Chapitre 5

Ondes de crues

O. Thual, 8 décembre 2008

Sommaire

1 Équations de Navier-Stokes à surface libre 5
1.1 Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles 6
1.2 Conditions aux limites de l'écoulement 7
1.3 Adimensionnalisation du modèle 7
2 Dérivation des équations de Saint-Venant 8
2.1 Classification des approximations 8
2.2 Modèles intégrés sur la couche fluide 10
2.3 Équations de Saint-Venant 10
3 Dynamique des ondes de crues 11
3.1 Dynamique linéaire 11
3.2 Dynamique non linéaire 13
3.3 Ressauts de l'approximation des ondes de crues 14

NOTATIONS

a	Abscisse quelconque dans le plan (x,t) (m)
$a(s)$	Borne pour la formule de Leibnitz (m)
$b(s)$	Borne pour la formule de Leibnitz (m)
$c(h)$	Vitesse d'advection des ondes de crues (m^{-1})
c_n	Notation pour $c(h_n)$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
c	Notation pour $\sqrt{g'\,h}$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
c_n	Notation pour $\sqrt{g'\,h_n}$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
C_f	Coefficient de frottement ()
$\mathcal{C}$	Courbe caractéristique ()
$\mathcal{D}_i$	Domaine d'influence des conditions initiales dans le plan (x,t)
$\mathcal{D}_l$	Domaine d'influence des conditions aux limites dans le plan (x,t)
$\overline{\underline{\underline{d}}}$	Tenseur des taux de déformation moyenné (s^{-1})
$\underline{\underline{d}}$	Notation pour $\overline{\underline{\underline{d}}}$ (s^{-1})
div	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs (m^{-1})
$\underline{\mathrm{div}}$	Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre deux (m^{-1})
$\frac{\partial}{\partial t}$	Opérateur dérivée partielle par rapport au temps (s^{-1})
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$	Opérateur dérivée partielle par rapport à x, y, z (m^{-1})
$\frac{d}{dt}$	Opérateur dérivée particulaire $\frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}$ (s^{-1})
$\frac{d}{dt}$	D'erivée d'une fonction dépendant du temps (s^{-1})
$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}}$	Dérivée $\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_{\mathcal{C}}\,\frac{\partial}{\partial x}$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ (s^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
EDP	Équation aux dérivées partielles ()
$F(x,z,t) = 0$	Équation de la surface libre
Fr	Nombre de Froude $U/\sqrt{g'\,h}$ ()
$[f]_{x_1}^{x_2}$	Notation pour $f(x_2) - f(x_1)$ ()
$[\![f]\!]$	Notation pour $f_D - f_G$ ()
f_G, f_D	Valeurs de f à gauche et à droite d'une discontinuité ()
g	Gravité ($\mathrm{m\ s}^{-2}$)
$\underline{g}$	Vecteur gravité ($\mathrm{m\ s}^{-2}$)
g'	Notation pour $g\cos\gamma$ ($\mathrm{m\ s}^{-2}$)
$\underline{\mathrm{grad}}$	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
$h(x,t)$	Épaisseur de la couche fluide (m)
$h^+(x^+,t^+)$	Épaisseur adimensionnée ()
h_0	Échelle de longueur verticale (m)
h_n	Épaisseur à l'équilibre (m)
$\widetilde{h}(x,t)$	Perturbation de l'équilibre h_n (m)
$\widetilde{h}_m$	Amplitude complexe pour $\widetilde{h}(x,t)$ (m)
$\widetilde{H}_\pm$	Notation pour $\widetilde{h} \pm h_n\widetilde{U}/c_n$ (m)
$h_{\mathcal{C}}(t)$	Valeur de $h(x,t)$ le long de la courbe $\mathcal{C}$ (m)
h_G, h_D	Hauteurs à gauche et à droite d'un choc (m)
h_0	Hauteur constante initiale (m)
h_f	Hauteur constante finale (m)
$h_i(a)$	Condition initiale (m)
$h_l(\tau)$	Condition aux limites (m)

Δh	Amplitude de hauteur (m)
$I = \sin\gamma$	Appelée “pente” par abus de langage ()
$J(\underline{x}, t)$	Champ scalaire quelconque
k	Énergie cinétique turbulente ($\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}$)
k_s	Longueur de rugosité du fond (m)
k_n	Notation pour $U_n h_n/(2\tanh\gamma)$ ($\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1}$)
K_s	Coefficient de Strickler ($\mathrm{m}^{1/3}\ \mathrm{s}^{-1}$)
L_0	Échelle des longueurs horizontales (m)
$l(t)$	Écart type d'une gaussienne (m)
l_0	Longueur constante (m)
$O(\epsilon)$	Ordre ϵ
$O(1)$	Ordre un
$\overline{p}$	Pression en moyenne de Reynolds (Pascal)
p	Remplace la notation $\overline{p}$ (Pascal)
p_t	Pression turbulente $p + \frac{3}{2}\rho k$ (Pascal)
p^+	Pression turbulente adimensionnée ()
p_a	Pression atmosphérique (Pascal)
p_a^+	Pression atmosphérique adimensionnée ()
$Q'(\rho)$	Dérivée de $Q(\rho)$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
Rt	Nombre de Reynolds turbulent ()
Re	Nombre de Reynolds moléculaire ()
$s = \sigma - i\,\omega$	Valeur propre pour la stabilité (s^{-1})
t	Temps (s)
t^+	Temps adimensionné ()
tan	Tangente ()
tanh	Tangente hyperbolique ()
$\overline{\underline{U}}$	Vecteur vitesse en moyenne de Reynolds ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\underline{U} = (u, v, w)$	Remplace la notation $\overline{\underline{U}}$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\underline{U}'$	Fluctuation turbulente du vecteur vitesse ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
(u, v, w)	Composantes du vecteur vitesse ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
(u^+, v^+, w^+)	Vitesses adimensionnées ()
U_0	Unité pour les vitesses horizontales ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$U(x, t)$	Vitesse u moyennée dans la direction z ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
U_n	Vitesse U à l'équilibre ($\mathrm{m\ s}^{-1}$))
$\widetilde{U}(x, t)$	Perturbation de l'équilibre U_n ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\widetilde{U}_m$	Amplitude complexe pour $\widetilde{U}(x, t)$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\widetilde{U}_\pm$	Notation pour $\widetilde{U} \pm c_n \widetilde{h}/h_n$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}$	Opérateur gradient suivant $\underline{U}$ (s^{-1})
$\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{b}$	Égal $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\ b \cdot \underline{U}$ ([b] s^{-1})
U_0	Vitesse horizontale constante ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$1D$	Unidimensionnel
$w(x, t)$	Vitesse verticale ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$w(t)$	Vitesse d'un choc ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
x, y, z	Coordonnées spatiales (m)
x^+, y^+, z^+	Coordonnées spatiales adimensionnées ()
$\underline{x} = (x, y, z)$	Vecteur position (m)
$x_{\mathcal{C}}(t)$	Trajectoire de la courbe $\mathcal{C}$ (m)
$x_c(t)$	Trajectoire d'un choc (m)

