

Chapitre 6

Intumescences et ressauts

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

1	Équations de Saint-Venant 1D	2
1.1	Dynamique linéaire à fond plat et lisse	3
1.2	Transformation du modèle non linéaire	4
1.3	Méthode des caractéristiques	6
2	Ondes de détente	7
2.1	Vidange d'un canal	7
2.2	Propriétés d'une onde simple	9
2.3	Détermination de la solution	10
3	Ondes de compression	12
3.1	Remplissage d'un canal	12
3.2	Relations de saut	14
3.3	Dissipation de l'énergie dans un ressaut	16

Introduction

Ce chapitre décrit la modélisation des écoulements instationnaires à surface libre. On se restreint au cas des canaux dont la section est un rectangle de largeur miroir L , grande devant la profondeur.

La propagation de bourrelets d'eau ou de crues, que l'on désigne sous le terme générique d'intumescences, est bien décrite par la théorie des caractéristiques appliquées aux équations de Saint-Venant.



FIG. 6.1 – Mascarets. a) Mascaret près de Silverdale. Photo d'Arnold Price. b) Surfers sur le mascaret de Severn. Photo d'Audrey Hudson.

L'équation des caractéristiques et l'expression des invariants de Riemann est présentée. Cette approche permet de traiter le cas de l'onde de détente obtenue à la suite d'un abaissement du niveau d'eau. L'application des relations de saut issues de la formulation globale du modèle permet de décrire la propagation des ressauts hydrauliques.

1 Équations de Saint-Venant 1D

Les petites perturbations de l'équilibre du modèle de Saint-Venant unidimensionnel (1D) se propagent sans déformation aux vitesses $U \pm \sqrt{gh}$. Ce sont aussi les vitesses de propagation des perturbations d'amplitude finie des régimes non linéaires comme le montre la théorie des caractéristiques.

1.1 Dynamique linéaire à fond plat et lisse

On considère le modèle de Saint-Venant unidimensionnel

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.1)$$

qui décrit la dynamique d'une couche fluide d'épaisseur $h(x, t)$ et de vitesse $U(x, t)$ sur un fond plat horizontal. On suppose ici que le frottement sur le fond est négligeable.

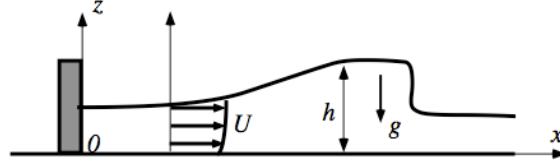


FIG. 6.2 – Géométrie de l'écoulement à surface libre modélisé par les équations de Saint-Venant. Cas sans pente ni frottement

Tout couple de constantes (h_n, U_n) est solution de ce modèle. On considère alors les petites perturbations $U = U_n + \tilde{U}$ et $h = h_n + \tilde{h}$ d'un de ces équilibres. En négligeant les termes d'ordre deux, elles vérifient les équations de Saint-Venant linéaires 1D

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}. \quad (6.2)$$

Pour étudier ce système linéaire, on cherche des solutions complexes de la forme

$$(\tilde{h}, \tilde{U}) = (\tilde{h}_m, \tilde{U}_m) e^{i k_x x + s t}, \quad (6.3)$$

où \tilde{h}_m et \tilde{U}_m sont des amplitudes complexes, $k_x \in \mathbb{R}$ le nombre d'onde de la perturbation et $s = \sigma - i \omega \in \mathcal{C}$. Comme les équations sont linéaires à coefficients réels, les parties réelles de ces solutions complexes sont des solutions. En reportant dans les équations, on obtient la relation de dispersion généralisée

$$(s - i k_x U_n)^2 + c_n^2 k^2 = 0 \quad \text{avec} \quad c_n = \sqrt{g h_n}. \quad (6.4)$$

On en déduit que $s = -i \omega$ où la pulsation ω peut prendre les deux valeurs

$$\omega_+ = (U_n + c_n) k_x \quad \text{et} \quad \omega_- = (U_n - c_n) k_x. \quad (6.5)$$

Les vitesses de phase de ces ondes sont donc $U_n + c_n$ et $U_n - c_n$. Les champs oscillants associés vérifient respectivement les relations

$$\frac{\tilde{h}_m}{h_n} = \frac{\tilde{U}_m}{c_n} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{h}_m}{h_n} = -\frac{\tilde{U}_m}{c_n}. \quad (6.6)$$

Comme on peut le vérifier par superposition d'ondes monochromatiques de la forme (6.3) avec $\omega = \omega_{\pm}$ ou par substitution dans les équations (6.2), l'expression de la solution générale issue d'une condition initiale donnée s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{H}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{H}_-[x - (U_n - c_n)t], \\ \tilde{U}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{U}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{U}_-[x - (U_n - c_n)t], \end{aligned} \quad (6.7)$$

où les fonctions $\tilde{H}_{\pm}(X)$ et $\tilde{U}_{\pm}(X)$ sont données par les relations

$$\tilde{H}_{\pm}(X) = \tilde{h}(X, 0) \pm h_n \frac{\tilde{U}(X, 0)}{c_n} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_{\pm}(X) = \tilde{U}(X, 0) \pm c_n \frac{\tilde{h}(X, 0)}{h_n}. \quad (6.8)$$

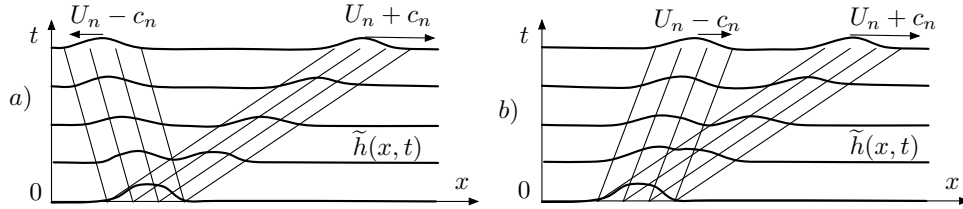


FIG. 6.3 – Évolution d'une petite perturbation $\tilde{h}(x, t)$ pour les équations de Saint-Venant. a) Cas fluvial $F_n < 1$. b) Cas torrentiel $F_n > 1$.

Si on définit le nombre de Froude de l'équilibre $F_n = U_n/c_n$, on voit que dans le "cas fluvial" $F_n < 1$, des ondes peuvent remonter le courant à la vitesse de phase $U_n - c_n$ alors que ce n'est pas possible dans le "cas torrentiel" $F_n > 1$.

1.2 Transformation du modèle non linéaire

On considère maintenant les équations de Saint-Venant 1D avec pente et frottement qui s'écrivent

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}, \quad (6.9)$$

et décrivent la dynamique d'une couche fluide d'épaisseur $h(x, t)$ et de vitesse $U(x, t)$ sur un plan incliné de "pente" $I = \sin \gamma$ où γ est l'angle du plan avec l'horizontale (voir figure 6.4). On a noté $g' = g \cos \gamma$ et C_f le coefficient de frottement qui peut éventuellement dépendre de U et h .

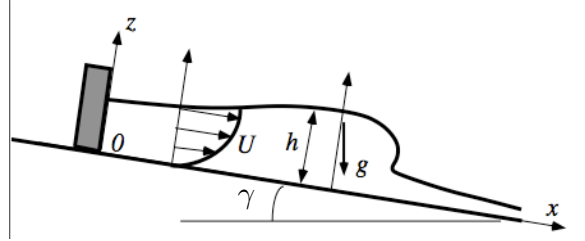


FIG. 6.4 – Géométrie de l'écoulement à surface libre modélisé par les équations de Saint-Venant. Cas avec fond incliné et frottement.

