

Chapitre 5

Ondes de crues

(Flood waves)

O. Thual, 19 septembre 2010

Sommaire

1	Introduction	2
2	Équations de Navier-Stokes à surface libre	3
2.1	Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles	3
2.2	Conditions aux limites de l'écoulement	4
2.3	Adimensionnalisation du modèle	5
3	Dérivation des équations de Saint-Venant	7
3.1	Classification des approximations	7
3.2	Modèles intégrés sur la couche fluide	9
3.3	Équations de Saint-Venant	10
4	Dynamique des ondes de crues	12
4.1	Dynamique linéaire	12
4.2	Dynamique non linéaire	14
4.3	Ressauts du modèle des ondes de crues	16

1 Introduction

Les écoulements à surface libre reviennent souvent dans le champ d'investigation et d'intervention de l'ingénieur de l'environnement. Très souvent, la profondeur de la couche d'eau est faible devant l'extension horizontale des phénomènes observés. C'est le cas des écoulements dans les rivières ou dans les canaux et du ruissellement sur le sol.

On se restreint ici à des canaux dont la section est un rectangle de largeur miroir L grande devant la profondeur, mais la généralisation aux canaux de sections variables peut être effectuée sans difficulté.

Le passage des équations de Navier-Stokes turbulentes aux équations de Saint-Venant est abordé en utilisant la formule de Leibnitz. Une série d'approximations permettant de négliger un ou plusieurs termes des équations de Saint-Venant est présentée.

Introduction

Open channel flows often come in the investigation and intervention scope of the environment engineer. Very often, the water layer depth is weak compared to the horizontal extension of the observed phenomena. This is the case for flows in rivers or channels and of the ground runoff.

One restrains here to channels which section is a rectangle of top width L large compared to the depth, but the generalization to channels with variable sections can be done without difficulties.

The transition from turbulent Navier-Stokes equations is tackled by using the Leibnitz formula. A series of approximations allowing to neglect one or several terms of the Saint-Venant equations is presented.



FIG. 5.1 – *La Garonne en crue. Photo de Luc Lambs, CNRS.*

The Garonne in floods. Photo CNRS

Le modèle de l'approximation des ondes de crues est ensuite utilisé pour sa pertinence hydraulique et pour sa simplicité dans l'illustration de la méthode des caractéristiques. L'exemple de l'onde de détente permet de bien comprendre la notion d'invariant transporté à la vitesse caractéristique. Le calcul de la vitesse de propagation d'un choc à partir de la formulation globale du modèle est explicité.

The kinematic flood wave approximation is then used for its hydraulic relevance and its simplicity in the illustration of the method of characteristics. The example of the expansion wave eases the understanding of the notion of invariant carried by the characteristic velocity. The computation of the propagation velocity of a shock from the global formulation of the model is explicit.

2 Équations de Navier-Stokes à surface libre

Nous présentons ici les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles incompressibles et turbulentes en présence d'un fond et d'une surface libre. Le choix d'un jeu d'unités représentatives des ordres de grandeurs pertinents permet d'écrire ce modèle sous forme adimensionnée.

Navier-Stokes equations with a free surface

We present here the two-dimensional incompressible and turbulent Navier-Stokes equations with a bottom and a free surface. The choice of a set of units representative of the pertinent orders of magnitudes enables to write this model under a dimensionless form.

2.1 Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

Two-dimensional Navier-Stokes equations

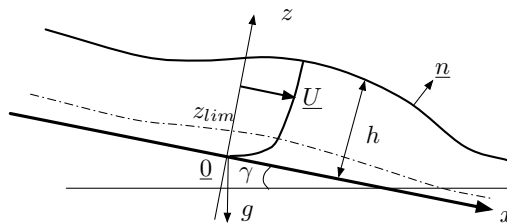


FIG. 5.2 – Canal incliné à fond plat.

Tilted channel with a flat bottom.

On considère un écoulement à surface libre bidimensionnel sur un plan incliné faisant un angle γ avec l'horizontale. En choisissant l'axe Ox parallèle au plan incliné, on note $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$ les vecteurs orthornormés du plan (x, z) . Le vecteur gravité s'écrit alors $\underline{g} = g \sin \gamma \underline{e}_x - g \cos \gamma \underline{e}_z$. On considère que le fluide est incompressible et on note ρ sa masse volumique constante. On choisit l'origine des axes au fond de telle sorte que $z = 0$ soit l'équation du plan incliné.

Let consider a two-dimensional flow on a tilted plane making an angle γ with the horizontal. By choosing the Ox axis to be parallel to the tilted plane, one denotes by $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$ the unit vectors of the (x, z) plan. The gravity vector then reads $\underline{g} = g \sin \gamma \underline{e}_x - g \cos \gamma \underline{e}_z$. One considers that the fluid is incompressible and denotes by ρ its constant mass density. One chooses the axes origin at the bottom so the $z = 0$ be the tilted plane equation.

Lorsque l'écoulement est turbulent, le modèle des équations de Navier-Stokes incompressibles avec viscosité turbulente s'écrit, en moyenne de Reynolds,

When the flow is turbulent, the model of the incompressible Navier-Stokes equations with turbulent viscosity reads, in Reynolds average,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} &= -\underline{\operatorname{grad}} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{2}{3} k \right) + \underline{g} + \underline{\operatorname{div}} [(\nu + \nu_t) \underline{d}], \end{aligned} \quad (5.1)$$

où ν est la viscosité cinématique moléculaire, ν_t la viscosité turbulente, \underline{d} le tenseur moyen des taux de déformation, $k = \frac{1}{2} \overline{U'^2}$ l'énergie cinétique turbulente où \underline{U}' est la fluctuation turbulente du champ de vitesse autour de sa moyenne. Par souci de simplicité, les notations \underline{U} , p et \underline{d} sont utilisées pour les moyennes de Reynolds plutôt que \overline{U} , \overline{p} ou \overline{d} . Dans le cas bidimensionnel étudié ici, on note $\underline{U}(x, z, t) = u(x, z, t) \underline{e}_x + w(x, z, t) \underline{e}_z$ le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ le champ de pression.

On suppose que la viscosité turbulente ν_t est constante pour $z \geq z_{lim}(x, t)$ où z_{lim} est le sommet d'une couche limite de fond dont l'ajustement empirique fait partie intégrante du présent modèle. La prise en compte d'un modèle de turbulence plus complexe conduirait aux mêmes équations de Saint-Venant que celles qui vont être dérivées, mais la présentation de cette dérivation aurait été alourdie. On suppose que ν est négligeable devant ν_t dans la couche supérieure, ce qui permet d'y écrire les équations de Navier-Stokes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x} + g \sin \gamma + \nu_t \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial z} - g \cos \gamma + \nu_t \Delta w, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $p_t = p + \frac{3}{2} \rho k$ est la "pression turbulente".

2.2 Conditions aux limites de l'écoulement

On suppose que l'équation de la surface libre est de la forme $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$, ce qui exclut des déformations de type déferlement. La normale $\underline{n} = \underline{\operatorname{grad}} F / \|\underline{\operatorname{grad}} F\|$ à la surface est proportionnelle au vecteur $\underline{\operatorname{grad}} F = -\frac{\partial h}{\partial x} \underline{e}_x + \underline{e}_z$. La condition aux limites cinématique $\frac{dF}{dt} = 0$ s'écrit donc

where ν is the kinematic molecular viscosity, ν_t the turbulent viscosity, \underline{d} the average strain tensor, $k = \frac{1}{2} \overline{U'^2}$ the turbulent kinetic energy where \underline{U}' is the turbulent fluctuation of the velocity field around its average. For simplicity, the notations \underline{U} , p and \underline{d} are used for the Reynolds means rather than \overline{U} , \overline{p} or \overline{d} . In the two-dimensional case which is studied here, one denotes by $\underline{U}(x, z, t) = u(x, z, t) \underline{e}_x + w(x, z, t) \underline{e}_z$ the velocity field and $p(x, z, t)$ the pressure field.

