniment profonde à surface libre d'équation $z = \eta(x, t)$

- 1) Interpréter les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$ et $p = p_a$ en $z = \eta(x, t)$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} w = 0$.

La condition aux limites cinématique de surface énonce que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. La condition cinématique $w = 0$ sur un fond plat est ici reportée à l'infini $z \rightarrow -\infty$.

- 2) Indiquer les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U} = \text{grad } \phi$, $\Delta \phi = 0$ et $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$ en $z = 0$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.

L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \text{grad } \phi$ où $\phi(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\text{div } \underline{U} = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi = 0$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z$ s'intègre en $\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho + g z = p_a/\rho$, la constante d'intégration p_a/ρ pouvant être choisie ainsi dans la mesure où ϕ est défini à une constante $C(t)$ près. En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors ces conditions aux limites en utilisant $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a - \rho g z$.

- 3) Justifier la recherche de solutions complexes de la forme $\phi = \Phi(z) e^{i k_x x - i \omega t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$ où $\Phi(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que $\Phi(z) =$

$\Phi_m \exp(kz)$ où $k = |k_x|$.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. On vérifie a posteriori que le taux de croissance temporel de ces ondes est nul. En reportant dans l'équation $\Delta\phi = 0$, on obtient $\Phi''(z) + k^2\Phi(z) = 0$. En utilisant la condition aux limites en $-\infty$, on voit que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(kz)$ où Φ_m est une amplitude complexe arbitraire.

- 4) En déduire la relation de dispersion $\omega = \pm\sqrt{gk}$ des ondes de surfaces en eaux profondes. Montrer que l'on peut choisir η_m réel sans perte de généralité et exprimer la solution réelle sous la forme $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} e^{kz} \sin(k_x x - \omega t)$. Montrer que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles de centres (x_0, z_0) et de rayon $a(z_0)$ que l'on calculera. Quel est l'ordre de grandeur de la profondeur au-dessous de laquelle une houle de longueur d'onde L_x devient négligeable ?

Les conditions aux limites s'écrivent $-i\omega\eta_m = k\Phi_m$ et $-i\omega\Phi_m = -g\eta_m$. On en déduit que $\omega^2 = gk$ et $\Phi_m = -ig\eta_m/\omega$. On peut se ramener à η_m réel en changeant l'origine des x ou des t . La partie réelle de la solution complexe est alors de la forme indiquée. Comme $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, la trajectoire de centre (x_0, y_0) est décrite par $x(x_0, z_0; t) = x_0 - a \cos(k_x x - \omega t)$ et $z(x_0, z_0; t) = z_0 + a \sin(k_x x - \omega t)$ où $a(z_0) = g\eta_m \exp(kz_0)/\omega$ est le rayon du cercle. À la profondeur L_x , l'amplitude du mouvement a diminué d'un facteur $\exp(-2\pi) \sim 2 \cdot 10^{-3}$.

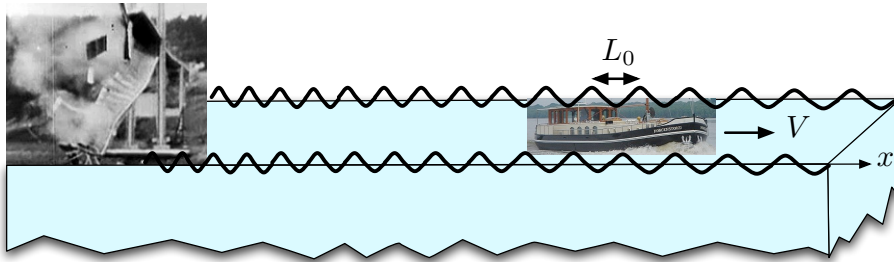


FIG. 7.10 – La péniche de vitesse V voit une longueur d'onde L_0 suite à la rupture du pont.

- 5) Un pont traversant un canal s'écroule au passage d'une péniche qui continue sa course à la vitesse V . Au bout d'un certain temps, les passagers de la péniche observent une vague de longueur d'onde $L_0 = 0.624$ m qui se propage à la même vitesse qu'eux. En supposant que la profondeur du canal est infinie, calculer la vitesse V . On pourra prendre $g = 10$ m s⁻².

Comme la profondeur est grande devant la longueur d'onde L_0 , la relation de dispersion des ondes de surface peut être approximée par $\omega(k) = \sqrt{gk}$. La vitesse de groupe est alors $c_g(k) = \omega'(k) = (1/2)\sqrt{g/k}$. En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient que $V = c_g(k_0)$ avec $k_0 = 2\pi/L_0$. On a donc $V = .5 \sqrt{g L_0}/(2\pi) \sim 0.5$ m/s.

EXERCICE 7.2 Mesure de la houle

On souhaite mesurer l'amplitude η_m et la longueur d'onde $L_x = 2\pi/k_x$ d'une houle monochromatique à l'aide d'un capteur de pression disposé au fond de la couche fluide d'épaisseur h_r . On note $p_f(t)$ le signal de pression enregistré par cette sonde.