En multipliant la première équation par $\pm \sqrt{\frac{g'}{h}}$ et y ajoutant la seconde on obtient

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{g'}{h}} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\pm \sqrt{\frac{g'}{h}} U + g' \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\pm \sqrt{\frac{g'}{h}} h + U \right) \frac{\partial U}{\partial x} = \\ \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \pm \sqrt{g'h}) \frac{\partial U}{\partial x} \right] \pm \sqrt{\frac{g'}{h}} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + (U \pm \sqrt{g'h}) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + (U \pm \sqrt{g'h}) \frac{\partial}{\partial x} \right] (U \pm 2\sqrt{g'h}) = E(h, U), \quad (6.10) \end{aligned}$$

où l'on a noté $E(h, U) = g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$. On a donc transformé le système des équations de Saint-Venant non linéaires en un système équivalent qui s'écrit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_1 = N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_2 = N(J_1, J_2) \\ \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) = (U + c, U - c) \\ \text{et} \quad (J_1, J_2) = (U + 2c, U - 2c), \quad (6.11) \end{aligned}$$

où l'on a noté $c = \sqrt{g'h}$ et $N(J_1, J_2) = E(h, U)$. Les variables (J_1, J_2) et (h, U) sont liées par les relations

$$J_1 = \mathcal{J}_1(U, c) \quad \text{et} \quad J_2 = \mathcal{J}_2(U, c)$$

$$\text{avec } \mathcal{J}_1(U, c) = U + 2c \text{ et } \mathcal{J}_2(U, c) = U - 2c. \quad (6.12)$$

On en déduit facilement que $c = (J_1 - J_2)/4$ et $U = (J_1 + J_2)/2$.

Ce type de transformation n'est pas une curiosité spécifique aux équations de Saint-Venant. Il existe en fait une large famille d'équations aux dérivées partielles (EDP) dites "hyperboliques" qui peuvent se transformer de manière similaire.

1.3 Méthode des caractéristiques

Les quantités $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ sont appelées "fonctions de Riemann". Elles sont régies par deux équations d'advection couplées de vitesses d'advection respectives $\lambda_1(x, t)$ et $\lambda_2(x, t)$. On peut alors considérer les deux familles de courbes caractéristiques dont les équations respectives dans le plan (x, t) sont

$$\mathcal{C}_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t). \quad (6.13)$$

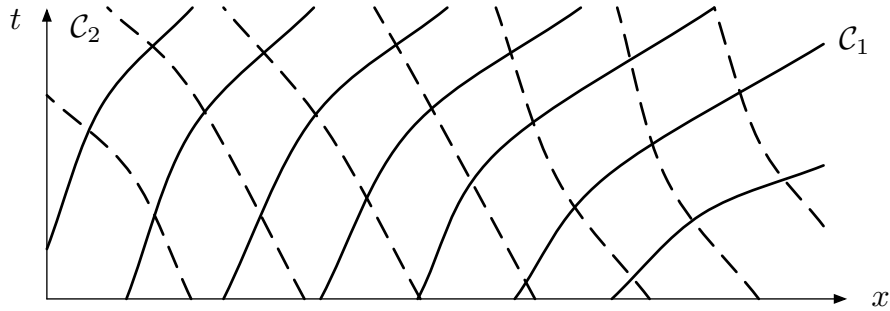


FIG. 6.5 – Familles de courbes caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 dans le plan (x, t) .

On définit la "dérivation le long des courbes caractéristiques" par les opérateurs

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_1} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}_2} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2(x, t) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (6.14)$$

L'application à une fonction $J(x, t)$ de la dérivée le long d'une courbe \mathcal{C} définie par la trajectoire $x(t)$ solution de $\dot{x} = \lambda(x, t)$ revient à prendre la dérivée par rapport au temps de la fonction $J[x(t), t]$ obtenue en suivant $x(t)$ le long de

\mathcal{C} . En effet $\frac{d}{dt} \{J[x(t), t]\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \lambda[x(t), t] \frac{\partial}{\partial x} \right\} J[x(t), t]$. Avec cette notation, les équations de Saint-Venant s'écrivent tout simplement

$$\left(\frac{dJ_1}{dt} \right)_{c_1} = N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dJ_2}{dt} \right)_{c_2} = N(J_1, J_2). \quad (6.15)$$

Cette interprétation du système en terme de dérivation suivant des courbes caractéristiques, dont le tracé dépend des solutions, permet de résoudre de nombreux problèmes d'application et de cerner exactement les domaines d'influence des conditions initiales ou des conditions aux limites.

Lorsqu'on peut négliger la pente du fond ($\gamma = 0$) et le frottement ($C_f = 0$), ce qui entraîne que le second membre $N(J_1, J_2)$ est nul, J_1 et J_2 sont appelés des "invariants de Riemann". Ils sont constants le long de leurs courbes caractéristiques respectives.

2 Ondes de détente

L'exemple de la vidange d'un canal permet d'illustrer la puissance de la méthode des caractéristiques. Nous introduisons la notion d'onde simple et nous démontrons un certain nombre de propriétés communes à tous les systèmes admettant des invariants de Riemann.

2.1 Vidange d'un canal

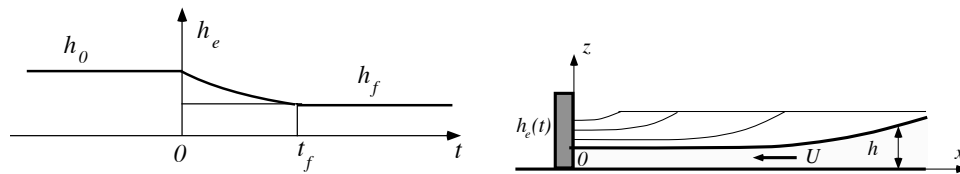


FIG. 6.6 – Vidange d'un canal. a) Courbe $h_e(t)$ du niveau d'eau imposé par l'écluse en $x = 0$. b) Onde de détente dans le canal.

On considère une couche fluide peu profonde dans un canal à fond horizontal situé à droite d'une écluse positionnée en $x = 0$. On suppose que la hauteur d'eau $h = h_e(t)$ en $x = 0$ est imposée par les manoeuvres de l'écluse et

que le mouvement peut être modélisé par les équations de Saint-Venant sans frottement. On pose donc ici $I = 0$ et $C_f = 0$ si bien que J_1 et J_2 sont des invariants de Riemann. On note $c_e(t) = \sqrt{g h_e(t)}$.

On suppose que pour $t \leq 0$, l'écoulement est uniforme avec $(h, U) = (h_0, 0)$. On suppose que dans l'intervalle $t \in [0, t_f]$ la hauteur d'eau de l'écluse $h_e(t)$ décroît (vidange) de h_0 à h_f (figure 6.6a). Enfin, pour $t \geq t_f$, on suppose que $h_e(t)$ reste constant et égal à h_f . La diminution du niveau d'eau va se propager dans le canal (figure 6.6b). Par analogie avec la propagation d'une dépression dans un tube rempli d'un gaz compressible, on parle d'onde de "détente".

Il est possible de construire la solution de ce problème de manière géométrique en traçant les courbes caractéristiques. Nous allons montrer que l'on peut découper le demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ en trois régions (figure 6.7) :

- Région (0) : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
 - Région (OS) : "onde simple" de détente avec $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variables
 - Région (f) : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$
- où U_f dans la région (f) et (h, U) dans la région (OS) sont à déterminer.

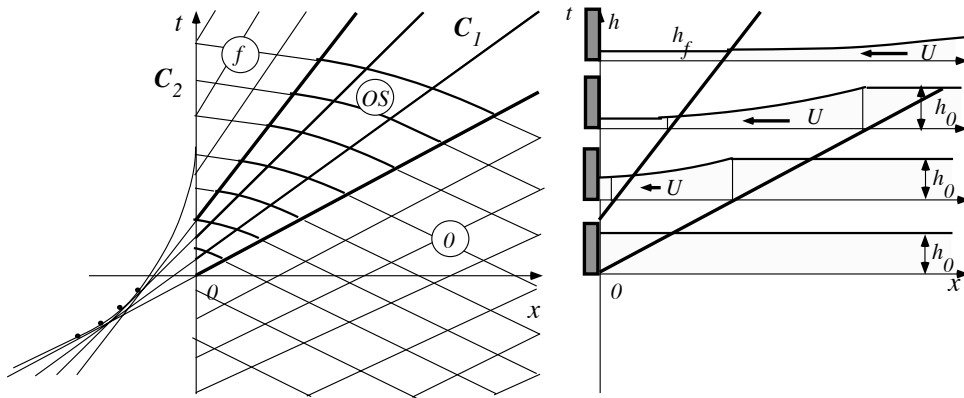


FIG. 6.7 – Caractéristiques C_1 et C_2 pour l'onde de détente.