One assumes that the turbulent viscosity ν_t is constant for $z \geq z_{lim}(x, t)$ where z_{lim} is the top of a bottom boundary layer which empirical adjustment is part of the present model. The consideration of a more complex turbulent model would lead to the same Saint-Venant equations than those which are about to be derived, but the presentation of this derivation would have been heavier. One supposes that ν is negligible in front of ν_t in the upper layer, which allows to write there the Navier-Stokes equations under the form

where $p_t = p + \frac{3}{2} \rho k$ is the "turbulent pressure".

Flow boundary conditions

One assumes that the free surface equation reads $F(x, z, t) = z - h(x, t) = 0$, which exclude deformations of the breaking type. The normal $\underline{n} = \underline{\operatorname{grad}} F / \|\underline{\operatorname{grad}} F\|$ to the surface is proportional to the vector $\underline{\operatorname{grad}} F = -\frac{\partial h}{\partial x} \underline{e}_x + \underline{e}_z$. The kinematic boundary condition $\frac{dF}{dt} = 0$ then reads

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{for} \quad z = h(x, t). \quad (5.3)$$

La condition aux limites dynamique sur la surface libre exprime la continuité des forces de surface. Si on suppose que le fluide (l'eau) est en contact avec un fluide parfait (l'air) de pression p_a constante, elle s'écrit

The dynamic boundary condition on the free surface expresses the continuity of the surface forces. If one assumes that the fluid (water) is in touch with a perfect fluid (air) of constant pressure p_a , it reads

$$\underline{\sigma}_t \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n} \quad \text{for} \quad z = h(x, t), \quad (5.4)$$

où $\underline{\sigma}_t(x, z, t)$ est le "tenseur des contraintes turbulentes"

where $\underline{\sigma}_t(x, z, t)$ is the "turbulent stress tensor"

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_t &= -p_t \underline{I} + 2 \rho \nu_t \underline{d}, \\ \text{with } \underline{d}(x, z, t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

L'écriture des conditions aux limites en $z = z_{lim}$ nécessite un raccordement avec la couche limite de fond. Un modèle très simple consiste à considérer que z_{lim} est très petit et à imposer les conditions aux limites :

The settlement of the boundary conditions at $z = z_{lim}$ necessitates a matching with the bottom boundary layer. A very simple model consists in considering that z_{lim} is very small and to impose the boundary conditions :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \underline{e}_x \cdot \underline{\sigma}_t \cdot \underline{e}_z = \tau_* \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad (5.6)$$

où τ_* est la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur la paroi. Cette contrainte τ_* doit alors être modélisée en l'exprimant comme une fonction de la vitesse, de la hauteur ainsi que d'autres paramètres comme la viscosité moléculaire ν du fluide ou la hauteur caractéristique k_s des rugosités du fond.

where τ_* is the shear stress applied by the fluid on the wall. The stress τ_* must then be modelled as a function of the velocity, of the height as well as other parameters such as the molecular viscosity ν of the fluid or the characteristic height k_s of the bottom roughnesses.

2.3 Adimensionnalisation du modèle

Model dimensionless form

On choisit d'adimensionner les équations de Navier-Stokes avec le système d'unités suivant :

One chooses to put in a dimensionless form the Navier-Stokes equations with the following unit system :

$$\begin{aligned} x &= L_0 x^+, & z &= h_0 z^+, & t &= \frac{L_0}{U_0} t^+, \\ u &= U_0 u^+, & w &= U_0 \frac{h_0}{L_0} w^+ & \text{and} & p_t = \rho g' h_0 p_t^+, \end{aligned} \quad (5.7)$$

où L_0 est une échelle de longueur horizontale, h_0 est une échelle de longueur verticale, U_0 une échelle de vitesse longitudinale et $g' = g \cos \gamma$ une constante proche de g lorsque γ est petit. Les champs adimensionnés dépendent des variables dimensionnelles à travers des relations du type $u(x, z, t) = U_0 u^+(x^+, z^+, t^+)$. Un calcul simple permet d'obtenir le modèle ainsi adimensionné qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} &= 0 \\ \frac{\partial u^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} &= -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p_t^+}{\partial x^+} + \frac{\tan \gamma}{\epsilon Fr^2} + \frac{1}{\epsilon Rt} \Delta^+ u^+ \\ \epsilon^2 \left(\frac{\partial w^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial w^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) &= -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p_t^+}{\partial z^+} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{\epsilon}{Rt} \Delta^+ w^+ \\ \text{with } \Delta^+ &= \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{+2}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

et où les quatre nombres sans dimension intervenant dans ces équations sont

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' h_0}}, \quad Rt = \frac{h_0 U_0}{\nu_t} \quad \text{and} \quad \tan \gamma. \quad (5.9)$$

Le nombre de Froude Fr est le rapport entre la vitesse caractéristique U_0 de l'écoulement et une vitesse $c_0 = \sqrt{g' h_0}$ qui se trouve être la vitesse de propagation des ondes de surface en milieu peu profond (voir plus loin). Le "nombre de Reynolds de frottement" $Rt = h_0 U_0 / \nu_t$, qui est nettement plus petit que les nombres de Reynolds moléculaires $h_0 U_0 / \nu$ ou $L_0 U_0 / \nu$, mesure l'importance du frottement turbulent par rapport aux autres forces. Enfin, ϵ est petit pour des écoulements peu profonds en comparaison avec les échelles horizontales considérées. On voit que l'équation de continuité (conservation de la masse) ne fait apparaître aucun de ces nombres sans dimension.

Les conditions aux limites adimensionnées sur la surface libre s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{1}{Rt} \frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\epsilon}{Fr^2} (p_t^+ - p_a^+) \frac{\partial h^+}{\partial x^+} + \frac{\epsilon^2}{Rt} \left(\frac{\partial w^+}{\partial x^+} - 2 \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} \right) &= 0, \\ -\frac{1}{Fr^2} (p_t^+ - p_a^+) + \frac{\epsilon^2}{Rt} \left(-\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} + 2 \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) - \frac{\epsilon^3}{Rt} \frac{\partial w^+}{\partial x^+} \frac{\partial h^+}{\partial x^+} &= 0 \end{aligned}$$

where L_0 is a horizontal length scale, h_0 is a vertical length scale, U_0 a longitudinal velocity scale and $g' = g \cos \gamma$ a constant close to g when γ is small. The dimensionless fields depend on dimensional variables through relation of the type $u(x, z, t) = U_0 u^+(x^+, z^+, t^+)$. A simple calculus enables to then obtain a dimensionless model which reads

and where the four dimensionless number contributing in these equations are

The Froude number Fr is the ratio between the characteristic velocity U_0 of the flow and a velocity $c_0 = \sqrt{g' h_0}$ which happens to be the propagation velocity of waves in a shallow medium (see below). The "Friction Reynolds number" $Rt = h_0 U_0 / \nu_t$, which is frankly smaller than the molecular Reynolds numbers $h_0 U_0 / \nu$ or $L_0 U_0 / \nu$, measures the magnitude of the turbulent friction compared to the other forces. At last, ϵ is small for flows which are shallow compared to the horizontal considered scales. One sees that the continuity equation (mass conservation) does not exhibit any of these dimensionless numbers.