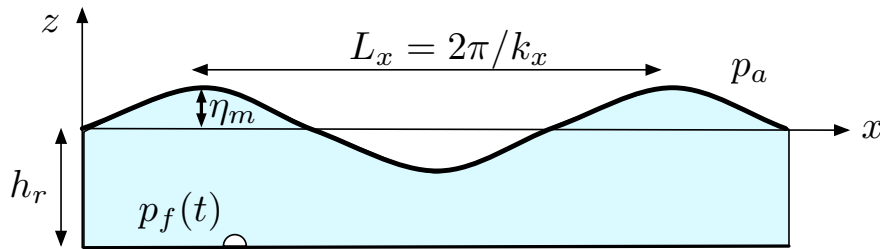


FIG. 7.11 – Capteur de pression pour mesurer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

- 1) Indiquer les étapes qui conduisent à l'expression $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g \eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h_r)]}{\cosh(k h_r)} \sin(k_x x - \omega t)$ avec $\omega = \sqrt{gk \tanh(k h_r)}$ pour décrire une onde monochromatique.

La linéarisation des équations d'Euler irrotationnelle avec surface libre en contact avec l'atmosphère de pression constante conduit à un système linéaire qui permet de déterminer la structure verticale du champ de vitesse et la relation de dispersion. On a choisi ici l'onde de vitesse de phase positive.

- 2) Montrer que le champ de pression s'écrit $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$. En déduire que $p_f(t) = \bar{p}_f + p_m \cos(\omega t + \varphi)$ où p_m est une constante que l'on exprimera en fonction de η_m et k_x . En déduire la détermination de k_x et η_m à partir des valeurs de ω et p_n mesurées par la sonde. On suppose que l'on sait inverser graphiquement la fonction $F(\xi) = \sqrt{\xi \tanh \xi}$ (voir figure 7.12). En supposant que $h_r = 14.4$ m, calculer la longueur d'onde L et la hauteur

H des vagues si la période mesurée est $T = 6.24$ s et la fluctuation de pression $p_n = 10^3$ Pa (on pourra prendre $g = 10$ m s⁻²).

L'expression de pression s'obtient à partir des équations d'Euler linéarisées. On a $\bar{p}_f = p_a - \rho g h_r$ et $p_m = \rho g \eta_m / \cosh(k h_r)$. Connaissant ω , la résolution de l'équation implicite $\omega = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} = \sqrt{g/h_r} F(k h_r)$ à partir du tracé de F s'effectue en écrivant $F(\xi) = \omega \sqrt{h_r/g}$ avec $\xi = k h_r$. On en déduit k et $\eta_m = \frac{p_m}{\rho g} \cosh \xi$. Pour $T = 6.24$ s, on a $\omega = 2\pi/T = 1$ Hz et $\omega \sqrt{h_r/g} = 1.2$. La résolution graphique conduit à $\xi \sim 1.6$ dont on déduit $\cosh \xi \sim 2.5$. On en déduit donc $L_x = 2\pi/k_x = 2\pi h_r/\xi = 57$ m et $\eta_m = 0.5$ m. La hauteur des vagues est alors $H = 2\eta_m = 0.5$ m.

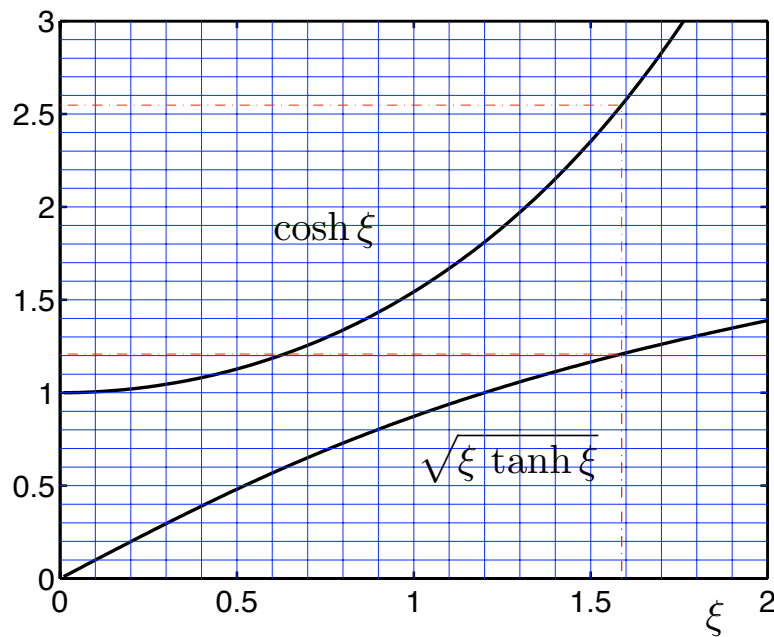


FIG. 7.12 – Tracé des fonctions $\cosh(\xi)$ et $F(\xi) = \sqrt{\xi \tanh(\xi)}$.