On définit donc la région (0) comme étant l'ensemble des points pour lesquels $(h, U) = (h_0, 0)$. Dans cette région, les caractéristiques sont des droites d'équations $C_1 : x = a_1 + c_0 t$ et $C_2 : x = a_2 - c_0 t$ où l'on a noté a_1 et a_2 les intersections respectives de ces droites avec l'axe Ox et $c_0 = \sqrt{g h_0}$.

2.2 Propriétés d'une onde simple

On démontre tout d'abord que la frontière de la région (0) est forcément une caractéristique \mathcal{C}_1 , donc une droite. Si ce n'était pas le cas, un point B suffisamment proche de cette frontière et appartenant à la région (OS) adjacente serait alors à l'intersection d'une \mathcal{C}_1 et d'une \mathcal{C}_2 transverses à la frontière (voir figure 6.8). Soit E et F les intersections respectives des ces courbes avec la frontière. L'invariance des champs $J_1(x, t)$ et $J_2(x, t)$ le long de leurs caractéristiques respectives permet d'écrire

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(U_B, c_B) = \mathcal{J}_1(U_E, c_E) = \mathcal{J}_1(U_0, c_0) \\ \mathcal{J}_2(U_B, c_B) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) \end{cases} \iff \begin{cases} U_B + 2c_B = U_0 + 2c_0 \\ U_B - 2c_B = U_0 - 2c_0 \end{cases} \quad (6.16)$$

où (U_B, c_B) , (U_E, c_E) et (U_F, c_F) sont respectivement les valeurs de (U, c) aux points B , E et F et $(U_0, c_0) = (0, \sqrt{gh_0})$ les valeurs ce couple dans la région (0). On en déduit alors que $(U_B, c_B) = (U_0, c_0)$, ce qui signifie que B appartient à la région (0) et contredit donc l'hypothèse d'appartenance de B à la région (OS).

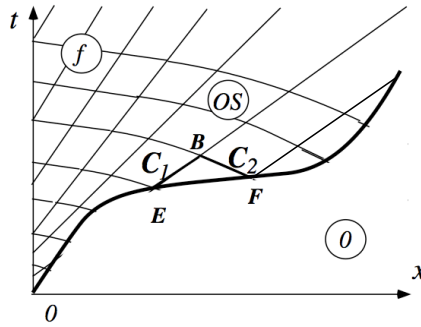


FIG. 6.8 – La frontière entre les régions (0) et (OS) est une caractéristique \mathcal{C}_1 .

Il en résulte que la frontière entre les régions (0) et (OS) ne peut pas être transverse à la fois aux familles de courbes caractéristiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Nous avons donc démontré que, dans le cas où le système admet des invariants de Riemman, la frontière d'une région où l'écoulement est uniforme est donc une \mathcal{C}_1 ou une \mathcal{C}_2 . Pour le présent exemple il ne peut pas s'agir d'une \mathcal{C}_2 car l'écoulement resterait uniforme pour tout temps sinon.

Nous allons démontrer maintenant que les caractéristiques \mathcal{C}_1 de la région (OS) adjacente à la région (0) sont des droites le long desquelles U et c sont in-

variants. Considérons une \mathcal{C}_1 de la région (OS) suffisamment proche de la frontière entre les régions (0) et (OS) et choisissons deux points A et B sur cette caractéristique (figure 6.9). On appelle alors E et F les deux intersections entre la frontière et les deux caractéristiques \mathcal{C}_2 passant respectivement par A et B . L'invariance des fonctions J_1 et J_2 le long de leurs caractéristiques respectives permet d'écrire

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(U_A, c_A) = & = \mathcal{J}_1(U_B, c_B) \\ \mathcal{J}_2(U_A, c_A) = \mathcal{J}_2(U_E, c_E) = \mathcal{J}_2(U_0, c_0) = \mathcal{J}_2(U_F, c_F) = \mathcal{J}_2(U_B, c_B) \end{cases} \quad (6.17)$$

avec des notations évidentes pour les valeurs de (U, c) aux points considérés. On en déduit que $U_A = U_B$ et $c_A = c_B$. Les grandeurs U et c (donc h) sont donc constantes le long des \mathcal{C}_1 dans la région (OS) . Comme ces caractéristiques sont définies par l'équation $\dot{x} = U + c$, leur pente est constante et ce sont donc des droites.

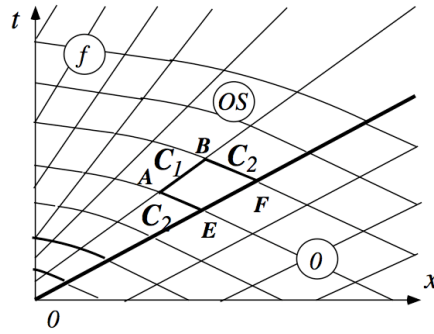


FIG. 6.9 – Les \mathcal{C}_1 de la région (OS) sont des droites.

On définit la région (OS) adjacente à la région (0) d'écoulement uniforme comme l'ensemble des points A par lesquels passe une \mathcal{C}_2 (a priori courbe) coupant la frontière. On appelle souvent "onde simple" une telle région adjacente à une région d'écoulement uniforme, du fait qu'un profil de solution se propage le long de ces caractéristiques, avec une déformation résultant du simple fait que ces droites ne sont pas parallèles.

2.3 Détermination de la solution

Nous allons maintenant déterminer la vitesse $U(0, t)$ en $x = 0$. On suppose que toutes les \mathcal{C}_2 qui coupent l'axe Ot sont issues de la région (0) (figure 6.10).

Cette hypothèse pourra être justifiée a posteriori lorsque l'on aura réussi à construire ainsi une solution dans tout le demi-plan (x, t) . Étant donné un point $(0, \tau)$ de l'axe Ot , pour lequel $c(0, \tau) = c_e(\tau) = \sqrt{gh_e(t)}$ est donc connu, l'invariance de J_2 le long de ces \mathcal{C}_2 permet donc d'écrire

$$\mathcal{J}_2[U(0, \tau), c_e(\tau)] = \mathcal{J}_2(0, c_0) \iff U(0, \tau) - 2c_e(\tau) = -2c_0 \quad (6.18)$$

et donc de déterminer la vitesse de l'écoulement $U(0, \tau) = 2[c_e(\tau) - c_0]$ qui est négative. Pour $\tau \geq t_f$, la vitesse constante $U_f = U(0, \tau) = 2(c_f - c_0)$, elle aussi négative, permet de maintenir la hauteur $h(0, \tau) = h_f$ constante en continuant à vider le canal.

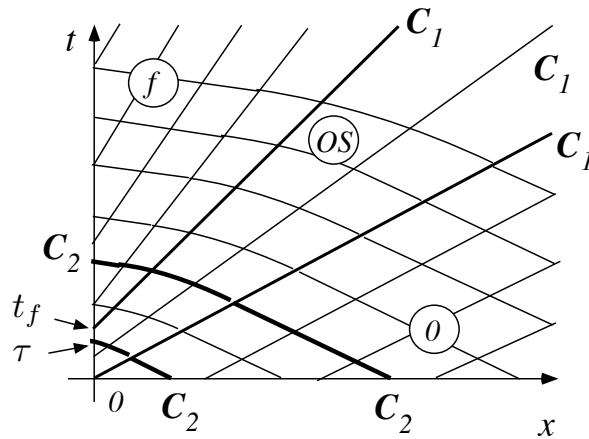


FIG. 6.10 – Détermination de $U(0, t)$ à l'aide de l'invariant J_2 le long des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 .