The dimensionless boundary conditions on the free surface read

$$\text{and} \quad \frac{\partial h^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial h^+}{\partial x^+} = w^+ \quad \text{for} \quad z^+ = h^+(x^+, t^+). \quad (5.10)$$

Les conditions aux limites adimensionnées au fond s'écrivent

The dimensionless boundary conditions at the bottom read

$$\frac{\partial u^+}{\partial z^+} + \frac{\partial w^+}{\partial x^+} = \frac{Rt \tan \gamma}{Fr^2} \tau_*^+ \quad \text{et} \quad w^+ = 0 \quad \text{for} \quad z^+ = 0, \quad (5.11)$$

où l'on a choisi d'adimensionner la contrainte de cisaillement τ_* sous la forme

where one has chosen to put the shear stress τ_* in the dimensionless form

$$\tau_*(x, t) = \rho g' h_0 \tan \gamma \tau_*^+(x^+, t^+). \quad (5.12)$$

3 Dérivation des équations de Saint-Venant

Derivation of the Saint-Venant equations

Les équations de Saint-Venant s'obtiennent en intégrant sur la verticale les équations de Navier-Stokes turbulentes en supposant que la profondeur est faible devant l'échelle de variation des phénomènes dans la direction de l'écoulement. Des approximations complémentaires peuvent être discutées en examinant l'ordre de grandeur d'autres paramètres comme la pente du fond, la vitesse moyenne ou encore l'intensité de la turbulence.

The Saint-Venant equations are obtained by integrating in the vertical direction the turbulent Navier-Stokes equations, assuming that the depth is weak in front of the variation scale of the phenomena in the direction of the flow. Complementary approximations can be discussed by studying the order of magnitude of other parameters such as the bottom slope, the mean velocity or still the turbulence intensity.

3.1 Classification des approximations

Classification of the approximations

On s'intéresse aux cas de couches fluides peu profondes, ce qui se traduit par $\epsilon \ll 1$. Le tableau 5.1 répertorie les différentes approximations qui conduisent à des solutions non triviales en supposant que tous les champs adimensionnés u^+ , w^+ , h^+ , p_t^+ et τ_*^+ restent d'ordre 1 lorsque tout ou partie des paramètres sans dimension ϵ , $\tan \gamma$, $1/Rt$ ou Fr tendent vers zéro. Cette hypothèse n'est pas neutre et les choix d'unités effectués, par exemple pour τ_* , se justifient a posteriori en étudiant les modèles obtenus pour telle ou telle approximation.

One is interested in the case of shallow layers of fluid, which is traduced by $\epsilon \ll 1$. Table 5.1 lists the various approximations which lead to non trivial solutions, assuming than all the dimensionless fields u^+ , w^+ , h^+ , p_t^+ and τ_*^+ remain of order 1 when all or part of the dimensionless parameters ϵ , $\tan \gamma$, $1/Rt$ or Fr go to zero. This hypothesis is not neutral and the performed unit choices, for example for τ_* , are justified afterwards by studying the models obtained by such or such approximation.

Toutes ces approximations conduisent à

All these approximations lead to

$$\frac{\partial p_t^+}{\partial z^+} = -1 \quad \text{avec} \quad p_t^+ = p_a^+ \quad \text{pour} \quad z^+ = h^+(x^+, t^+). \quad (5.13)$$

	$\tan \gamma \ll \epsilon$	$\tan \gamma = O(\epsilon)$	$\tan \gamma = O(1)$
$Fr^2 = O(1)$			
$\frac{1}{Rt} \ll \epsilon$	Saint-Venant no slope no friction	Saint-Venant no friction	
$\frac{1}{Rt} = O(\epsilon)$	Saint-Venant no slope	Saint-Venant equations full terms	
$\frac{1}{Rt} = O(1)$			Kinematic flood waves
$Fr^2 = O(\epsilon)$			
$\frac{1}{Rt} = O(1)$		Diffusive kinematic flood waves	

TAB. 5.1 – Approximations dans le cas $\epsilon \ll 1$.

Approximation in the case $\epsilon \ll 1$.

La pression turbulente est donc hydrostatique. En revenant aux grandeurs dimensionnelles, on peut alors écrire

The turbulent pressure is thus hydrostatic. Coming back to field with dimensions, one can then write

$$p_t(x, z, t) = p_a - \rho g' [z - h(x, t)] . \tag{5.14}$$

On remplacera désormais p_t par sa valeur en fonction de h dans les équations. Les conditions aux limites restantes s'écrivent, à l'ordre dominant de toutes les approximations,

One will henceforth replace p_t by its value as a function of h in the equations. The remaining boundary conditions read, at the dominant order of all the approximations,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = h , \\ w = 0 \quad \text{et} \quad \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_* \quad \text{for } z = 0 . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Les approximations du tableau 5.1 se différencient dans la projection de l'équation de quantité de mouvement sur la direction \underline{e}_x . Pour l'approximation "équations de Saint-Venant complètes" obtenue pour $\epsilon \ll 1$, $Fr^2 = O(1)$, $\tan \gamma = O(\epsilon)$ et $1/Rt = O(\epsilon)$, tous les termes de l'équation de quantité de mouvement sont du même ordre de grandeur et l'on a

The approximations of Table 5.1 differentiate from each others in the projection of the momentum equation on the \underline{e}_x direction. For the "full Saint-Venant Equations approximation" obtained for $\epsilon \ll 1$, $Fr^2 = O(1)$, $\tan \gamma = O(\epsilon)$ and $1/Rt = O(\epsilon)$, all the terms of the momentum equation are of the same order of magnitude et one has

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I + \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} , \tag{5.16}$$

avec $g' = g \cos \gamma$ et $I = \sin \gamma$. Pour d'autres approximations, le terme de frottement $\nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ou le forçage par la gravité gI peuvent être négligeables. Pour l'approximation des ondes diffusantes et des ondes de crues, le premier membre, traduisant l'accélération, est négligeable devant les autres termes. Ces derniers sont tous les trois du même ordre pour l'approximation "des ondes diffusantes", le terme de pression $-g' \frac{\partial h}{\partial x}$ étant négligeable pour l'approximation "des ondes de crues".

with $g' = g \cos \gamma$ and $I = \sin \gamma$. For other approximations, the friction term $\nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ or the gravity forcing gI can be negligible. For the diffusive kinematic flood waves approximation, the first member, traducing the acceleration, is negligible in front of the other tems. These latter are all three of the same order for the "diffusive kinematic flood wave" approximation, the pressure term $-g' \frac{\partial h}{\partial x}$ being negligible for the "kinematic flood wave" approximation.

3.2 Modèles intégrés sur la couche fluide

Models integrated on the fluid layer

On définit la vitesse longitudinale moyenne $U(x, t)$ de la couche fluide par la relation

One defines the fluid layer longitudinal velocity $U(x, t)$ by the relation

$$U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz . \quad (5.17)$$

Pour intégrer de 0 à $h(x, t)$ les équations du modèle, il est nécessaire d'utiliser la formule de Leibnitz

To integrate from 0 to $h(x, t)$ the model equations, it is necessary to use the Leibnitz formula

$$\frac{d}{ds} \int_{a(s)}^{b(s)} f(s, z) dz = \int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f}{\partial s}(s, z) dz + \frac{db}{ds}(s) f[s, b(s)] - \frac{da}{ds}(s) f[s, a(s)]$$

valable pour toute fonction $f(s, z)$ intégrable et dérivable et tout intervalle $[a(s), b(s)]$ dont les bornes varient avec s .

valid for all integrable and derivable function $f(s, z)$ and all interval $[a(s), b(s)]$ which boundaries vary with s .