$x_c^{\pm}(t)$	Point juste avant ou juste après le choc (m)
$[x_1, x_2]$	Intervalle fixe sur l'axe Ox (m)
$\dot{x}(t)$	Dérivée de la fonction $x(t)$ (m)
z	Coordonnées de la direction normale au plan incliné (m)
z_{lim}	Borne supérieure de la couche limite de fond (m)
α	Moyenne du carré de u sur le carré de sa moyenne ()
γ	Angle du plan incliné avec l'horizontale ()
Δ	Opérateur Laplacien (m^{-2})
ϵ	Rapport h_0/L_0 ()
λ	Valeur propre pour la recherche de caractéristiques ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
$\lambda(h)$	Vitesse $\frac{5}{3}U(h)$ ($\mathrm{m\ s}^{-1}$)
ρ	Masse volumique ($\mathrm{kg\ m}^{-3)}$)
$\underline{\underline{\sigma}}_t$	tenseur des contraintes turbulentes (Pa)
$\underline{\underline{I}}$	tenseur identité ()
τ_*	Contrainte de cisaillement au fond (Pa)
τ_*^+	Contrainte de cisaillement au fond (Pa)
τ	Ordonnée quelconque dans le plan (x, t) (s)
$\tau(x, t)$	Ordonnée τ de la caractéristique passant par (x, t) (s)
ν	Viscosité moléculaire ($\mathrm{m}^{2)}\ \mathrm{s}^{-1)}$)
ν_t	Viscosité turbulente ($\mathrm{m}^{2)}\ \mathrm{s}^{-1)}$)
Φ_{MS}	Constante pour la formule de Manning-Strickler ()
$\omega_{\pm}$	Notation pour $(U_n \pm c_n)\, k_1$ (s^{-1})

Introduction

Les écoulements à surface libre reviennent souvent dans le champ d'investigation et d'intervention de l'ingénieur de l'environnement. Très souvent, la profondeur de la couche d'eau est faible devant l'extension horizontale des phénomènes observés. C'est le cas des écoulements dans les rivières ou dans les canaux, du ruisselement sur le sol ou encore des mouvements à grande échelle d'un lac.
On se restreint ici au cas des canaux dont la section est un rectangle de largeur miroir L grande devant la profondeur, mais la généralisation au cas des sections variables peut être menée comme pour le cas de l'hydraulique stationnaire.
La propagation de bourrelets d'eau ou de crues, que l'on désigne sous le terme générique d'intumescences, est bien décrite par la théorie des caractéristiques appliquées aux équations de Saint-Venant.
Le passage des équations de Navier-Stokes turbulentes aux équations de Saint-Venant est abordé en utilisant la formule de Leibnitz. Une série d'approximations permettant de négliger un ou plusieurs termes des équations de Saint-Venant est présentée.

FIG. **5**.1 – *Crue d'une rivière.*

Le modèle de l'approximation des ondes de crues est ensuite utilisé pour sa pertinence hydraulique et pour sa simplicité dans l'illustration de la méthode des caractéristiques. L'exemple de l'onde de détente permet de bien comprendre la notion d'invariant transporté à la vitesse caractéristique. Le calcul de la vitesse de propagation d'un choc à partir de la formulation globale du modèle est explicité.

1 Équations de Navier-Stokes à surface libre

Nous présentons ici les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles incompressibles en présence d'un fond et d'une surface libre. Le choix d'un jeu d'unités représentatives des ordres de grandeurs pertinents permet d'écrire ce modèle sous forme adimensionnée.

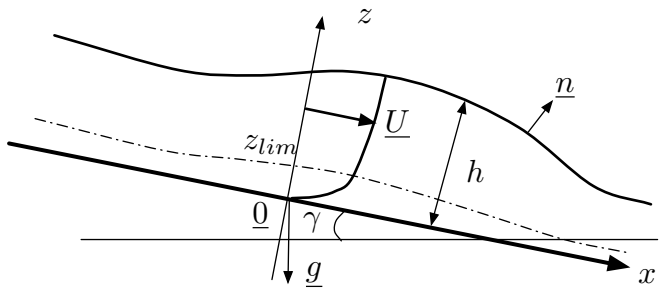

FIG. 5.2 – *Canal incliné à fond plat*

1.1 Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

On considère un écoulement à surface libre bidimensionnel sur un plan incliné faisant un angle γ avec l'horizontale. En choisissant l'axe Ox parallèle au plan incliné, on note $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$ les vecteurs orthornomés du plan (x, z). Le vecteur gravité s'écrit alors $\underline{g} = g\,\sin\gamma\,\underline{e}_x - g\,\cos\gamma\,\underline{e}_z$. On considère que le fluide est incompressible et on note ρ sa masse volumique constante. On choisit l'origine des axes au fond de telle sorte que $z = 0$ soit l'équation du plan incliné.

Lorsque l'écoulement est turbulent, le modèle des équations de Navier-Stokes incompressibles avec viscosité turbulente s'écrit, en moyenne de Reynolds,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}}\, \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{2}{3}\, k \right) + \underline{g} + \underline{\operatorname{div}} \left[(\nu + \nu_t) \underline{\underline{d}} \right] \end{aligned} \tag{5.1}$$

où ν la viscosité cinématique moléculaire, ν_t la viscosité turbulente, $\underline{\underline{d}}$ le tenseur des taux de déformation moyen, $k = \frac{1}{2}\overline{\underline{U}'^2}$ l'énergie cinétique turbulente où $\underline{U}'$ est la flucation turbulente du champ de vitesse autour de sa moyenne. Par souci de simplicité, les notations $\underline{U}$, p et $\underline{\underline{d}}$ sont utilisées pour les moyennes de Reynolds plutôt que $\overline{\underline{U}}$, $\overline{p}$ ou $\overline{\underline{\underline{d}}}$. Dans le cas bidimensionnel étudié ici, on note $\underline{U}(x, z, t) = u(x, z, t)\ \underline{e}_x + w(x, z, t)\ \underline{e}_z$ le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ le champ de pression.

On suppose que la viscosité turbulente ν_t, est constante pour $z \geq z_{lim}(x, t)$ où z_{lim} est le sommet d'une couche limite de fond et dont l'ajustement empirique fait partie intégrante du présent modèle. La prise en compte d'un modèle de turbulence plus complexe conduirait aux mêmes équations de Saint-Venant que celles qui vont être dérivées, mais la présentation de cette dérivation aurait été alourdie. On suppose que ν est négligeable devant ν_t dans la couche supérieure, ce qui permet d'écrire les équations de Navier-Stokes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_t}{\partial x} + g\,\sin\gamma + \nu_t\,\Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_t}{\partial z} - g\,\cos\gamma + \nu_t\,\Delta w\ , \end{aligned} \tag{5.2}$$

où $p_t = p + \frac{3}{2}\,\rho\,k$ est la "pression turbulente".