Il nous suffit maintenant de tracer les caractéristiques \mathcal{C}_1 issues des points $(0, \tau)$ de l'axe Ot , sachant, comme nous l'avons démontré, que ce sont des droites. Leurs équations respectives s'écrivent donc, pour $\tau \in [0, t_f]$,

$$x = [U(0, \tau) + c_e(\tau)](t - \tau) = [3c_e(\tau) - 2c_0](t - \tau), \quad (6.19)$$

et $x = (3c_f - 2c_0)(t - \tau)$ pour $\tau \geq t_f$. La première famille est constituée de droites toutes disjointes dans le demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et on définit la région (OS) comme étant leur réunion. La deuxième famille, qui définit la région (f) , est formée de droites parallèles. Comme nous avons démontré

que U et c étaient constants le long de ces droites et connus sur l'axe Ot , on est capable de déterminer géométriquement la solution (U, c) en tout point du demi-plan (x, t) . On voit ainsi que l'écoulement est uniforme dans la région (f) avec $(U, h) = (U_f, h_f)$. Pour un point (x, t) de la région (OS) d'onde simple, la solution s'obtient en déterminant la droite \mathcal{C}_1 , paramétrée par τ et qui passe à la fois par (x, t) et $(0, \tau)$. La valeur de $\tau(x, t)$ associée au couple (x, t) est obtenue en résolvant l'équation implicite

$$x = [3c_e(\tau) - 2c_0](t - \tau). \quad (6.20)$$

Cette résolution doit être effectuée de manière numérique ou graphique. On a donc $U(x, t) = U[0, \tau(x, t)] = 2\{c_e[\tau(x, t)] - c_0\}$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)]$ dans la région (OS) de l'onde simple.

On peut conclure le cas de l'onde de détente en traçant la famille des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 . Dans les régions uniformes (0) et (f) , ce sont des droites d'équations respectives $x = a - c_0 t$ et $x = a + (U_f - c_f)t = a + (c_f - 2c_0)t$. Les équations des courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 dans la région (OS) s'obtiennent en résolvant l'équation différentielle

$$\mathcal{C}_2 : \dot{x} = U(x, t) - c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] - 2c_0. \quad (6.21)$$

Même pour l'exemple simple $c_e(t) = c_0 + 3\chi t$ avec $\chi < 0$, il faut recourir à une méthode numérique pour tracer ces courbes.

3 Ondes de compression

L'exemple du remplissage d'un canal permet d'illustrer le cas où les courbes ou droites caractéristiques se croisent. Dans ce cas, il faut faire appel aux relations de saut, issues de la formulation intégrale des lois de conservation, pour déterminer la vitesse de propagation des chocs appelés ici "ressauts hydrauliques".

3.1 Remplissage d'un canal

On suppose maintenant que dans l'intervalle $t \in [0, t_f]$ la hauteur d'eau de l'écluse $h_e(t)$ croît (remplissage) de h_0 à h_f et que, pour $t \geq t_f$, la hauteur $h_e(t)$ reste constante et égale à h_f (figure 6.11a). L'augmentation du niveau d'eau va

se propager dans le canal (figure 6.11b). Par analogie avec la propagation d'une surpression dans un tube rempli d'un gaz, on parle d'onde de "compression".

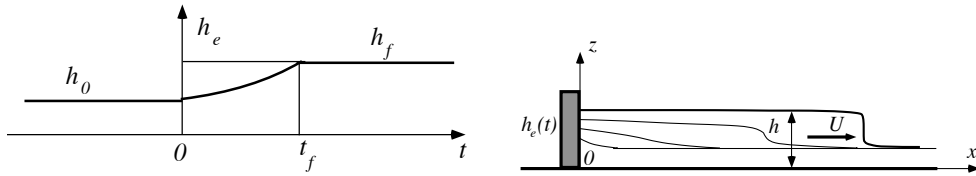


FIG. 6.11 – Remplissage d'un canal. a) Courbe $h_e(t)$ du niveau d'eau imposé par l'écluse en $x = 0$. b) Onde de compression dans le canal.

Nous allons montrer que l'on peut découper le demi-plan $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ en quatre régions (figure 6.12) :

- Région (0) : écoulement uniforme $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région (OS) : "onde simple" de compression avec $h(x, t)$ et $U(x, t)$ variables
- Région (CUSP) : intérieur de la fronce
- Région (f) : écoulement uniforme $(h, U) = (h_f, U_f)$

où U_f dans la région (f) et (h, U) dans la région (OS) sont à déterminer, et où la solution à l'intérieur de la région (CUSP) ne peut pas être trouvée sans introduire des relations de saut permettant de modéliser les chocs.

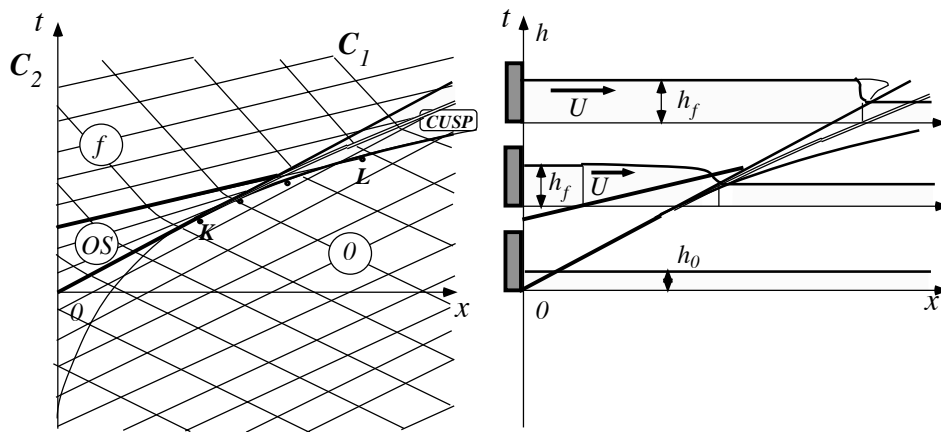


FIG. 6.12 – Caractéristiques C_1 et C_2 pour l'onde de compression.

La détermination des régions (0), (OS) et (f) se fait comme pour le cas de l'onde de détente. Dans la région d'écoulement uniforme, la vitesse constante

$U_f = 2(c_f - c_0)$ est positive et correspond au remplissage du canal permettant de maintenir la hauteur $h = h_f$ au niveau de d'écluse. Dans la région (OS) de l'onde simple, on calcule la solution (U, c) en traçant les droites \mathcal{C}_1 issues de l'axe Ot .

Le problème qui survient dans le cas de l'onde de compression est le fait que ces droites \mathcal{C}_1 se coupent. On définit alors la région $(CUSP)$ comme étant l'ensemble des points par lesquels passent plus d'une droite caractéristique \mathcal{C}_1 . Pour l'exemple $c_e(t) = c_0 + 3\chi t$ avec $\chi > 0$, cette région est comprise entre la droite \mathcal{C}_1 issue de l'origine (d'équation $x = c_0 t$), l'enveloppe des \mathcal{C}_1 de la région (OS) formant un bout de parabole (calcul classique de l'enveloppe d'une famille de courbes) reliant les points K et L (voir figure 6.12) et la droite \mathcal{C}_1 issue de la frontière entre les régions (OS) et (f) . La solution construite par la méthode des caractéristiques est multivaluée. On peut se représenter la solution ainsi obtenue comme une vague de surf qui s'allongerait indéfiniment sans réussir à déferler. Cette solution mathématique n'a rien de physique et il se forme dans la nature un "ressaut hydraulique" que l'on peut essayer de modéliser par une discontinuité de la solution. Il faut donc recourir à une nouvelle modélisation pour décrire le ressaut hydraulique qui se propage dans cette région.

Nous allons voir qu'une modélisation de ce phénomène peut être obtenue à l'aide de relations de saut déduites des lois des conservations de la masse et de la quantité de mouvement. Ces lois permettent d'écrire une relation entre la solution (U_L, h_L) à gauche du choc, la solution (U_R, h_R) à droite du choc et la vitesse $W(t)$ du choc dont la trajectoire dans le plan (x, t) est donc donnée par l'équation différentielle $\dot{x} = W(t)$. Nous ne poursuivons pas ici le traitement complet de cet exemple dont le but était de motiver l'introduction des relations de saut.

3.2 Relations de saut

Nous avons vu que les équations de Saint-Venant, formulées sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), ne permettent pas de résoudre les problèmes faisant apparaître des ressauts hydrauliques. Pour compléter la modélisation il faut revenir aux lois de conservation globales dont découlent les bilans locaux, c'est-à-dire les EDP, afin de les compléter par des relations de saut.