L'intégration sur la verticale de l'équation de continuité conduit à

The integration on the vertical of the continuity equation leads to

$$\int_0^{h(x, t)} \frac{\partial u}{\partial x}(x, z, t) dz + \int_0^{h(x, t)} \frac{\partial w}{\partial z}(x, z, t) dz = 0 . \quad (5.18)$$

En appliquant la formule de Leibnitz et en intégrant $\frac{\partial w}{\partial z}$, on en déduit

By applying the Leibnitz formula and by integrating $\frac{\partial w}{\partial z}$, on deduces from it

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz - u[x, h(x, t), t] \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) + w[x, h(x, t), t] - w(x, 0, t) = 0 .$$

En utilisant les conditions aux limites $w = 0$ pour $z = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ pour $z = h(x, t)$ et en utilisant la définition de $U(x, t)$, l'équation de conservation de la masse intégrée sur la section s'écrit finalement

By using the boundary conditions $w = 0$ for $z = 0$ and $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ for $z = h(x, t)$ and by using the definition of $U(x, t)$, the mass conservation equation integrated on the section finally reads

$$\frac{\partial}{\partial x} (hU) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (5.19)$$

En utilisant la relation $\underline{U} \cdot \text{grad } u = \text{div} (\underline{U} u)$ dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient

By using the relation $\underline{U} \cdot \text{grad } u = \text{div} (\underline{U} u)$ in the momentum equation, one obtains

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + gI + \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (5.20)$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient alors

By using the Leibnitz formula, one then obtains

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u \, dz - \frac{\partial h}{\partial t} u|_{z=h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \, dz - \frac{\partial h}{\partial x} u^2|_{z=h} + \left[wu \right]_{z=0}^{z=h} = \\ -g' h \frac{\partial h}{\partial x} + gI h + \nu_t \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=h}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

En utilisant les conditions aux limites, dont $\rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_*$ pour $z = 0$, et la définition de U , on obtient

By using the the boundary conditions, whose $\rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_*$ for $z = 0$, and the definition of U , one obtains

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 \, dz + g' h \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \gamma - \frac{\tau_*}{\rho}. \quad (5.22)$$

3.3 Équations de Saint-Venant

Saint-Venant equations

On cherche à obtenir un modèle qui ne fasse intervenir que les champs $U(x, t)$ et $h(x, t)$. Il ne reste donc plus qu'à exprimer $\int_0^h u^2 \, dz$ et τ_* en fonction de ces champs. Pour cela, on a recours aux observations expérimentales, l'effort de modélisation empirique étant, une fois de plus, nécessaire. Une première modélisation consiste à écrire, par analyse dimensionnelle, que

One seeks to obtain a model which only involves the $U(x, t)$ and $h(x, t)$ fields. There thus only remains to express $\int_0^h u^2 \, dz$ and τ_* as functions of these fields. For this, one resorts to experimental observations, the empirical modelling effort being, on more time, necessary. A first modelling consists in writing, through a dimensional analysis, that

$$\int_0^h u^2 \, dz = \alpha U^2 h. \quad (5.23)$$

Comme l'écoulement est turbulent, $u(z)$ est quasiment constant sur une grande partie de la couche et on peut donc supposer $\alpha = 1$.

Since the flow is turbulent, $u(z)$ is nearly constant on a big part of the layer and one can assume $\alpha = 1$.

Pour la modélisation du cisaillement au fond τ_* , on définit la grandeur sans dimension $C_f(h, U)$ par la relation dimensionnelle

For the modelling of the bottom shear τ_* , one defines the dimensionless quantity $C_f(h, U)$ by the dimensional relation

$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho U |U|. \quad (5.24)$$

Un modèle grossier consiste à considérer que C_f , appelé “coefficient de Chezy”, est constant. Un modèle très souvent utilisé en hydraulique à surface libre est la formule de Manning-Strickler que l’on écrit sous l’une des formes

A crude model consists in considering that C_f , called the “Chezy coefficient”, is constant. A model very often used in open channel hydraulics is the Manning-Strickler formula which reads under one of these forms

$$C_f(h) = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}} \quad \text{or} \quad C_f(h) = \frac{\Phi_{MS}}{4} \left(\frac{k_s}{4h} \right)^{1/3}, \quad (5.25)$$

où K_s est le “nombre de Strickler” (en $\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$), k_s est la rugosité du fond et Φ_{MS} un nombre sans dimension qui peut être choisi de l’ordre de $\Phi_{MS} = 0.2$. On en déduit $K_s = g^{1/2} \phi_{MS}^{-1/2} 2^{11/6} k_s^{-1/6}$.

where K_s is the “Strickler number” (in $\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$), k_s is the bottom rugosity and Φ_{MS} a dimensionless number which can be chosen of the order $\Phi_{MS} = 0.2$. One deduces of it $K_s = g^{1/2} \phi_{MS}^{-1/2} 2^{11/6} k_s^{-1/6}$.

Au final, les équations de Saint-Venant s’écrivent

Eventually, the Saint-Venant equations read

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} &= -h \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

où $C_f(h, U)$ modélise le frottement sur la paroi, $g' \frac{\partial h}{\partial x}$ représente le gradient de pression, $g I$ la projection de force de pesanteur dans la direction x .

where $C_f(h, U)$ model the wall friction, $g' \frac{\partial h}{\partial x}$ represent the pressure gradient, $g I$ the projection of the gravity in the x direction.

Dans le cas de la paramétrisation de Manning-Strickler que nous utiliserons désormais, l’équation de conservation de la quantité de mouvement se met sous la forme

In the cas of the Manning-Strickler parameterization that we will use from now on, the momentum equation is put under the form

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g \left(I - \frac{U|U|}{K_s^2 h^{4/3}} \right). \quad (5.27)$$

4 Dynamique des ondes de crues

La notion d'onde est souvent rattachée à la dynamique linéaire d'un milieu décrit par un modèle de petites perturbations autour d'un état d'équilibre. Mais la notion d'onde peut aussi être étendue au cas non-linéaire en désignant par ce mot tout signal reconnaissable qui se déplace avec une vitesse identifiable. La théorie des caractéristiques offre un cadre rigoureux pour définir les trajectoires le long desquelles se propage l'information. On se place ici dans le cadre de l'approximation des ondes de crue diffusantes ou non diffusantes (voir tableau 5.1).

4.1 Dynamique linéaire

On considère tout d'abord le modèle de "l'approximation des ondes de crues" obtenu pour $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(1)$ et $\tan \gamma = O(1)$. Il s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0 \quad \text{and}$$

On choisit le modèle de Manning-Strickler et on s'intéresse aux régimes où $U \geq 0$. On obtient alors la "relation de Strickler"

$$U(h) = K_s I^{1/2} h^{2/3} . \quad (5.29)$$

En reportant dans l'équation de continuité, l'approximation des ondes de crues s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (K_s I^{1/2} h^{5/3}) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{5U(h)}{3} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 . \quad (5.30)$$

On considère alors un état d'équilibre (h_n, U_n) où h_n et U_n sont des constantes vérifiant $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$. On pose

$$h = h_n + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_n + \tilde{U} \quad (5.31)$$

et on suppose que \tilde{h} et \tilde{U} sont des petites perturbations de l'équilibre. En reportant dans le modèle et en négligeant les termes d'ordre deux, le modèle linéarisé s'écrit

Flood waves dynamics

The notion of wave is often linked to the linear dynamics of a medium described by a small perturbations models around an equilibrium state. But the notion of wave can also be extended to the nonlinear cas by name with this work any recognizable signal which moves with an identifiable velocity. The theory of characteristics provides a rigorous framework to define the trajectories along which the information propagates. One settles here in the framework of the diffusive or non diffusive kinematic flood wave approximation (voir tableau 5.1).