1.2 Conditions aux limites de l'écoulement

On suppose que l'équation de la surface libre est de la forme $F(x,z,t) = z - h(x,t) = 0$, ce qui exclut des déformations de type déferlement. La normale $\underline{n} = \underline{\text{grad}}\ F / \|\underline{\text{grad}}\ \underline{F}\|$ à la surface est proportionnelle au vecteur $\underline{\text{grad}}\ F = -\frac{\partial h}{\partial x}\,\underline{e}_x + \underline{e}_z$. La condition aux limites cinématique $\frac{dF}{dt} = 0$ s'écrit donc

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\,\frac{\partial h}{\partial x} = w \qquad \text{pour} \qquad z = h(x,t)\ . \tag{5.3}$$

La condition aux limites dynamique sur la surface libre exprime la continuité des forces de surface. Si on suppose que le fluide est en contact avec un fluide parfait de pression p_{atm} constante, elle s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{n} = -p_{atm}\,\underline{n} \qquad \text{pour} \qquad z = h(x,t) \tag{5.4}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}_t(x,z,t)$ est le "tenseur des contraintes turbulentes"

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_t &= -p_t\,\underline{\underline{I}} + 2\,\rho\,\nu_t\,\underline{\underline{d}}\ , \\ \text{avec} \quad \underline{\underline{d}}(x,z,t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\ . \end{aligned} \tag{5.5}$$

L'écriture des conditions aux limites en $z = z_{lim}$ nécessite un raccordement avec la couche limite de fond. Un modèle très simple consiste à considérer que z_{lim} est très petit et à imposer les conditions aux limites :

$$w = 0 \qquad \text{et} \qquad \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{e}_z = \tau_* \qquad \text{pour} \qquad z = 0\ , \tag{5.6}$$

où τ_* est la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur la paroi. Cette contrainte τ_* doit alors être modélisée en l'exprimant comme une fonction de la vitesse, de la hauteur ainsi que d'autres paramètres comme la viscosité moléculaire ν du fluide ou la hauteur caractéristique k_s des rugosités du fond.

1.3 Adimensionnalisation du modèle

On choisit d'adimensionner les équations de Navier-Stokes avec le système d'unités suivant :

$$\begin{gathered} x = L_0\,x^+, \qquad z = h_0\,z^+, \qquad t = \frac{L_0}{U_0}\,t^+, \\ u = U_0\,u^+, \qquad w = U_0\frac{h_0}{L_0}w^+ \quad \text{et} \quad p_t = \rho\,g'\,h_0\,p^+ \end{gathered} \tag{5.7}$$

où L_0 est une échelle de longueur horizontale, h_0 est une échelle de longueur verticale, U_0 une échelle de vitesse longitudinale et $g' = g\,\cos\gamma$ une constante proche de g lorsque γ est petit. Les champs adimensionnés dépendent des variables dimensionnelles à travers des relations du type $u(x,z,t) = U_0\,u^+(x^+,z^+,t^+)$. Un calcul simple permet d'obtenir le modèle ainsi adimensionné qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} &= 0 \\ \frac{\partial u^+}{\partial t^+} + u^+\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + w^+\frac{\partial u^+}{\partial z^+} &= -\frac{1}{Fr^2}\,\frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{\tan\gamma}{\epsilon\,Fr^2} + \frac{1}{\epsilon\,Rt}\Delta^+ u^+ \\ \epsilon^2\left(\frac{\partial w^+}{\partial t^+} + u^+\frac{\partial w^+}{\partial x^+} + w^+\frac{\partial w^+}{\partial z^+}\right) &= -\frac{1}{Fr^2}\,\frac{\partial p^+}{\partial z^+} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{\epsilon}{Rt}\Delta^+ w^+ \end{aligned}$$

$$\text{avec} \qquad \Delta^+ \;=\; \epsilon^2 \, \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{+2}} \tag{5.8}$$

et où les quatre nombres sans dimension intervenant dans ces équations sont

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \qquad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' \, h_0}} \; , \qquad Rt = \frac{h_0 \, U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan\gamma \; . \tag{5.9}$$

Le nombre de Froude Fr est le rapport entre la vitesse caractéristique U_0 de l'écoulement et une vitesse $c_0 = \sqrt{g' \, h_0}$ qui se trouve être la vitesse de propagation des ondes de surface en milieu peu profond (voir plus loin). Le nombre de Reynolds turbulent $Rt = h_0 \, U_0/\nu_t$, qui est nettement plus petit que le nombre de Reynolds $Re = h_0 \, U_0/\nu$, mesure l'importance du frottement turbulent par rapport aux autres forces. Enfin, ϵ est petit pour des écoulements peu profonds en comparaison avec les échelles horizontales considérées. On voit que l'équation de continuité ne fait apparaître aucun de ces nombres sans dimension.

Les conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{Rt}\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\epsilon}{Fr^2}\left(p^+ - p^+_{atm}\right)\frac{\partial h^+}{\partial x^+} + \frac{\epsilon^2}{Rt}\left(\frac{\partial w^+}{\partial x^+} - 2\,\frac{\partial u^+}{\partial x^+}\,\frac{\partial h^+}{\partial x^+}\right) = 0 \; , \\
&-\frac{1}{Fr^2}(p^+ - p^+_{atm}) + \frac{\epsilon^2}{Rt}\left(-\frac{\partial u^+}{\partial z^+}\frac{\partial h^+}{\partial x^+} + 2\frac{\partial w^+}{\partial z^+}\right) - \frac{\epsilon^3}{Rt}\frac{\partial w^+}{\partial x^+}\,\frac{\partial h^+}{\partial x^+} = 0 \\
&\qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h^+}{\partial t^+} + u^+\,\frac{\partial h^+}{\partial x^+} = w^+ \qquad \text{pour} \qquad z^+ = h^+(x^+, t^+) \; .
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Les conditions aux limites adimensionnées au fond s'écrivent

$$\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial x^+} = \frac{Rt \;\tan\gamma}{Fr^2}\;\tau_*^+ \qquad \text{et} \qquad w^+ = 0 \qquad \text{pour} \qquad z^+ = 0 \; , \tag{5.11}$$

où l'on a choisit d'adimensionner la contrainte de cisaillement τ_* sous la forme

$$\tau_*(x,t) = \rho \, g' \, h_0 \;\tan\gamma \;\; \tau_*^+(x^+, t^+) \; . \tag{5.12}$$

2 Dérivation des équations de Saint-Venant

La dérivation des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes turbulentes s'effectue en supposant que la profondeur est faible devant l'échelle de variation des phénomènes dans la direction de l'écoulement. Des approximations complémentaires peuvent être discutées en examinant l'ordre de grandeur d'autres paramètres comme la pente du fond, la vitesse moyenne ou encore l'intensité de la turbulence.

2.1 Classification des approximations

On s'intéresse aux cas de couches fluides peu profondes, ce qui se traduit par $\epsilon \ll 1$. Le tableau **5**.1 répertorie les différentes approximations qui conduisent à des solutions non triviales en supposant que tous les champs adimensionnés u^+, w^+, h^+, p^+ et τ_*^+ restent d'ordre 1 lorsque tout ou partie des paramètres sans dimension ϵ, $\tan\gamma$, $1/Rt$ ou Fr tendent vers zéro. Cette hypothèse n'est pas neutre et les choix d'unités effectués, par exemple pour τ_*, se justifient à posteriori en étudiant les modèles obtenus pour telle ou telle approximation.

	$\tan\gamma \ll \epsilon$	$\tan\gamma = O(\epsilon)$	$\tan\gamma = O(1)$
$Fr^2 = O(1)$			
$\frac{1}{Rt} \ll \epsilon$	Saint-Venant **sans pente ni frottement**	Saint-Venant sans frottement	
$\frac{1}{Rt} = O(\epsilon)$	Saint-Venant sans pente	Équations de **Saint-Venant** complètes	
$\frac{1}{Rt} = O(1)$			**Ondes de crues**
$Fr^2 = O(\epsilon)$			
$\frac{1}{Rt} = O(1)$		**Ondes de crues diffusantes**	

TAB. **5**.1 – Approximations dans le cas $\epsilon \ll 1$.