NOTATIONS

$C_1(t), C_2(t)$	Constantes d'intégrations ()
\cosh	Cosinus hyperbolique ()
\underline{c}_φ	Vitesse de phase (m s^{-1})
c_φ	Module de la vitesse de phase (m s^{-1})
\underline{c}_g	Vitesse de groupe (m s^{-1})
c_g	Module de la vitesse de groupe (m s^{-1})
c	Vitesse quelconque (m s^{-1})
c.c.	complexe conjugué
div	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs (m^{-1})
$E(x)$	Enveloppe d'un paquet d'ondes ()
$\widehat{E}(q)$	Transformée de Fourier de $E(x)$ (m)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$F(\underline{x}, t) = 0$	Équation de la surface libre ()
$f(\underline{x}, t)$	Fonction quelconque ()
grad	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
$G(k_*)$	Fonction pour la méthode de la phase stationnaire ($\text{m s}^{1/2}$)
g	Gravité (m s^{-2})
$g(k_x)$	Fonction de k_x (m)
h_r	Profondeur constante de la couche d'eau (m)
$I(t)$	Intégrale dépendant de t (m)
i	Nombre complexe de carré -1 ()
$\underline{k} = (k_x, k_y)$	Vecteur d'onde (m^{-1})
k	Module du vecteur d'onde (m^{-1})
k_0	Valeur particulière de k (m^{-1})
k_*	Valeur pour laquelle $\Psi(k_x)$ atteint un extremum (m^{-1})
$k_c(c)$	Solution de $c_g(k) = c$ (m^{-1})
$O()$	De l'ordre de ()
p_1, p_2	Champs de pression (Pa)
p_r	Pression de référence (Pa)
$p_0(z)$	Pression hydrostatique (Pa)
\tilde{p}	Perturbation du champ de pression (Pa)
q	Nombre d'onde pour l'enveloppe $E(x)$ (m^{-1})
\mathbb{R}_+	Espace des nombres réels positifs ou nuls ()
\mathbb{R}	Espace des nombres réels ()
rot	Opérateur rotationnel d'un champ vectoriel (m^{-1})
$s = \sigma - i\omega$	Valeur propre complexe (s^{-1})

\sinh	Sinus hyperbolique ()
sign	Fonction signe ()
s	Coordonnée curviligne dans l'espace spectral (m^{-1})
\tanh	Tangente hyperbolique ()
t	Temps (s)
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
$\underline{U} \cdot \text{grad}$	Opérateur de dérivation suivant \underline{U} (s^{-1})
$\underline{U}_1, \underline{U}_2$	Champs de vitesse (m s^{-1})
U_1, U_2	Vitesses constantes (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$\underline{x}(t)$	Trajectoire (m)
$x(t), y(t), z(t)$	Composantes de trajectoire (m)
\bar{x}	Valeur particulière de x (m)
x_0, y_0, z_0	Position moyenne de trajectoire (m)
$x(x_0, z_0; t)$	Trajectoire de position moyenne (x_0, z_0) (m)
$z(x_0, z_0; t)$	Trajectoire de position moyenne (x_0, z_0) (m)
Δ	Opérateur Laplacien (m^{-2})
$\delta(x)$	Distribution de Dirac (m^{-1})
$\eta(x, y, t)$	Élévation de la surface libre réelle ou complexe (m)
$\eta(x, t)$	Élévation de la surface libre dans le cas 2D (m)
η_m	Amplitude complexe ou réelle (m)
η_p	Amplitude réelle (m)
η_0	Condition initiale pour η (m)
$\hat{\eta}_0$	Transformée de Fourier de η_0 (m^2)
$\hat{\eta}_0^*$	Complexe conjugué de $\hat{\eta}_0$ (m^2)
$\hat{\eta}_{G0}$	Partie de $\hat{\eta}_0$ pour les ondes à gauche (m^2)
$\hat{\eta}_{D0}$	Partie de $\hat{\eta}_0$ pour les ondes à droite (m^2)
ρ_1, ρ_2	Masses volumiques (kg m^{-3})
σ	Taux de croissance (s^{-1})
ϕ_1, ϕ_2	Potentiels des perturbations des vitesses ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
Φ_1, Φ_2	Profils en z de ϕ_1 et ϕ_2 ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
Φ_{1m}, Φ_{2m}	Amplitudes complexes de Φ_1 et Φ_2 ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\phi(x, y, z, t)$	Potentiel ϕ_1 dans la cas $\rho_1 \gg \rho_2$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\phi(x, z, t)$	Potentiel en 2D ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\Phi(z)$	Profils en z de ϕ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
Φ_m	Amplitude complexe de Φ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\hat{\Phi}_0(k_x)$	Amplitude complexe de la décomposition de ϕ_0 ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)
$\hat{\Phi}_0^*(k_x)$	Complexe conjugué de $\hat{\Phi}_0(k_x)$ ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)

$\phi_0(x, y, z)$	Condition initiale pour ϕ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\phi_0(x, z)$	Condition initiale en 2D ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
χ	Écart type de \widehat{E} dans le cas gaussien (m^{-1})
$\Psi(k_x)$	Fonction de k_x (t^{-1})
$\Omega(k)$	Relation de dispersion isotrope (s^{-1})
$\Omega'(k)$	Dérivée de $\Omega(k)$ (m s^{-1})
$\Omega(k_x)$	Relation de dispersion 1D (s^{-1})
ω	Pulsation (s^{-1})