Sans revenir sur les principes de l'approximation des équations de Saint-Venant, nous admettons ici que les bilans globaux exprimant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour une couche fluide à surface libre peu profonde s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [hU]_{x_1}^{x_2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} hU \, dx + \left[hU^2 + \frac{1}{2}g'h^2 \right]_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} E(h, U) h \, dx \end{aligned} \quad (6.22)$$

pour tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$, avec les notations $E(h, U) = g \sin \gamma - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$ et $g' = g \cos \gamma$.

On déduit tout d'abord, de ces bilans globaux, les bilans locaux, valables pour les solutions continues et qui conduisent à la formulation des équations de Saint-Venant écrites sous la forme conservative suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (hU) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (hU) + \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) + \frac{1}{2}g' \frac{\partial}{\partial x} h^2 &= E(h, U) h. \end{aligned} \quad (6.23)$$

On démontre facilement que cette formulation est équivalente à celle des équations (6.9) que nous avons présentées auparavant.

En séparant en deux parties les intégrales englobant le choc et en appliquant la formule de Leibnitz, on déduit ensuite des bilans globaux les relations de saut gouvernant la dynamique des discontinuités des solutions et qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \llbracket h(U - W) \rrbracket &= 0, \\ \llbracket hU(U - W) + \frac{1}{2}g'h^2 \rrbracket &= 0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

où W est la vitesse du choc et où l'on a noté $\llbracket \varphi \rrbracket = \varphi_R - \varphi_L$ la discontinuité entre les valeurs à droite (D) et à gauche (G) du choc. Ces relations de saut s'écrivent donc

$$\begin{aligned} h_L(U_L - W) &= h_R(U_R - W), \\ h_L U_L(U_L - W) + \frac{1}{2}g' h_L^2 &= h_R U_R(U_R - W) + \frac{1}{2}g' h_R^2. \end{aligned} \quad (6.25)$$

On peut voir ces relations de saut comme un système de deux équations pour les **cinq** inconnues (U_L, h_L, U_R, h_R, W) . Il suffit donc de connaître **trois** paramètres pour en déduire les **deux** autres. On peut illustrer cette situation à l'aide des deux exemples suivants :

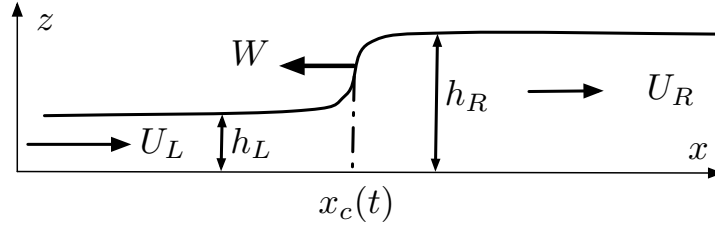


FIG. 6.13 – Ressaut hydraulique.

- *Exemple 1* : Si h_L , h_R et $U_R = 0$ sont connus on calcule $U_L = W \left(1 - \frac{h_R}{h_L}\right)$ et $W = \pm \sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$. Il y a donc deux solutions a priori (une seule a un sens physique comme il est indiqué plus loin).
- *Exemple 2* : Si h_L , h_R et $W = 0$ sont connus, on calcule $U_L = \pm \sqrt{g' \frac{h_R}{h_L} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$ et $U_R = \pm \sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L+h_R}{2}\right)}$. Il y a donc deux solutions a priori (une seule a un sens physique).

Lorsque le ressaut est mobile, il est intéressant de se placer dans le repère mobile animé de la même vitesse W . On montre facilement, à partir des relations de saut (6.25) que les vitesses $U_L - W$ et $U_R - W$ dans le repère du ressaut vérifient les relations de saut stationnaires

$$\mathcal{I}(q_W, h_L) = \mathcal{I}(q_W, h_R), \quad (6.26)$$

où $q_W = h_L(U_L - W)$, $h_L = h_R(U_R - W)$ est le débit linéique dans le repère mobile lié au ressaut et $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + \frac{1}{2}g'h^2$ est la “fonction impulsion” (voir figure 6.14).

3.3 Dissipation de l'énergie dans un ressaut

On peut donc construire de multiples familles de ressauts correspondant à des applications particulières. Cependant, la moitié de ces ressauts ne peuvent pas s'appliquer à une situation réaliste observée dans la nature. En effet, la modélisation obtenue avec ces deux seules relations de saut est encore incomplète. Il faut lui ajouter une inégalité résultant du second principe de la thermodynamique. Dans le cas des chocs des équations d'Euler compressibles, cette inégalité stipule que la discontinuité doit être telle que l'entropie

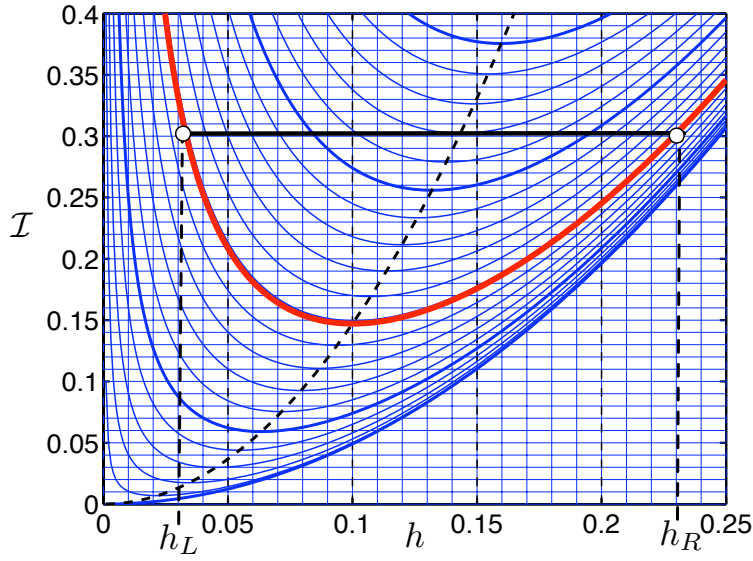


FIG. 6.14 – Impulsion $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + \frac{1}{2} g' h^2$ en fonction de h pour différentes valeurs de q (tous les $0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Hauteurs conjuguées $\mathcal{I}(q_W, h_L) = \mathcal{I}(q_W, h_R)$.

d'une particule traversant le choc augmente. Mais pour le cas des équations de Saint-Venant qui nous intéressent, l'entropie n'apparaît pas explicitement dans les équations. Il faut donc traduire le second principe par une inégalité sur l'énergie.

Nous admettons que l'équation de bilan global de l'énergie d'une couche fluide comprise entre les abscisses x_1 et x_2 s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) dx + \left[\left(\frac{1}{2} h^2 U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) U + \frac{1}{2} g' h^2 U \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [E(h, U) h U - D] dx, \quad (6.27)$$

où $D(x, t)$ est un terme qui modélise la dissipation de l'énergie. Nous supposons ici que cette dissipation est concentrée dans les ressauts hydrauliques. L'énergie divisée par la masse volumique (constante) est la somme de l'énergie cinétique $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} h U^2 dx$ et de l'énergie potentielle $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} g' h^2 dx$.

Dans le cas d'un unique ressaut d'équation $x = x_c(t)$, on peut écrire $D(x, t) =$

$D_0 \delta[x - x_c(t)]$ où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac. Le second principe de la thermodynamique requiert que la dissipation D soit partout positive, ce qui se traduit ici par $D_0 > 0$. On déduit alors du bilan global l'équation de bilan local

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} h U^3 + g' h^2 U \right) = E(h, U) h U - D \quad (6.28)$$

ainsi que la l'inégalité de saut

$$\left[\left(\frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) (U - W) + \frac{1}{2} g' h^2 U \right] = -D_0 < 0, \quad (6.29)$$

On en déduit l'inégalité

$$\left(h_L U_L^2 + g' h_L^2 \right) (U_L - W) + g' h_L^2 U_L > \left(h_R U_R^2 + g' h_R^2 \right) (U_R - W) + g' h_R^2 U_R. \quad (6.30)$$

Cette inégalité permet de ne garder que les ressauts ayant un sens physique (conformes au second principe) comme illustré dans les exemples suivants :

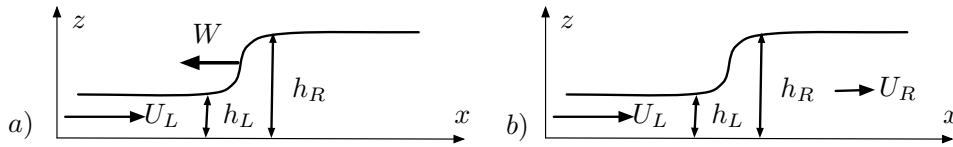


FIG. 6.15 – Deux exemples de ressauts hydrauliques. a) Exemple 1 avec $U_R = 0$. b) Exemple 2 avec $W = 0$.