Toutes ces approximations conduisent à

$$\frac{\partial p^+}{\partial z^+} = -1 \qquad \text{avec} \qquad p^+ = p^+_{atm} \qquad \text{pour } z^+ = h^+(x^+, t^+). \tag{5.13}$$

La pression turbulente est donc hydrostatique. En revenant aux grandeurs dimensionnelles, on peut alors écrire

$$p_t(x, z, t) = p_{atm} - \rho\, g' \left[z - h(x, t)\right] . \tag{5.14}$$

On remplacera désormais p_t par sa valeur en fonction de h dans les équations. Les conditions aux limites restantes sont donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u\,\frac{\partial h}{\partial x} = w \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour } z = h \\ w = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho\,\nu_t\,\frac{\partial u}{\partial z} = \tau_* \qquad \text{pour } z = 0\ . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Les approximations considérées ici se différentient dans la projection de l'équation de quantité de mouvement sur la direction $\underline{e}_x$. Pour l'approximation "équations de Saint-Venant complètes" obtenue pour $\epsilon \ll 1$, $Fr^2 = O(1)$, $\tan\gamma = O(\epsilon)$ et $1/Rt = O(\epsilon)$, tous les termes sont du même ordre de grandeur et l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -g'\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I + \nu_t\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ , \tag{5.16}$$

avec $g' = g\,\cos\gamma$ et $I = \sin\gamma$. Selon les cas, le terme de frottement $\nu_t\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ou le forçage par la gravité $g\,I$ peuvent être négligeables. Pour l'approximation des ondes diffusantes et des ondes de crues, le premier membre, traduisant l'accélération, est négligeable devant les autres termes. Il sont tous les trois du même ordre pour l'approximation "des ondes diffusantes", le terme de pression $-g'\frac{\partial h}{\partial x}$ étant négligeable pour l'approximation "des ondes de crues".

2.2 Modèles intégrés sur la couche fluide

On définit la vitesse longitudinale moyenne $U(x,t)$ de la couche fluide par la relation

$$U(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)\, dz \; . \tag{5.17}$$

Pour intégrer de 0 à $h(x,t)$ les équations du modèle, il est nécessaire d'utiliser la formule de Leibnitz

$$\frac{d}{ds} \int_{a(s)}^{b(s)} f(s,z)\, dz = \int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f}{\partial s}(s,z)\, dz + \frac{db}{ds}(s)\; f[s,b(s)] - \frac{da}{ds}(s)\; f[s,a(s)]$$

valable pour toute fonction $f(s,z)$ intégrable et dérivable et tout intervalle $[a(s),b(s)]$ dont les bornes varient avec s.

L'intégration sur la verticale de l'équation de continuité conduit à

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x,z,t)\, dz + \int_0^{h(x,t)} \frac{\partial w}{\partial z}(x,z,t)\, dz = 0 \; . \tag{5.18}$$

En appliquant la formule de Leibnitz et en intégrant $\frac{\partial w}{\partial z}$, on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x,t)} u(x,z,t)\, dz - u[x,h(x,t),t] \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) + w[x,h(x,t),t] - w(x,0,t) = 0 \; .$$

En utilisant les conditions aux limites $w = 0$ pour $z = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x,t)$ et en utilisant la définition de $U(x,t)$, l'équation de conservation de la masse intégrée sur la section s'écrit finalement

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(h\,U) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \; . \tag{5.19}$$

En utilisant la relation $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}\; u = \text{div}\; (\underline{U}\, u)$ dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u\,u)}{\partial x} + \frac{\partial (w\,u)}{\partial z} = -g' \; \frac{\partial h}{\partial x} + g\; I + \nu_t \; \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \; . \tag{5.20}$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u\; dz - \frac{\partial h}{\partial t}\; u|_{z=h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2\; dz - \frac{\partial h}{\partial x}\; u^2|_{z=h} + \Big[wu \Big]_{z=0}^{z=h} = \\ -g'\, h\; \frac{\partial h}{\partial x} + g\, I\, h + \nu_t \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=h} \qquad . \end{aligned} \tag{5.21}$$

En utilisant les conditions aux limites, dont $\rho\, \nu_t\, \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_*$ pour $z = 0$, et la définition de U, on obtient

$$\frac{\partial (U\; h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2\; dz + g'\, h\, \frac{\partial h}{\partial x} = gh\, \sin\gamma - \frac{\tau_*}{\rho} \; . \tag{5.22}$$

2.3 Équations de Saint-Venant

On cherche à obtenir un modèle qui ne fasse intervenir que les champs $U(x,t)$ et $h(x,t)$. Il faut pour cela exprimer $\int_0^h u^2\, dz$ et τ_* en fonction de ces champs. Pour cela, on a recours aux

observations expérimentales, l'effort de modélisation empirique étant, une fois de plus, nécessaire. Une première modélisation consiste à écrire, par analyse dimensionnelle, que

$$\int_0^h u^2 \, dz = \alpha \, U^2 \, h \; . \tag{5.23}$$

Comme l'écoulement est turbulent, $u(z)$ est quasiment constant sur une grande partie de la couche et on peut donc supposer $\alpha = 1$. Pour la modélisation du cisaillement au fond τ_*, on définit la grandeur sans dimension $C_f(h, U)$ par la relation

$$\tau_* = \frac{1}{2} \, C_f(h, U) \, \rho \, U \, |U| \tag{5.24}$$

Un modèle grossier consiste à considérer que C_f est constant. Un modèle très souvent utilisé en hydraulique à surface libre est la formule de Manning-Strickler que l'on écrit sous l'une des formes

$$C_f(h) = \frac{2\,g}{K_s^2 \, h^{1/3}} \quad \text{ou} \quad C_f(h) = \frac{\Phi_{MS}}{4} \left(\frac{k_s}{h}\right)^{1/3} \tag{5.25}$$

où K_s est le "nombre de Strickler" (en $\mathrm{m}^{1/3}\ \mathrm{s}^{-1}$), k_s est la rugosité du fond et Φ_{MS} un nombre sans dimension qui peut être choisi de l'ordre de $\Phi_{MS} = 0.1$.

Au final, les équations de Saint-Venant s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \, \frac{\partial h}{\partial x} &= -h \, \frac{\partial U}{\partial x} \; , \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \, \frac{\partial U}{\partial x} &= -g' \, \frac{\partial h}{\partial x} + g \, I - \frac{C_f}{2} \, \frac{U|U|}{h} \end{aligned} \tag{5.26}$$

où $g' \frac{\partial h}{\partial x}$ représente le gradient de pression en x, $g\,I$ la force de pesanteur en x et $C_f(h, U)$ modélise le frottemment sur la paroi.

3 Dynamique des ondes de crues

La notion d'onde est souvent rattachée à la dynamique linéaire d'un milieu décrit par un modèle linéarisé autour d'un état d'équilibre. Mais la notion d'onde peut aussi être étendue au cas non-linéaire en désignant par ce mot tout signal reconnaissable qui se déplace avec une vitesse identifiable. Le théorie des caractéristiques offre un cadre rigoureux pour définir les trajectoires le long desquelles se propage l'information. On se place ici dans le cadre de l'approximation des ondes de crue diffusantes ou non diffusantes (voir tableau **5**.1).