Linear dynamics

One considers first of all the "kinematic flood wave approximation" obtained for $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(1)$ and $\tan \gamma = O(1)$. It reads

$$0 = g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h} . \quad (5.28)$$

One chooses the Manning-Stricker model and is interested in regimes such that $U \geq 0$. One then obtains the "Stricker relation"

By carrying over in the continuity equation, the kinematic flood wave approximation reads

One then considers an equilibrium state (h_n, U_n) where h_n and U_n are constant satisfying $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$. One sets

and on assumes that \tilde{h} and \tilde{U} are small perturbations of the equilibrium. By carrying over in the model and neglecting the order two terms, the linearized model reads

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5U_n}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0. \quad (5.32)$$

Une petite “intumescence” $\tilde{h}(x, t)$ est donc advectée à une vitesse égale à $5/3$ de celle de l’écoulement moyen (voir figure 5a). Cette intumescence est par exemple une faible crue sur une rivière dont la pente n’est pas négligeable.

A small “bulge” $\tilde{h}(x, t)$ is thus convected with a velocity equal to $5/3$ of the one of the mean flow (see figure 5a). This bulge is, for example, a weak flood on a river which slope is not negligible.

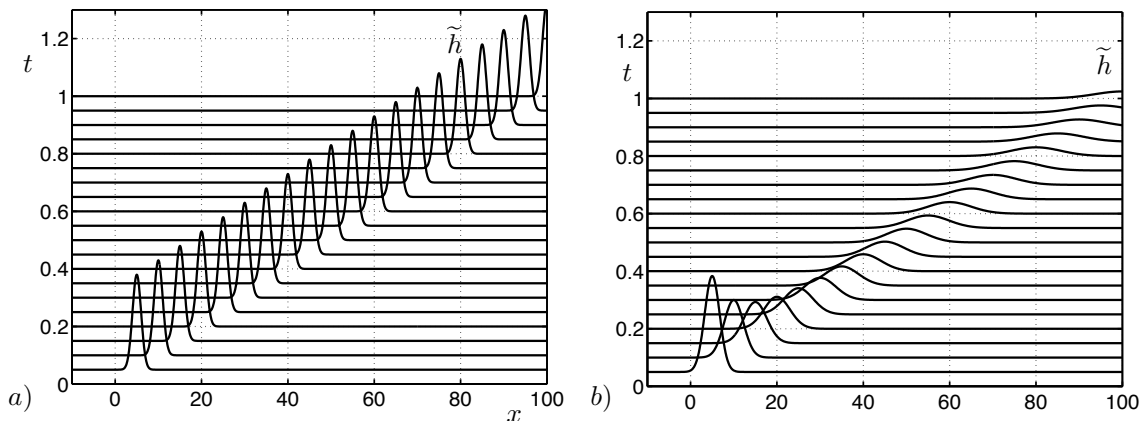


FIG. 5.3 – Solution $\tilde{h}(x, t)$ a) du modèle des ondes crues sans diffusion ($k_n = 0$), b) du modèle des ondes de crues diffusantes ($k_n \neq 0$).

Solution $\tilde{h}(x, t)$ a) of the nondiffusive kinematic flood wave ($k_n = 0$), b) of the kinematic flood wave ($k_n \neq 0$).

Lorsque la pente de la rivière ainsi que sa vitesse deviennent plus faibles, on peut considérer le modèle des “ondes de crues diffusantes” obtenu pour $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(\epsilon)$ et $\tan \gamma = O(\epsilon)$. Ce modèle s’écrit

When the river slope as well as its velocity become weaker, one can consider the “diffusive flood wave” model obtained for $\epsilon \ll 1$, $\frac{1}{Rt} = O(1)$, $Fr^2 = O(\epsilon)$ and $\tan \gamma = O(\epsilon)$. This model reads

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0 \quad \text{et} \quad 0 = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h}. \quad (5.33)$$

L’équilibre (h_n, U_n) vérifie la même relation de Strickler que pour le modèle précédent, mais une petite perturbation \tilde{h} vérifie maintenant

The (h_n, U_n) equilibrium satisfies the same Strickler relation than for the previous model, but a small perturbation \tilde{h} now satisfies

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \frac{5U_n}{3} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = k_n \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad k_n = \frac{U_n h_n}{2 \tan \gamma}. \quad (5.34)$$

L’effet du terme supplémentaire va être de diminuer l’amplitude de la crue en la diffusant. Si la condition initiale $\tilde{h}(x, t_0)$ est une gaussienne d’écart-type l_0 et d’amplitude maximale \tilde{h}_m , la solution est la gaussienne

The supplementary term effect will be to diminish the flood amplitude by diffusing it. If the initial condition $\tilde{h}(x, t_0)$ is a gaussian of standard deviation l_0 and of maximum amplitude \tilde{h}_m , the solution is the gaussian

$$\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_m \frac{l_0}{l(t)} \exp \left[-\frac{(x - \frac{5U_n}{3} t)^2}{2l^2(t)} \right], \quad l^2(t) = l_0^2 + 2k_n(t - t_0), \quad (5.35)$$

d'écart-type $l(t)$ croissante et d'amplitude maximale décroissante (voir figure 5b).

of increasing standard deviation $l(t)$ and of decreasing maximum amplitude (see figure 5b).

4.2 Dynamique non linéaire

Nonlinear dynamics

On s'intéresse maintenant à la dynamique non linéaire de l'approximation des ondes de crue non diffusantes que l'on écrit sous la forme

One is now interested in the nonlinear dynamics of the non diffusive kinematic flood wave approximation which is written under the form

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5.36)$$

avec $\lambda(h) = \frac{5}{3}U(h)$ et $U(h) = K_s I^{1/2} h^{2/3}$. On appelle "caractéristique" une courbe \mathcal{C} d'équation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ vérifiant l'équation différentielle ordinaire

with $\lambda(h) = \frac{5}{3}U(h)$ and $U(h) = K_s I^{1/2} h^{2/3}$. One qualify "characteristic" a curve \mathcal{C} of equation $x = x_{\mathcal{C}}(t)$ satisfying the ordinary differential equation

$$\dot{x} = \lambda[h(x, t)], \quad (5.37)$$

où $h(x, t)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles. Cette solution vérifie alors

where $h(x, t)$ is a solution of the partial differential equation. This solution then satisfies

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_{\mathcal{C}} = 0 \quad \text{with} \quad \left(\frac{d}{dt} \right)_{\mathcal{C}} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_{\mathcal{C}}(t) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.38)$$

Autrement dit, la valeur $h_{\mathcal{C}}(t) = h[x_{\mathcal{C}}(t), t]$ "mesurée le long de la courbe \mathcal{C} " est constante. On dit que h est un "invariant de Riemann" du système. Cette constante vaut par exemple $h_{\mathcal{C}} = h(a, 0)$ si $x_{\mathcal{C}}(0) = a$, lorsque \mathcal{C} passe par le point $(x, t) = (a, 0)$, ou encore $h_{\mathcal{C}} = h(0, \tau)$ si $x_{\mathcal{C}}(\tau) = 0$, lorsque \mathcal{C} passe par le point $(x, t) = (0, \tau)$. Comme h est constant le long de ces "courbes" et que $\lambda(h)$ ne dépend que de h , les caractéristiques sont des droites.