- Exemple 1 : Si $h_L < h_R$ et $U_R = 0$ sont connus, on ne garde que la solution $U_L = W \left(1 - \frac{h_R}{h_L} \right) > 0$ et $W = -\sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2} \right)} < 0$.
- Exemple 2 : Si $h_L < h_R$ et $W = 0$ sont connus, on ne garde que la solution $U_L = \sqrt{g' \frac{h_R}{h_L} \left(\frac{h_L + h_R}{2} \right)} > 0$ et $U_R = \sqrt{g' \frac{h_L}{h_R} \left(\frac{h_L + h_R}{2} \right)} > 0$.

En traçant la fonction impulsion $\mathcal{I}(q_W, h)$ pour q_W fixé (figure 6.14) et en utilisant la relation de saut (6.26), on démontre que le nombre de Froude relatif $Fr' = (U - W)/\sqrt{g' h}$ est inférieur à 1 d'un côté du ressaut et supérieur à 1 de l'autre. L'inégalité implique que l'on transite d'un Froude relatif supérieur à 1 vers un Froude relatif inférieur à 1 en suivant une particule fluide qui traverse

le ressaut. Dans le cas particulier où le ressaut est stationnaire le nombre de Froude s'écrit $Fr = U/\sqrt{g'h}$. L'écoulement passe alors de torrentiel ($Fr > 1$) à fluvial ($Fr < 1$) en le traversant.

FORMULAIRE

Résolution des équations de Saint-Venant

Saint-Venant linéaire :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} .$$

Solution linéaire :

$$\tilde{h}(x, t) = \frac{1}{2} \tilde{H}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{H}_-[x - (U_n - c_n)t] .$$

Saint-Venant complet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 , \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} . \end{aligned}$$

Méthode des caractéristiques :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_1 &= N(J_1, J_2) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_2 = N(J_1, J_2) \\ \text{avec} \quad (\lambda_1, \lambda_2) &= (U + c, U - c) \quad \text{et} \quad (J_1, J_2) = (U + 2c, U - 2c) . \end{aligned}$$

Systèmes admettant des invariants de Riemman :

- La frontière entre une région uniforme et une onde simple est une droite caractéristique.
- Dans l'onde simple, les caractéristiques du même type que cette frontière sont aussi des droites.

Ressauts hydrauliques

Relations de saut :

$$\llbracket h(U - W) \rrbracket = 0 \quad , \quad \llbracket hU(U - W) + \frac{1}{2}g'h^2 \rrbracket = 0 .$$

Inégalité de saut :

$$\llbracket \left(\frac{1}{2}hU^2 + \frac{1}{2}g'h^2 \right) (U - W) + \frac{1}{2}g'h^2U \rrbracket = -D_0 < 0 .$$

EXERCICES

EXERCICE 6.1

Onde de détente

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \leq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$). On suppose que l'on peut contrôler la vitesse $U(0, t) = U_e(t) \geq 0$ en $x = 0$ au moyen d'une grille qui limite le débit. On suppose que le contrôle de la vitesse permet d'imposer $U_e(t) = \beta t$ sur l'intervalle $t \in [0, t_1]$ et $U_e(t) = U_1$ pour $t \geq t_1$ avec $U_1 = \beta t_1$. On suppose que $U_1 < 2c_0/3$ avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

- 1) On suppose que toutes les courbes caractéristiques \mathcal{C}_1 issues de l'axe Ox coupent l'axe Ot (hypothèse à valider a posteriori). En déduire que J_1 est constant dans tout le quart de plan et donner sa valeur. En déduire c_1 dans la région uniforme (1) et $c_e(t)$ pour $t \in [0, t_1]$. Décrire les caractéristiques \mathcal{C}_2 dans les régions uniformes (0) et (1). Montrer que les courbes caractéristiques \mathcal{C}_2 sont des droites dans la région de l'onde simple

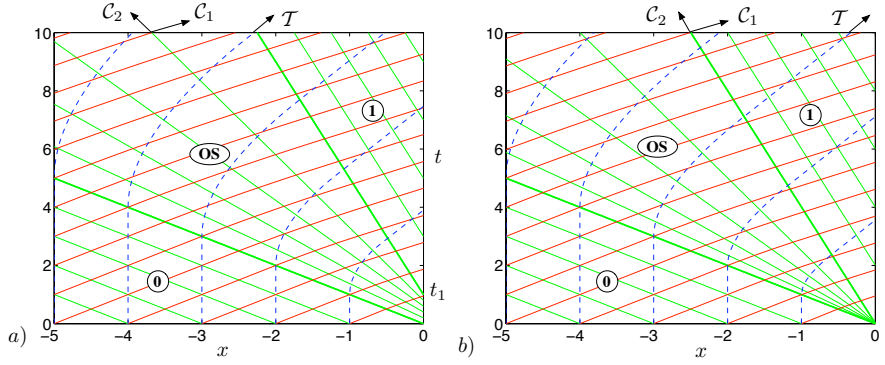


FIG. 6.16 – Caractéristiques \mathcal{C}_1 (rouge) et \mathcal{C}_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté) et régions (0), (OS) et (1). a) Onde de détente issue de $t \in [0, t_1]$. b) Onde de détente centrée.

(OS). On note $[0, \tau(x, t)]$ le point du plan à l'intersection de l'axe Ot et de la droite \mathcal{C}_2 qui passe par le point (x, t) de la région (OS) avec $x \leq 0$ et $t \geq 0$. Montrer que $\tau(x, t)$ est solution d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent de x et de t . Exprimer $\tau(x, t)$ en choisissant la racine pertinente pour le problème d'intersection de droites. En déduire $U(x, t)$ et $h(x, t)$. Écrire l'équation différentielle permettant de définir, respectivement, les courbes \mathcal{C}_1 et les trajectoires \mathcal{T} .

En connectant les régions (0) et (1) par une \mathcal{C}_1 , l'existence de l'invariant de Riemann $J_1 = 2c_0 = U_1 + 2c_1$ entraîne que $c_1 = c_0 - U_1/2$. Les droites $x = -c_0 t$ et $x = (U_1 - c_1)t = (3U_1/2 - c_0)t$ délimitent les régions (0), (OS) et (1). Comme $U_1 < 2c_0/3$, la deuxième droite est bien dans le demi-plan ($x \leq 0, t \geq 0$). Pour $t \in [0, t_1]$, l'invariance des $J_1 = 2c_0 = U_e(t) + 2c_e(t)$ entraîne $c_e(t) = c_0 - U_e(t)/2 = c_0 - \beta t/2$. Les \mathcal{C}_2 sont les droites $x = a - c_0 t$ dans la région (0), les droites $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (OS) et $x = (U_1 - c_1)(t - \tau) = (3\beta t_1/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (1). On a $(U, c) = (0, c_0)$ dans la région (0) et $(U, c) = (U_1, c_1) = (U_1, c_0 - U_1/2)$ dans la région (1). Dans la région (OS), on a $U(x, t) = U_e[\tau(x, t)] = \beta\tau(x, t)$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] = c_0 - \frac{1}{2}\beta\tau(x, t)$ où $\tau(x, t)$ est solution de l'équation implicite $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ ce qui s'écrit aussi $\frac{3\beta}{2}\tau^2 - \left(c_0 + \frac{3\beta}{2}t\right)\tau + (x + c_0 t) = 0$. On en déduit

$\tau(x, t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{c_0}{3\beta}\right) - \sqrt{\left(\frac{t}{2} - \frac{c_0}{3\beta}\right)^2 - \frac{2x}{3\beta}}$, le choix de cette racine étant motivé par le fait que $\tau(0, 0) = 0$. Dans la région (OS), les courbes \mathcal{C}_1 sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = [U(x, t) + c(x, t)] = [c_0 + \beta\tau(x, t)/2]$ tandis que les trajectoires \mathcal{T} sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = U(x, t) = \beta\tau(x, t)$.