3.1 Dynamique linéaire

On considère tout d'abord le modèle de "l'approximation des ondes de crues" obtenu pour $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(1)$ et $\tan\gamma = O(1)$. Il s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \, (U \, h) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = g \, I - \frac{1}{2} C_f \, \frac{U \, |U|}{h} \; . \tag{5.27}$$

On choisit le modèle de Manning-Strickler et on s'intéresse aux régimes où $U \geq 0$. On obtient alors la "relation de Strickler"

$$U = K_s \, I^{1/2} \, h^{2/3} \; . \tag{5.28}$$

En reportant dans l'équation de continuité, l'approximation des ondes de crues s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_s\, I^{1/2}\, h^{5/3}\right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5\,U}{3}\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0\ . \tag{5.29}$$

On considère alors un état d'équilibre (h_n, U_n) où h_n et U_n sont des constantes vérifiant $U_n = K_s\, I^{1/2}\, h_n^{2/3}$. On pose

$$h = h_n + \widetilde{h} \qquad \text{et} \qquad U = U_n + \widetilde{U} \tag{5.30}$$

et on suppose que $\widetilde{h}$ et $\widetilde{U}$ sont des petites perturbations de l'équilibre. En reportant dans le modèle et en négligeant les termes d'ordre deux, le modèle linéarisé s'écrit

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{5\,U_n}{3}\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0\ . \tag{5.31}$$

Une petite "intumescence" est donc advectée à une vitesse égale à 5/3 de celle de l'écoulement moyen (voir figure **5**.3a). Cette intumescence est par exemple une faible crue sur une rivière dont la pente n'est pas négligeable.

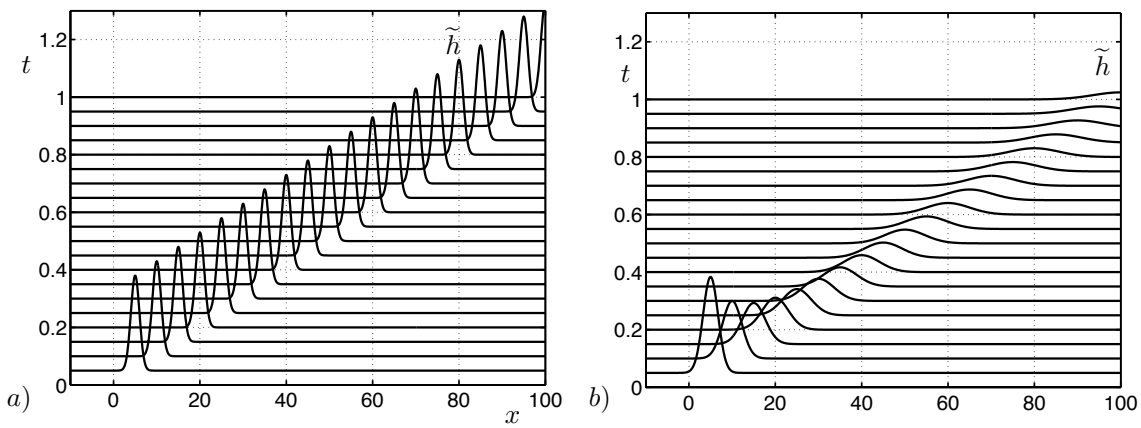

FIG. **5**.3 – *Solution $\widetilde{h}(x,t)$ a) du modèle des ondes crues sans diffusion b) du modèle des ondes de crues diffusantes.*

Lorsque la pente de la rivière ainsi que sa vitesse devient plus faible, on peut considérer le modèle des "ondes de crues diffusantes" obtenu pour $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(\epsilon)$ et $\tan\gamma = O(\epsilon)$. Ce modèle s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(U\,h) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{1}{2}C_f\,\frac{U\,|U|}{h}\ . \tag{5.32}$$

L'équilibre (h_n, U_n) vérifie la même relation de Stricker que pour le modèle précédent, mais une petite perturbation $\widetilde{h}$ vérifie maintenant

$$\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \frac{5\,U_n}{3}\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = k_n\,\frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial x^2} \qquad \text{avec} \qquad k_n = \frac{U_n\,h_n}{2\,\tan\gamma}\ . \tag{5.33}$$

L'effet du terme supplémentaire va être de diminuer l'amplitude de la crue en la diffusant. Si la condition initiale $\widetilde{h}(x,0)$ est une gaussiennne de variance l_0 et d'amplitude maximale $\widetilde{h}_m$, la solution est la gaussienne

$$\widetilde{h}(x,t) = h_m\,\frac{l_0}{l(t)}\,\exp\left[-\frac{(x - \frac{5\,U_n}{3}\,t)^2}{2\,l^2(t)}\right] \qquad \text{avec} \qquad l^2(t) = l_0^2 + k_n\,t \tag{5.34}$$

de variance $l(t)$ croissante et d'amplitude maximale décroissante (voir figure **5**.3b).

3.2 Dynamique non linéaire

On s'intéresse maintenant à la dynamique non linéaire de l'approximation des ondes de crue que l'on écrit sous la forme

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{5.35}$$

avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}U(h)$ et $U(h) = K_s\, I^{1/2}\, h^{2/3}$. On appelle "caractéristique" une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ vérifiant l'équation

$$\dot{x} = \lambda[h(x,t)] \tag{5.36}$$

où $h(x,t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles. Cette solution vérifie alors

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_{\mathcal{C}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{5.37}$$

Autrement dit, la valeur $h_{\mathcal{C}}(t) = h[x_{\mathcal{C}}(t), t]$ "mesurée le long de la courbe $\mathcal{C}$" est constante. On dit que h est un "invariant de Riemann" du système. Cette constante vaut par exemple $h_{\mathcal{C}} = h(a,0)$ si $x_{\mathcal{C}}(0) = a$, lorsque $\mathcal{C}$ passe par le point $(x,t) = (a,0)$, ou encore $h_{\mathcal{C}} = h(0,\tau)$ si $x_{\mathcal{C}}(\tau) = 0$, lorsque $\mathcal{C}$ passe par le point $(x,t) = (0,\tau)$. Comme h est constant le long de ces "courbes" et que $\lambda(h)$ ne dépend que de h, les caractéristiques sont des droites.

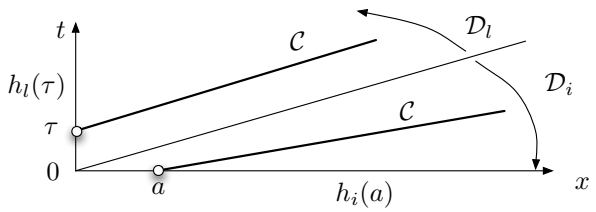

FIG. **5**.4 – *Exemples de caractéristiques $\mathcal{C}$ passant par $(a,0)$ ou $(0,\tau)$ dans le plan (x,t). Domaines d'influence $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_l$, respectivement, des conditions initiales et aux limites.*

Si on donne une condition initiale $h_i(a)$ telle que $h(x,0) = h_i(x)$ pour $x \geq 0$ et une condition aux limites $h_l(\tau)$ telle que $h(0,t) = h_l(t)$ pour $t \geq 0$, la solution $h(x,t)$ est obtenue en éliminant, respectivement, a ou bien τ de l'un des systèmes

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - a & = & \lambda(h)\,t \\ h & = & h_i(a) \end{array}\right. \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda(h)\,(t-\tau) \\ h & = & h_l(\tau) \end{array}\right. \tag{5.38}$$

suivant que l'on est dans le domaine d'influence $\mathcal{D}_i$ des conditions initiales ou $\mathcal{D}_l$ des conditions aux limites.

La résolution graphique de ces équations implicites s'effectue en traçant les droites caractéristiques $x = a + \lambda[h_i(a)]\,t$ à partir des conditions initiale ou bien les droites caractéristiques $x = \lambda[h_l(\tau)](t-\tau)$ à partir des conditions aux limites.