Said differently, the value $h_{\mathcal{C}}(t) = h[x_{\mathcal{C}}(t), t]$ "measured along the curve \mathcal{C} " is constant. One says that h is a "Riemann invariant" of the system. This constant is, for instance, $h_{\mathcal{C}} = h(a, 0)$ if $x_{\mathcal{C}}(0) = a$, when \mathcal{C} goes through the point $(x, t) = (a, 0)$, or else $h_{\mathcal{C}} = h(0, \tau)$ if $x_{\mathcal{C}}(\tau) = 0$, when \mathcal{C} goes through the point $(x, t) = (0, \tau)$. Since h is constant along these "curves" and $\lambda(h)$ only depends on h , the characteristics are straight lines.

Si on se donne une condition initiale $h_i(a)$ telle que $h(x, 0) = h_i(x)$ pour $x \geq 0$ et une condition aux limites $h_l(\tau)$ telle que $h(0, t) = h_l(t)$ pour $t \geq 0$, la solution $h(x, t)$ est obtenue en éliminant, respectivement, a ou bien τ de l'un des systèmes

If one is given an initial condition $h_i(a)$ such that $h(x, 0) = h_i(x)$ for $x \geq 0$ and a boundary condition $h_l(\tau)$ such that $h(0, t) = h_l(t)$ for $t \geq 0$, the solution $h(x, t)$ is obtained by eliminating, respectively, a or else τ from one of the systems

$$\begin{cases} x - a & = & \lambda(h) t \\ h & = & h_i(a) \end{cases} \quad \text{or else} \quad \begin{cases} x & = & \lambda(h) (t - \tau) \\ h & = & h_l(\tau) \end{cases}, \quad (5.39)$$

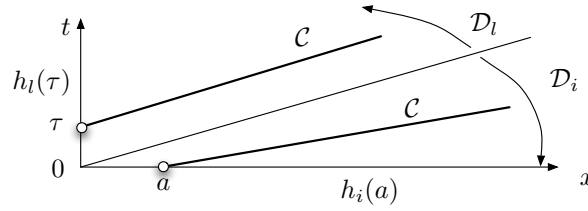


FIG. 5.4 – Exemples de caractéristiques \mathcal{C} passant par $(a, 0)$ ou $(0, \tau)$ dans le plan (x, t) . Domaines d’influence \mathcal{D}_i et \mathcal{D}_l , respectivement, des conditions initiales et aux limites.

Examples of characteristics \mathcal{C} going through $(a, 0)$ or $(0, \tau)$ in the (x, t) plane. Influence domains \mathcal{D}_i and \mathcal{D}_l of, respectively, initial and boundary conditions.

suivant que l’on est dans le domaine d’influence \mathcal{D}_i des conditions initiales ou \mathcal{D}_l des conditions aux limites.

depending whether one is in the initial conditions influence domain \mathcal{D}_i or of the boundary conditions \mathcal{D}_l .

La résolution graphique de ces équations implicites s’effectue en traçant les droites caractéristiques $x = a + \lambda[h_i(a)]t$ à partir des conditions initiales ou bien les droites caractéristiques $x = \lambda[h_l(\tau)](t - \tau)$ à partir des conditions aux limites.

The graphical resolution of these implicit equations is done by drawing the characteristic lines $x = a + \lambda[h_i(a)]t$ starting from the initial conditions or else the characteristic lines $x = \lambda[h_l(\tau)](t - \tau)$ starting from the boundary conditions.

La figure 5a représente un tel tracé à partir d’une condition initiale croissante. Comme h est constant le long de caractéristiques qui s’écartent lorsque t croît, on voit que l’extension horizontale croît, l’amplitude restant constante, comme le montre la figure 5b.

Figure 5a represents such a drawing starting from an increasing initial condition. Since h is increasing along characteristics which diverges when t increases, one sees that the horizontal extension grows, the amplitude remaining constant as shown on Figure 5b.

La figure 5a représente un tel tracé à partir d’une condition initiale décroissante. Comme h est constant le long de caractéristiques qui se rapprochent lorsque t croît, on voit que l’extension horizontale décroît, l’amplitude restant constante comme le montre la figure 5b. À partir du premier instant t_c où les caractéristiques se croisent, le modèle continu de l’approximation des ondes de crues n’est plus valide. Très souvent, cette singularité traduit des phénomènes physiques où les champs varient sur des distances très courtes que l’on appelle “chocs” en aérodynamique compressible ou “ressauts” ici.

Figure 5a represents such a drawing starting from a decreasing initial condition. Since h is constant along converging characteristics when t increases, one sees that the horizontal extension decreases, the amplitude remaining constant as shown on Figure 5b. Beyond the first time t_c where the characteristics cross, the continuous model of the kinematic flood waves is no longer valid. Very often, this singularity traduces physical phenomena in which the fields vary on very short distances and are called “shocks” in compressible aerodynamics or “jumps” here.

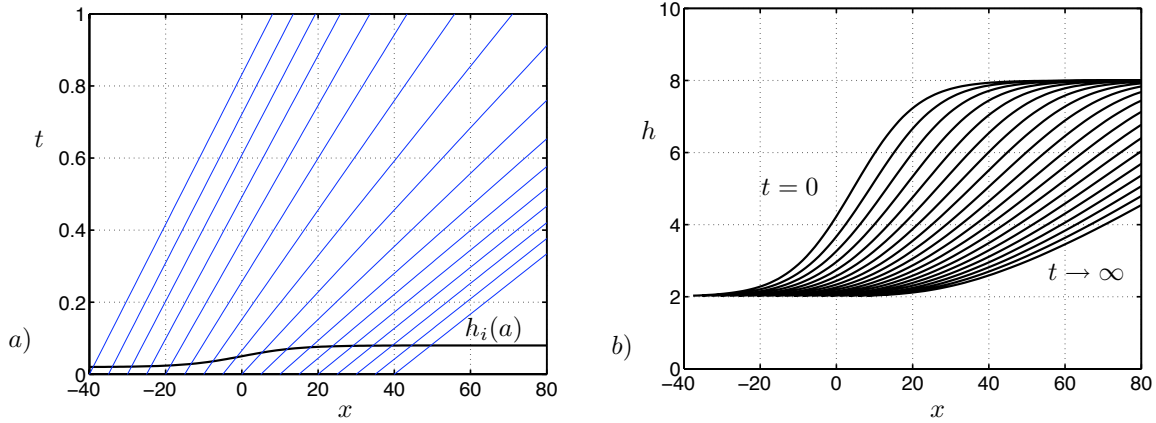


FIG. 5.5 – D etente. a) Droites caractéristiques dans le plan (x, t) et profil initial $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right) \right]$. b)  volution du profil $h(x, t)$.

Expansion. a) Characteristic lines in the (x, t) plane and initial profile $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right) \right]$. b) Evolution of the profile $h(x, t)$.