- 2) Décrire l'écoulement de manière aussi détaillée dans le cas de l'onde de détente centrée obtenue dans la limite où t_1 est très petit. Calculer l'expression de $U(x, t)$ et $h(x, t)$ dans l'onde simple.

Pour (x, t) donné, $U(x, t)$ et $c(x, t)$ sont solutions du système formé par les deux équations $x/t = (U - c)$ et $2c_0 = U + 2c$. On en déduit $U(x, t) = \frac{2}{3}c_0 + \frac{2}{3}x/t$ et $c(x, t) = \frac{2}{3}c_0 - \frac{1}{3}x/t$.

- 3) Que se passe-t-il si $U_1 = 2c_0/3$? Calculer le nombre de Froude en $x = 0$. Comment varie le nombre de Froude $Fr(x, t)$ en un point $x \leq 0$ donné? Peut-on imposer une vitesse supérieure à cette valeur en $x = 0$?

Si $U_1 = 2c_0/3$, la caractéristique \mathcal{C}_2 issue de $(0, t_1)$ est verticale car on a $U_1 = c_1$. La condition aux limites en $x = 0$ est alors "bloquée" à cette valeur. Le nombre de Froude $Fr = U_1/c_1$ vaut 1. En tout point x , le nombre de Froude $Fr(x, t) = U/c = \frac{2c_0 t + 2x}{2c_0 t - x}$ tend vers 1. L'écoulement devient "critique" ($Fr = 1$) en tout point. Il est impossible de le contrôler par une condition aux limites aval.

EXERCICE 6.2 Choc centré

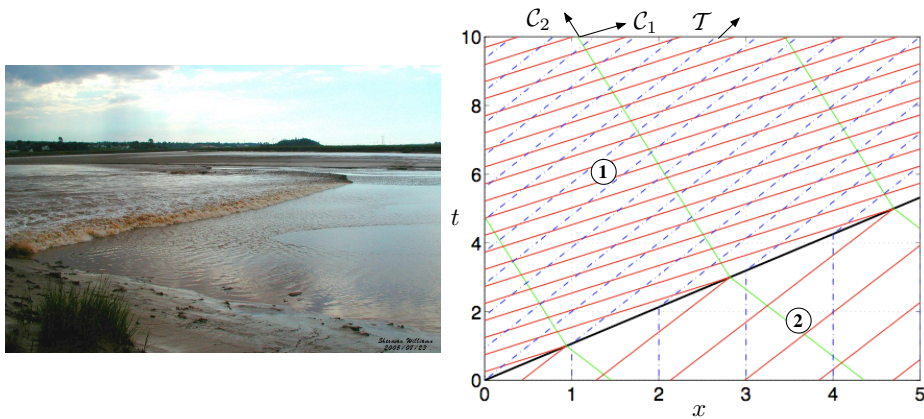


FIG. 6.17 – Choc centré (noir), caractéristiques \mathcal{C}_1 (rouge) et \mathcal{C}_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté) et régions (1) et (2).

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \geq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). On suppose que la hauteur

en $x = 0$ passe brusquement de la valeur $h(0, 0) = h_2$ à la valeur $h(0, t) = h_1$ pour tout $t \geq 0$, et que $h_1 > h_2$.

- 1) Calculer la vitesse W du choc. Décrire les \mathcal{C}_1 et les \mathcal{C}_2 dans les régions uniformes (1) et (2). Décrire les trajectoires \mathcal{T} des particules fluides.

Les relations de saut s'écrivent ici $h_1(U_1 - W) = h_2(-W)$ et $h_1 U_1(U_1 - W) + \frac{1}{2}g h_1^2 = \frac{1}{2}g h_2^2$. On en déduit $W = U_1 h_1 / (h_1 - h_2)$ et $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. La vitesse du choc est alors $W = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. Les trajectoires \mathcal{T} sont des droites de vitesses respectives U_1 et U_2 .

EXERCICE 6.3 Rupture de barrage

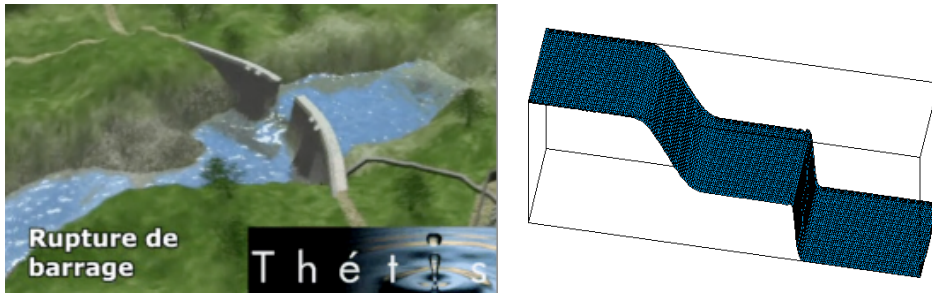


FIG. 6.18 – Rupture de barrage. a) Simulation avec le code Thétis. b) solution analytique.

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit tout le canal en séparant la portion $x \leq 0$, de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$) de la portion $x \geq 0$, de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). À l'instant $t = 0$, on enlève brusquement la séparation entre les deux portions. On suppose que cette mise en contact génère une onde de détente centrée à gauche et un choc centré à droite.

- 1) En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, montrer que $Y = F(X)$ avec $F(X) = X + \frac{X^2 - 1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}$. En supposant possible l'inversion graphique de cette fonction, montrer que l'on peut décrire tout l'écoulement.

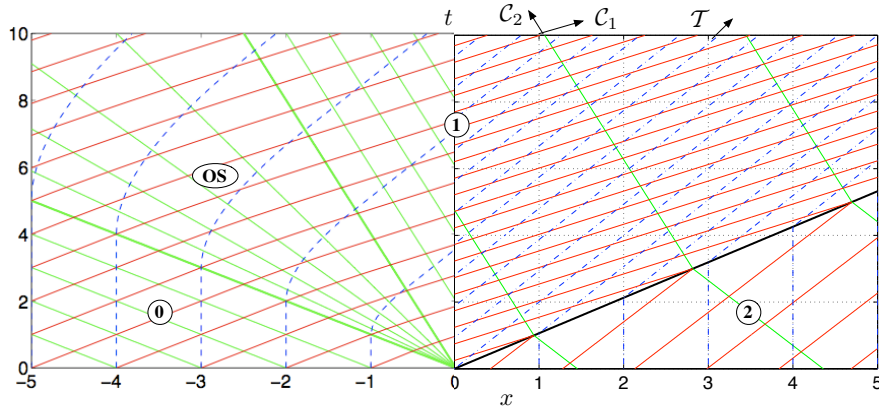


FIG. 6.19 – Rupture de barrage. Caractéristiques \mathcal{C}_1 (rouge) et \mathcal{C}_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté), choc centré (noir) et régions (0), (OS), (1) et (2)

La relation de l'onde de détente impose $2c_0 = 2c_1 + U_1$ tandis que la relation du choc centré impose $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. On en déduit la relation $2\sqrt{g h_0} - 2\sqrt{g h_1} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, on obtient l'équation implicite $Y = F(X)$ qui permet d'exprimer l'inconnue c_1 en fonction des données c_0 et c_2 .

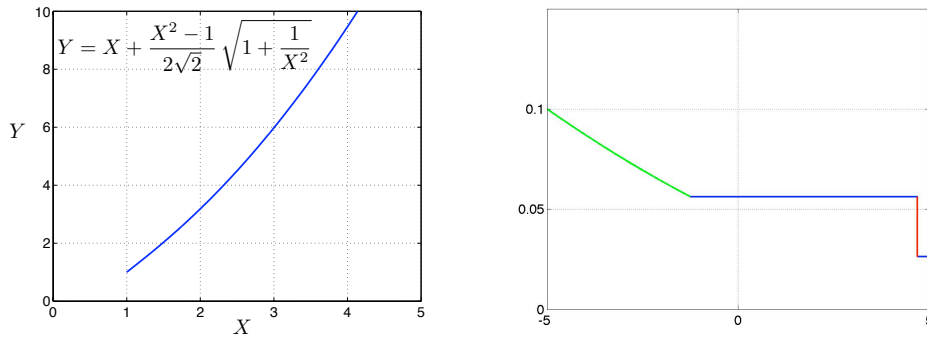


FIG. 6.20 – a) Graphe $Y = F(X)$. b) Profil $h(x, t)$ à t donné.