La figure **5**.5a représente un tel tracé à partir d'une condition initiale croissante. Comme h est constant le long de caractéristiques qui s'écartent lorsque t croît, on voit que l'extension horizontale croît, l'amplitude restant constante, comme le montre la figure **5**.5b).

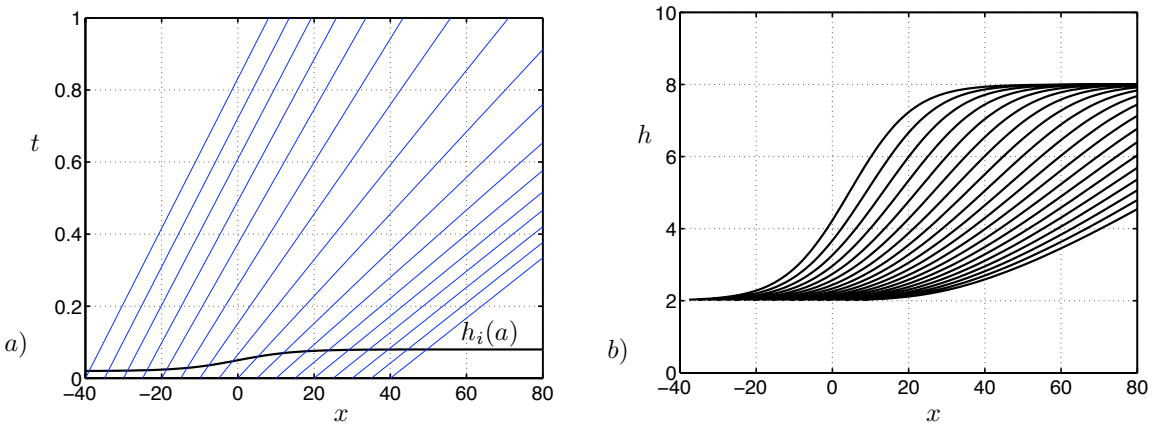

FIG. **5**.5 – *Détente. a) Droites caractéristiques dans le plan* (x,t) *et profil initial* $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right)\right]$. *b) Évolution du profil* $h(x,t)$.

La figure **5**.6a représente un tel tracé à partir d'une condition initiale décroissante. Comme h est constant le long de caractéristiques qui se rapprochent lorsque t croît, on voit que l'extension horizontale décroît, l'amplitude restant constante comme le montre la figure **5**.6b). À partir du premier instant t_c où les caractéristiques se croisent, le modèle continu de l'approximation des ondes de crues n'est plus valide. Très souvent, cette singularité traduit des phénomènes physiques où les champs varient sur des distances très courtes que l'on appellent "chocs" en aérodynamique compressible ou "ressauts" ici.

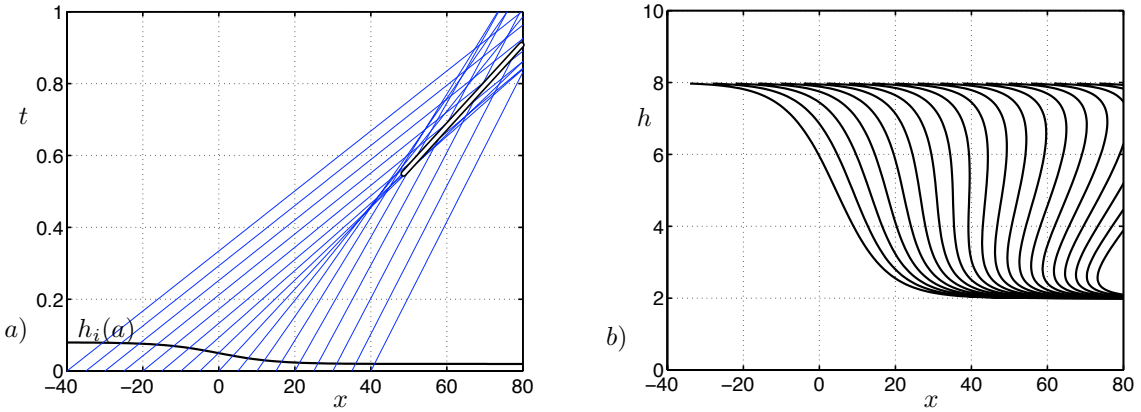

FIG. **5**.6 – *Choc. a) Droites caractéristiques dans le plan* (x,t) *et profil initial* $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2}\left[1 - \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right)\right]$ *b) Évolution du profil* $h(x,t)$.

3.3 Ressauts de l'approximation des ondes de crues

On peut chercher à modéliser ces ressauts par des fonctions $h(x,t)$ discontinues. Pour cela, il est nécessaire de formuler un modèle plus riche que l'équation aux dérivées partielles considérée. Un

tel modèle est obtenu par une formulation globale de la conservation de la masse qui postule la relation

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} h\,dx + [Q(h)]_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad Q'(h) = \lambda(h) \tag{5.39}$$

est vraie sur tout intervale fixe $[x_1, x_2]$ du domaine spatial considéré

On note $x_c(t)$ la position d'un choc mobile et $[\![h]\!] = h[x_c^+(t), t] - h[x_c^-(t), t]$ la discontinuité de h à travers ce choc. La formule de Leibnitz permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} h\,dx &= \frac{d}{dt}\left[\int_{x_1}^{x_c^-(t)} h\,dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} h\,dx\right] \\
&= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \frac{\partial h}{\partial t}\,dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t}\,dx + \dot{x}_c(t)\,h_G(t) - \dot{x}_c(t)\,h_D(t) \\
&= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \frac{\partial h}{\partial t}\,dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t}\,dx - w\,[\![h]\!]\,,
\end{aligned} \tag{5.40}$$

où $w(t) = \dot{x}_c(t)$ est la vitesse du choc. D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
[Q]_{x_1}^{x_2} &= Q[h(x_2,t)] - Q[h(x_1,t)] = [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} - Q[h_G(t)] + Q[h_D(t)] \\
&= [Q]_{x_1}^{x_c^-} + [Q]_{x_c^+}^{x_2} + [\![Q]\!]\,.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

En sommant les équations (**5**.40) et (**5**.41) et en appliquant le bilan local (**5**.35) sur les intervalles $[x_1, x_c[$ et $]x_c, x_2]$ on trouve que la vitesse du choc est

$$w(t) = [\![Q(h)]\!]/[\![h]\!] \qquad \text{avec} \qquad w(t) = \dot{x}_c(t)\,, \tag{5.42}$$

les valeurs de part et d'autre du choc étant connues grâce aux caractéristiques. Dans le cas de l'approximation des ondes de crues, on a $Q(h) = U\,h$. On peut donc écrire la relation de saut sous la forme

$$\Big[\!\Big[h(U-w)\Big]\!\Big] = 0\,. \tag{5.43}$$

FORMULAIRE

Équations de Navier-Stokes à surface libre

Navier-Stokes turbulentes :

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{div}\,\underline{U} &= 0 \\
\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U}\cdot\underline{\text{grad}}\,\underline{U} &= -\underline{\text{grad}}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{2}{3}\,k\right) + \underline{g} + \underline{\text{div}}\,[(\nu+\nu_t)\underline{\underline{d}}]\,.
\end{aligned}}$$

Conditions aux limites :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + u\,\frac{\partial h}{\partial x} = w \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}_t\cdot\underline{n} = -p_{atm}\,\underline{n} \qquad / \qquad z = h(x,t)\,.}$$