4.3 Ressauts du modèle des ondes de crues

On peut chercher à modéliser ces ressauts par des fonctions $h(x, t)$ discontinues. Pour cela, il est nécessaire de formuler un modèle plus riche que l'équation aux d riv es partielles consid r e. Un tel modèle est obtenu par une formulation globale de la conservation de la masse qui postule que la relation

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [q(h)]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \text{with} \quad q'(h) = \lambda(h) \quad (5.40)$$

est vraie sur tout intervalle fixe $[x_1, x_2]$ du domaine spatial considéré.

On note $x_c(t)$ la position d'un choc mobile et $[[h]] = h_R - h_L$ la discontinuité de h à travers ce choc avec $h_R = h[x_c^+(t), t]$ la valeur à sa droite et $h_L = h[x_c^-(t), t]$ la valeur à sa gauche. La formule de Leibnitz permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx &= \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_c^-(t)} h \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} h \, dx \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} \, dx + \dot{x}_c(t) h_L(t) - \dot{x}_c(t) h_R(t) \end{aligned}$$

Jumps of the flood wave model

One can try to model these jumps with discontinuous functions $h(x, t)$. For this, it is necessary to formulate a model richer than the considered partial differential equation. Such a model is obtained through a global formulation of the global mass conservation which postulates that the relation

is true on the whole fixed interval $[x_1, x_2]$ of the considered spatial domain.

One denotes by $x_c(t)$ the position of a moving shock and $[[h]] = h_R - h_L$ the discontinuity of h through the shock with $h_R = h[x_c^+(t), t]$ the value at its right and $h_L = h[x_c^-(t), t]$ the value at its left. The Leibnitz formula enables to write

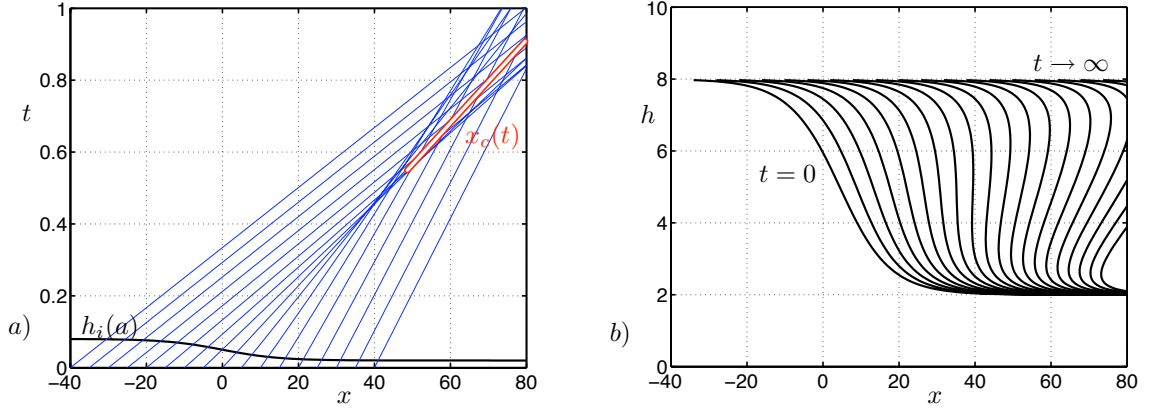


FIG. 5.6 – Choc. a) Droites caractéristiques dans le plan (x, t) et profil initial $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right) \right]$. b) Évolution du profil $h(x, t)$.

Shock. a) Characteristic lines in the (x, t) plan and initial profile $h_i(a) = h_n + \frac{\Delta h}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{a}{l_0}\right) \right]$. b) Evolution of the profile $h(x, t)$.

$$= \int_{x_1}^{x_c^-(t)} \frac{\partial h}{\partial t} dx + \int_{x_c^+(t)}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial t} dx - W \llbracket h \rrbracket, \quad (5.41)$$

où $W(t) = \dot{x}_c(t)$ est la vitesse du choc. De plus, on peut écrire

where $W(t) = \dot{x}_c(t)$ is the velocity of the shock. Furthermore, on can write

$$\begin{aligned} [q]_{x_1}^{x_2} &= q[h(x_2, t)] - q[h(x_1, t)] = [q]_{x_1}^{x_c^-} + [q]_{x_c^+}^{x_2} - q[h_L(t)] + q[h_R(t)] \\ &= [q]_{x_1}^{x_c^-} + [q]_{x_c^+}^{x_2} + \llbracket q \rrbracket. \end{aligned} \quad (5.42)$$

En sommant les équations (5.41) et (5.42) et en appliquant le bilan local (5.36) sur les intervalles $[x_1, x_c[$ et $]x_c, x_2]$, on trouve que la vitesse du choc est

By summing Equations (5.41) and (5.42) and applying the local budget (5.36) on the intervals $[x_1, x_c[$ and $]x_c, x_2]$, one find that the velocity of the shock is

$$W(t) = \llbracket q(h) \rrbracket / \llbracket h \rrbracket \quad \text{avec} \quad W(t) = \dot{x}_c(t), \quad (5.43)$$

les valeurs de part et d'autre du choc étant connues grâce aux caractéristiques. Dans le cas de l'approximation des ondes de crues, on a $q(h) = U h$ avec $U = K_s \sqrt{I} h^{2/3}$. On peut donc écrire la relation de saut sous la forme

the values on both sides of the shock being known thanks to the characteristics. In the case of the kinematic flood wave approximation, one has $q(h) = U h$ with $U = K_s \sqrt{I} h^{2/3}$. One can thus write the jump condition under the form

$$\llbracket h(U - W) \rrbracket = 0. \quad (5.44)$$

Équations de Navier-Stokes à surface libre

Free surface Navier-Stokes equations

Avec viscosité turbulente :

| With turbulent viscosity :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{U} &= 0 \\ \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_t + \underline{g} + \operatorname{div} [(\nu + \nu_t) \underline{d}] . \end{aligned}$$

Conditions aux limites :

| Boundary conditions :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w \quad , \quad \underline{\sigma}_t \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n} \quad / \quad z = h(x, t) .$$

Nombres sans dimension :

| Dimensionless numbers :

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' h_0}}, \quad Rt = \frac{h_0 U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan \gamma .$$

Dérivation des équations de Saint-Venant

Derivation of the Saint-Venant equations

Pression hydrostatique :

| Hydrostatic pressure :

$$p_t(x, z, t) = p_a - \rho g' [z - h(x, t)] .$$

Quantité de mouvement :

| Momentum :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I + \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Cisaillement au fond :

| Bottom shear :

$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho U |U| .$$

Équations de Saint-Venant :

| Saint-Venant equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} &= -h \frac{\partial U}{\partial x} , \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} &= g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} . \end{aligned}$$

Parmétrisation de Manning-Strickler : | Manning-Strickler parameterisation :

$$C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}} \implies \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g \left(I - \frac{U|U|}{K_s^2 h^{4/3}} \right).$$

Dynamique des ondes de crues

Flood wave dynamics

Ondes de crues diffusantes : | Diffusive flood waves :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (U h) = 0 \quad \text{and} \quad 0 = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{1}{2} C_f \frac{U |U|}{h}.$$

Ondes de crues : | Flood waves :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \lambda(h) = \frac{5}{3} U(h), \quad U(h) = K_s I^{1/2} h^{2/3}.$$

Caractéristiques : | Characteristics :

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)_c = 0, \quad \left(\frac{d}{dt} \right)_c = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_c(t) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Relations de saut : | Jump relations :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h dx + [q(h)]_{x_1}^{x_2} = 0 \implies \dot{x}_c(t) = W(t) = \llbracket q(h) \rrbracket / \llbracket h \rrbracket.$$

EXERCICES

EXERCICE 5.1 Approximation des ondes de crues

On considère une rivière de pente $I = \sin \gamma$ et de largeur L constantes qui se laisse modéliser par les équations de Saint-Venant $\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$ avec $C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}$.