2) Calculer la vitesse du ressaut pour $h_0 = 10$ m et $h_2 = 40$ cm.

On a $c_0 = \sqrt{g h_1} = 10$ m/s et $c_2 = \sqrt{g h_2} = 2$ m/s. On en déduit $Y = c_0/c_2 = 5$ et on lit $X = 2.7$. Comme $X = c_1/c_2$, on a $c_1 = 5.4$ m/s. On en déduit $U_1 = 2(c_0 - c_1) = 9.3$ m/s et $W = U_1/(1 - h_2/h_1) = U_1/(1 - c_2^2/c_1^2) = 10.8$ m/s, soit environ 40 km/h.

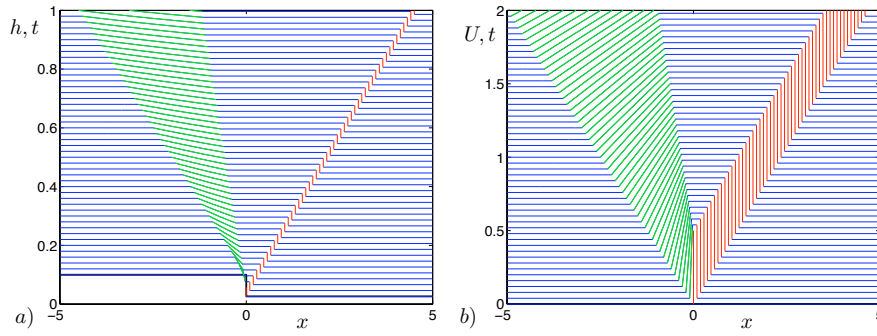


FIG. 6.21 – Évolution temporelle des profils. a) $h(x,t)$. b) $U(x,t)$.

NOTATIONS

a	Abscisse quelconque dans le plan (x, t) (m)
a_1, a_2	Valeurs particulières de a (m)
c	Notation pour $c = \sqrt{g'h}$ (m s^{-1})
c_A, c_B	Valeurs de c en A ou B (m s^{-1})
c_E, c_F	Valeurs de c en E ou F (m s^{-1})
c_n	Notation pour $c_n = \sqrt{g'h_n}$ (m s^{-1})
C_f	Coefficient de frottement ()
\mathcal{C}	Courbe caractéristique
c_0	Notation pour $\sqrt{g'h_0}$ (m s^{-1})
$c_e(t)$	Notation pour $\sqrt{g'h_e(t)}$ (m s^{-1})
c_f	Notation pour $\sqrt{g'h_f}$ (m s^{-1})
$(CUSP)$	Région “fronce” du plan (x, t)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Opérateur dérivée partielle par rapport au temps (s^{-1})
$\frac{\partial}{\partial x}$	Opérateur dérivée partielle par rapport à x (m^{-1})
$D(x, t)$	Dissipation de l'énergie ($\text{m}^3 \text{s}^{-3}$)
D_0	Intégrale de D ($\text{m}^4 \text{s}^{-3}$)
$\frac{d}{dt}$	Dérivée d'une fonction dépendant du temps (s^{-1})
$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}}$	Dérivée $\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial x}$ le long de la courbe \mathcal{C} (s^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$E(h, U)$	Notation pour $g \sin \gamma - \frac{C_f U U }{2h}$ (m s^{-2})

E	Point du plan (x, t)
EDP	Équation aux dérivées partielles
Fr	Nombre de Froude $U/\sqrt{g'h}$ ()
Fr'	Nombre de Froude relatif $(U - W)/\sqrt{g'h}$ ()
F_n	Nombre de Froude U_n/c_n de l'équilibre ()
$[f]_{x_1}^{x_2}$	Notation pour $f(x_2) - f(x_1)$ ()
$\llbracket f \rrbracket$	Notation pour $f_R - f_L$ ()
f_L, f_R	Valeurs de f à gauche et à droite d'une discontinuité
F	Point du plan (x, t)
(f)	Région uniforme du plan (x, t)
g	Gravité (m s^{-2})
g'	Notation pour $g \cos \gamma$ (m s^{-2})
grad	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
$h(x, t)$	Épaisseur de la couche fluide (m)
h_0	Hauteur constante initiale (m)
h_n	Épaisseur à l'équilibre (m)
$\tilde{h}(x, t)$	Perturbation de l'équilibre h_n (m)
\tilde{h}_m	Amplitude complexe pour $\tilde{h}(x, t)$ (m)
\tilde{H}_\pm	Profil de hauteur à $t = 0$ (m)
$h_C(t)$	Valeur de $h(x, t)$ le long de la courbe \mathcal{C} (m)
h_L, h_R	Hauteurs à gauche et à droite d'un choc (m)
h_0	Hauteur constante initiale (m)
$h_e(t)$	Hauteur imposée par l'écluse (m)
h_f	Hauteur constante finale (m)
$I = \sin \gamma$	Appelée "pente" par abus de langage ()
J_1, J_2	Invariants de Riemann
$\mathcal{J}_1(U, c)$	Expression de l'invariant de Riemann $J_1 = U + 2c$ (m s^{-1})
$\mathcal{J}_2(U, c)$	Expression de l'invariant de Riemann $J_2 = U - 2c$ (m s^{-1})
k_x	Nombre d'onde (m^{-1})
k	Valeur absolue $k = k_x $ (m^{-1})
K	Point du plan (x, t) où débute un choc
L	Point du plan (x, t)
M	Point du plan (x, t)
$N(J_1, J_2)$	Dépendance de $E(h, U)$ avec (J_1, J_2)
$O(\epsilon)$	Ordre ϵ
$O(1)$	Ordre un
(OS)	Région "Onde Simple" du plan (x, t)
P	Point du plan (x, t)

q_W	Débit linéique dans le repère mobile de vitesse W ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$s = \sigma - i\omega$	Valeur propre pour la stabilité (s^{-1})
t	Temps (s)
$U(x, t)$	Vitesse moyenne dans la direction x (m s^{-1})
U_L, U_R	Vitesses à gauche et à droite d'un choc (m s^{-1})
U_A, U_B	Valeurs de U en A ou B (m s^{-1})
U_E, U_F	Valeurs de U en E ou F (m s^{-1})
U_n	Vitesse U à l'équilibre (m s^{-1})
$\tilde{U}(x, t)$	Perturbation de l'équilibre U_n (m s^{-1})
\tilde{U}_m	Amplitude complexe pour $\tilde{U}(x, t)$ (m s^{-1})
\tilde{U}_\pm	Profil de vitesse à $t = 0$ (m s^{-1})
U_0	Vitesse horizontale constante (m s^{-1})
1D	Unidimensionnel
$w(x, t)$	Vitesse verticale (m s^{-1})
$W(t)$	Vitesse d'un choc (m s^{-1})
x, z	Coordonnées spatiales (m)
$x_C(t)$	Trajectoire de la courbe C (m)
$x_c(t)$	Trajectoire d'un choc (m)
$x_c^\pm(t)$	Point juste avant ou juste après le choc (m)
$[x_1, x_2]$	Intervalle fixe sur l'axe Ox (m)
$\dot{x}(t)$	Dérivée de la fonction $x(t)$ (m)
z	Coordonnées de la direction normale au plan incliné (m)
γ	Angle du plan incliné avec l'horizontale (°)
λ_1, λ_2	Vitesses d'advection (m s^{-1})
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
σ	Taux de croissance temporel (s^{-1})
τ	Ordonnée quelconque dans le plan (x, t) (s)
$\tau(x, t)$	Ordonnée τ de la caractéristique passant par (x, t) (s)
χ	Taux de décroissance ou croissance de $c_e(t)$ (m s^{-2})
ω	Pulsation de l'analyse de stabilité (s^{-1})
ω_\pm	Pulsations (s^{-1})