Nombres sans dimension :

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \qquad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g'\,h_0}}\ , \qquad Rt = \frac{h_0\,U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan\gamma\ .$$

Dérivation des équations de Saint-Venant

Pression hydrostatique :

$$p_t(x,z,t) = p_{atm} - \rho\,g'\,[z - h(x,t)]\ .$$

Quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -g'\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I + \nu_t\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ .$$

Cisaillement au fond :

$$\tau_* = \frac{1}{2}\,C_f(h,U)\,\rho\,U\,|U|\ .$$

Équations de Saint-Venant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} &= -h\,\frac{\partial U}{\partial x}\ , \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} &= -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h}\ . \end{aligned}$$

Dynamique des ondes de crues

Ondes de crues diffusantes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\,(U\,h) = 0 \qquad \text{et} \qquad 0 = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{1}{2}C_f\,\frac{U\,|U|}{h}\ .$$

Ondes de crues :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad , \qquad \lambda(h) = \frac{5}{3}U(h) \quad , \qquad U(h) = K_s\,I^{1/2}\,h^{2/3}\ .$$

Caractéristiques :

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = 0 \quad , \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_{\mathcal{C}}(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\ .$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE 5.1 Approximation des ondes de crues

On considère une rivière de pente $I = \sin\gamma$ et de largeur l constantes qui se laisse modéliser par les équations de Saint-Venant $\frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} = -h\,\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U\,\frac{\partial U}{\partial x} = -g'\,\frac{\partial h}{\partial x} + g\,I - \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h}$ avec $C_f = \frac{2\,g}{K_s^2\,h^{1/3}}$.

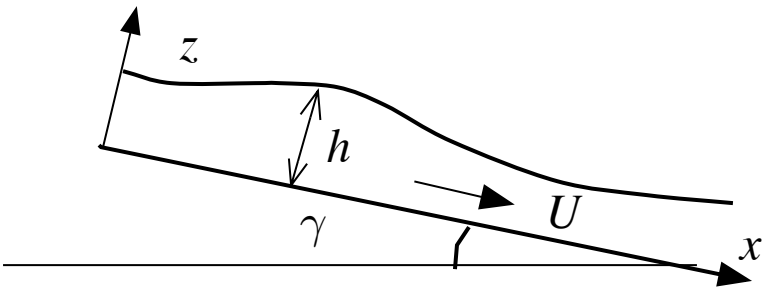

FIG. **5.7** – *Ruissellement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur une pente faisant un angle γ avec l'horizontale.*

1) Lorsque la pente I n'est pas trop petite, on suppose que l'on peut négliger l'accélération et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement. En déduire, en supposant $U \geq 0$, que h obéit à l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ où $\lambda(h)$ est une fonction que l'on explicitera. Comment se nomme l'approximation ainsi obtenue.

L'équilibre $g\;I = \frac{C_f}{2}\,\frac{U|U|}{h} = \frac{2\,g\,U^2}{K_s^2\,h^{4/3}}$ entre la force de gravité et le frottement entraine que $U = K_s\,I^{1/2}\,h^{2/3}$. En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U\,h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}\,K_s\,I^{1/2}\,h^{2/3} = \frac{5}{3}U$. On est dans le cadre de l'approximation des ondes de crues.

2) Déterminer la hauteur h_n de la solution stationnaire en supposant connu le débit linéique Q/L. Montrer que l'équation d'évolution des petites perturbations $\widetilde{h}$ se ramènent à l'équation $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_0\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$ où λ_0 est une constante que l'on explicitera.

Les équations $U_n = K_s\,I^{1/2}\,h_n^{2/3}$ et $U_n\,h_n = q$ entrainent $K_s\,I^{1/2}\,h_n^{5/3} = Q/l$ et donc $h_n = \left(\frac{Q^2}{I\,K_s^2\,l^2}\right)^{3/10}$. On en déduit $U_n = Q/(L\,h_n)$. La linéarisation de l'équation d'évolution de h conduit à $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_0\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = 0$ avec $\lambda_0 = \frac{5}{3}U_n$.

EXERCICE 5.2 Décrue et crue linéaires

On considère une portion de rivière de longueur L qui draine un bassin versant soumis à une pluie homogène est stationnaire. On modélise cette pluie par la constante P_0 dans l'équation d'évolution $\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial t} + \lambda_0\,\frac{\partial \widetilde{h}}{\partial x} = P_0$ de la perturbation de hauteur $\widetilde{h}(x,t)$ autour du régime normal $h = h_n$ avec $\lambda_0 = \frac{5}{3}U_n$ et $U_n = K_s\,I^{1/2}\,h_n^{2/3}$. On suppose que la perturbation de hauteur d'eau

en amont est constante et donnée par la condition aux limites $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t) = h(L,t)$ à l'exutoire de la portion de rivière lorsque la pluie s'arrête.

1) Calculer et tracer la solution stationnaire $h(x,t) = h_s(x)$ obtenue pour une pluie constante P_0. On pourra noter $\chi = P_0/U_0$.

La solution de l'équation $U_0\,\widetilde{h}'_s(x) = P_0$ avec la condition $\widetilde{h}_s(0) = \widetilde{h}_0$ est $\widetilde{h}_s(x) = \widetilde{h}_0 + \chi\,x$ avec $\chi = P_0/U_0$. Le profil $\widetilde{h}_s(x)$ est linéaire.

2) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $\widetilde{h}(x,0) = \widetilde{h}_s(x)$ pour $x \in [0,L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Montrer que $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq T$ avec $T = L/U_0$. Tracer dans le plan (x,t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\widetilde{h}(x,t)$.

Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + U_0\,t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0,L]$ de l'axe des x ou $x = U_0\,(t-\tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t. Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = L$ à partir du temps $T = L/U_0$. Comme h est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $\widetilde{h}(0,t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq 0$ on a $\widetilde{h}(L,t) = \widetilde{h}_0$ pour $t \geq T$. La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = U_0\,t$ est uniforme avec $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$. Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (L,t) du plan (x,t) coupe l'axe des x en $a = L - U_0\,t$. La condition initiale est égale à $\widetilde{h}_s(a) = \widetilde{h}_0 + \chi\,a$ en ce point. On a donc $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + \chi\,L - \chi\,U_0\,t = \widetilde{h}_0 + \chi\,L - P_0\,t$ pour $t \in [0,T]$. La hauteur $\widetilde{h}_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $\widetilde{h}_s(L)$ pour stagner à la valeur $\widetilde{h}_0$ au-delà de $t = T$. Pour $x \leq U_0\,t$, on a vu que $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$. Pour $x \geq U_0\,t$, la droite caractéristique passant par (x,t) coupe l'axe des x en $a = x - U_0\,t$, ce qui entraîne $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0 + \chi\,x - P_0\,t$. La solution $\widetilde{h}(x,t)$ est égale à $\widetilde{h}_s(x - U_0\,t)$ pour $x \geq U_0\,t$ et égale à $\widetilde{h}_0$ sinon.

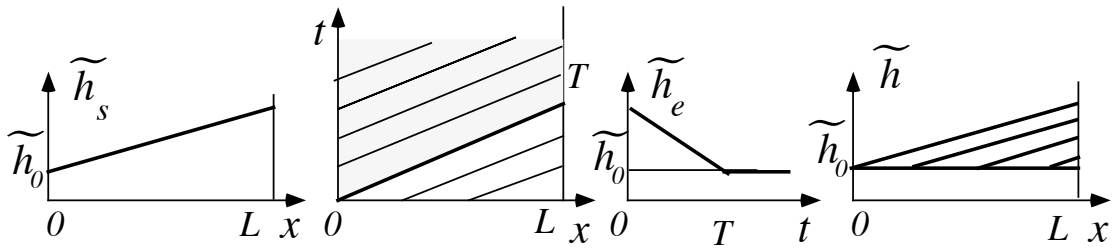

FIG. **5**.8 – *Décrue de la rivière a) Équilibre initial $\widetilde{h}_s(x)$, b) Région uniforme et droites caractéristiques, c) Courbe de décrue $\widetilde{h}_e(t)$ à l'exutoire, d) Évolution temporelle du profil $\widetilde{h}(x,t)$ vers l'équilibre $\widetilde{h}_0$.*

3) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $\widetilde{h}(x,t) = \widetilde{h}_0$ pour $x \in [0,L]$. On suppose l'existence d'une pluie constante P_0 pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\widetilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\widetilde{h}(x,t)$.

Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais $\widetilde{h}$ n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{d\widetilde{h}}{dt}\right)_{\mathcal{C}} = P_0$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (L, t) conduit à $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(L, t) = \widetilde{h}_0 + P_0\, t$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - L/U_0)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}_e(t) = \widetilde{h}(L, t) = \widetilde{h}_0 + P_0\, L/U_0 = \widetilde{h}_0 + \chi\, L$. Le profil $\widetilde{h}_e(t)$ croît linéairement de $\widetilde{h}_0$ à $\widetilde{h}_0 + \chi\, L = \widetilde{h}_0 + P_0\, T$ sur l'intervalle $[0, T]$ puis reste constant. Pour $x \geq U_0\, t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}(x, t) = \widetilde{h}_0 + P_0\, t$. Pour $x \leq U_0\, t$, la droite caractéristique passant pas (x, t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/U_0)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\widetilde{h}(x, t) = \widetilde{h}_0 + P_0\, x/U_0 = \widetilde{h}_0 + \chi\, x$. La solution $\widetilde{h}(x, t)$ part de $\widetilde{h}_0$, croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $\widetilde{h}_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse U_0.

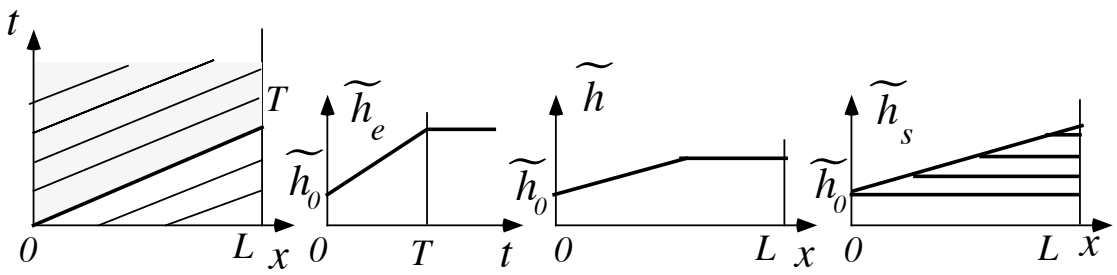

FIG. **5**.9 – *Crue de la rivière a) droites caractéristiques, b) Courbe de crue $\widetilde{h}_e(t)$ à l'exutoire, c) Profil $\widetilde{h}(x, t)$ pour $t < T$ et $\widetilde{h}(x, t)$, d) Évolution temporelle des profils $\widetilde{h}(x, t)$ vers $\widetilde{h}_s(s)$.*

EXERCICE 5.3 Crue non linéaire

On considère une portion de rivière de longueur L drainant un bassin soumis à une pluie homogène et stationnaire que l'on modélise par la constante P_0 dans l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h)\, \frac{\partial h}{\partial x} = P_0$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}\, \beta\, h^{2/3}$ et $\beta = K_s\, I^{1/2}$. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x, 0) = 0$. On suppose et la condition aux limites à l'amont est $h(0, t) = 0$ pour tout temps.

1) Calculer l'équation des caractéristiques du modèle issues des points $(x, t) = (a, 0)$ pour $a \in [0, L]$. Calculer l'équation des caractéristiques issue des points $(x, t) = (0, \tau)$ pour $\tau \geq 0$. Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$. Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ avec la droite d'équation $x = L$. En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(L, t)$ devient constant. Donner l'expression de cette valeur constante h_*. Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(L, t)$ au bas de la pente.

Les caractérsitiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3}\beta\, h^{2/3}$ et $\dot{h} = P_0$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = P_0\, t$ et $\dot{x} = \frac{5}{3}\,\beta\, P_0^{2/3}\, t^{2/3}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta\, P_0^{2/3}\, t^{5/3}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a, 0)$. Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en déduit que $h(t) = P_0(t - \tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0, \tau)$ s'écrit $x(t) = \beta\, P_0^{2/3}\, (t-\tau)^{5/3}$. Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x, t). Elles ne se coupent donc pas. L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ est $x = \beta\, P_0^{5/3}\, t^{5/3}$. Elle coupe la droite $x = L$ en (L, t_*) avec $t_* = (L/\beta)^{3/5}/P^{2/5}$. La valeur de $h(L, t)$ à l'équilibre est $h_* = P_0\, t_* = (L\, P_0/\beta)^{3/5}$. Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x, t) = (L, t)$ avec $t \in [0, t_*]$, sont toutes issues du segment de droite $(x, t) = (a, t)$ avec $a \in [0, L]$. La valeur de $h(L, t)$ est donc égale à $h(L, t) = P_0\, t$ pour $t \in [0, t_*]$ et à $h(L, t) = h_*$ pour $t \geq t_*$.

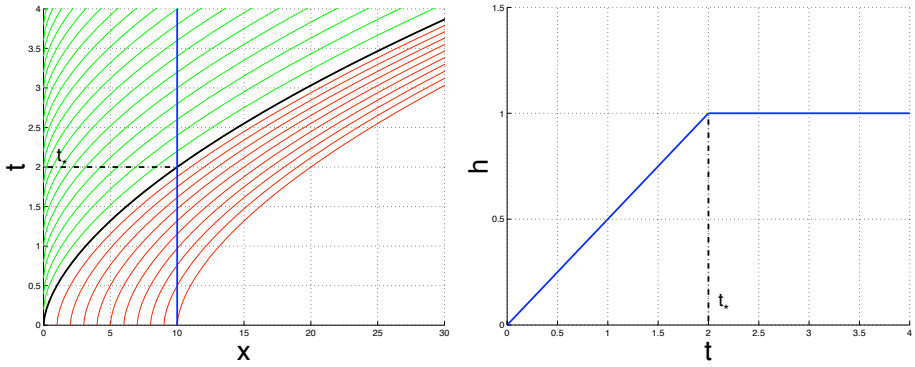

FIG. **5**.10 – *a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(L, t)$ en fonction du temps.*

2) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_*, en heures, et de h_*, en m, pour une longueur $L = 10$ km, une largeur $l = 1$ m, une pente $I = 0.1$, un nombre de Strickler de $K = 10$ en unité SI et une pluie $p = 1$ mm/jour sur un bassin versant d'aire $A = 10$ km^2 en supposant que toute l'eau des des précipitations est drainée par la rivière.

On a $P_0 = p\ A/(l\ L)$. L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 3 heures et une hauteur de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 15 cm.