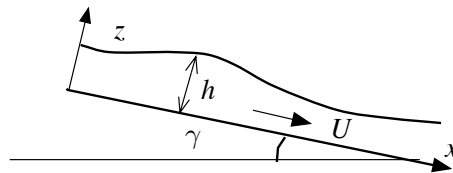


FIG. 5.7 – Ruissellement d'une lame d'eau de hauteur h et de vitesse U sur une pente faisant un angle γ avec l'horizontale.

- 1) Lorsque la pente I n'est pas trop petite, on suppose que l'on peut négliger l'accélération et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement. En déduire, en supposant $U \geq 0$, que h obéit à l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ où $\lambda(h)$ est une fonction que l'on explicitera. Comment se nomme l'approximation ainsi obtenue ?

L'équilibre $g I = \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} = \frac{2gU^2}{K_s^2 h^{4/3}}$ entre la force de gravité et le frottement entraîne que $U = K_s I^{1/2} h^{2/3}$. En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3} K_s I^{1/2} h^{2/3} = \frac{5}{3} U$. On est dans le cadre de l'approximation des ondes de crues.

- 2) Déterminer la hauteur h_n de la solution stationnaire en supposant connu le débit linéique $q = Q/L$. Montrer que l'équation d'évolution des petites perturbations \tilde{h} se ramène à l'équation $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ où λ_n est une constante que l'on explicitera.

Les équations $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$ et $U_n h_n = q$ entraînent $K_s I^{1/2} h_n^{5/3} = q$ et donc $h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10}$. On en déduit $U_n = q/h_n$. La linéarisation de l'équation d'évolution de h conduit à $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3} U_n$.

EXERCICE 5.2 Décruée et crue linéaires

On considère une portion de rivière de longueur l qui draine un bassin versant soumis à une pluie homogène et stationnaire. On modélise cette pluie par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = P$ de la perturbation de hauteur $\tilde{h}(x, t)$ autour du régime normal $h = h_n$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3} U_n$ et $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$. On suppose que la perturbation de hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t)$ à l'exutoire de la portion de rivière lorsque la pluie s'arrête.

- 1) Calculer et tracer la solution stationnaire $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_s(x)$ obtenue pour une pluie constante P . On pourra noter $\chi = P/\lambda_n$.

La solution de l'équation $\lambda_n \tilde{h}'_s(x) = P$ avec la condition $\tilde{h}_s(0) = \tilde{h}_0$ est $\tilde{h}_s(x) = \tilde{h}_0 + \chi x$ avec $\chi = P/\lambda_n$. Le profil $\tilde{h}_s(x)$ est linéaire.

- 2) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $\tilde{h}(x, 0) = \tilde{h}_s(x)$ pour $x \in [0, L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Montrer que $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq T$ avec $T = l/\lambda_n$. Tracer dans le plan (x, t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\tilde{h}(x, t)$.

Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + \lambda_n t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0, l]$ de l'axe des x ou $x = \lambda_n (t - \tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t . Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = l$ à partir du temps $T = l/\lambda_n$. Comme h est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq 0$ on a $\tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq T$. La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = \lambda_n t$ est uniforme avec $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$.

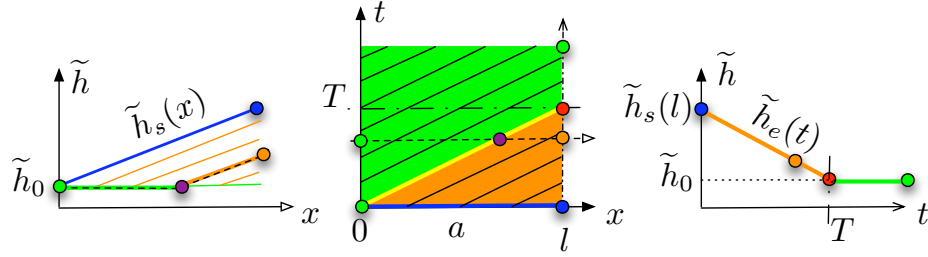


FIG. 5.8 – Décrue de la rivière. a) Équilibre initial $\tilde{h}_s(x)$. b) Région uniforme et droites caractéristiques. c) Courbe de décrue $\tilde{h}_e(t)$ à l'exutoire. d) Évolution temporelle du profil $\tilde{h}(x, t)$ vers l'équilibre \tilde{h}_0 .

Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (l, t) du plan (x, t) coupe l'axe des x en $a = l - \lambda_n t$. La condition initiale est égale à $\tilde{h}_s(a) = \tilde{h}_0 + \chi a$ en ce point. On a donc $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + \chi l - \chi \lambda_n t = \tilde{h}_0 + \chi l - Pt$ pour $t \in [0, T]$. La hauteur $\tilde{h}_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $\tilde{h}_s(l)$ pour stagner à la valeur \tilde{h}_0 au-delà de $t = T$. Pour $x \leq \lambda_n t$, on a vu que $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$. Pour $x \geq \lambda_n t$, la droite caractéristique passant par (x, t) coupe l'axe des x en $a = x - \lambda_n t$, ce qui entraîne $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + \chi x - Pt$. La solution $\tilde{h}(x, t)$ est égale à $\tilde{h}_s(x - \lambda_n t)$ pour $x \geq \lambda_n t$ et égale à \tilde{h}_0 sinon.

- 3) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$ pour $x \in [0, l]$. On suppose l'existence d'une pluie constante P pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\tilde{h}(x, t)$.

Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais \tilde{h} n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{d\tilde{h}}{dt}\right)_c = P$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (l, t) conduit à $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0 + Pt$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - l/\lambda_n)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0 + Pl/\lambda_n = \tilde{h}_0 + \chi l$.

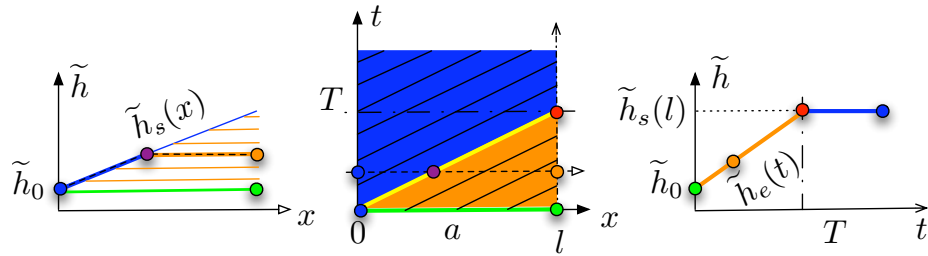


FIG. 5.9 – Crue de la rivière. a) Droites caractéristiques. b) Courbe de crue $\tilde{h}_e(t)$ à l'exutoire. c) Profil $\tilde{h}(x, t)$ pour $t < T$ et $\tilde{h}(x, t)$. d) Évolution temporelle des profils $\tilde{h}(x, t)$ vers $\tilde{h}_s(s)$.

Le profil $\tilde{h}_e(t)$ croît linéairement de \tilde{h}_0 à $\tilde{h}_0 + \chi l = \tilde{h}_0 + PT$ sur l'intervalle $[0, T]$ puis reste constant. Pour $x \geq \lambda_n t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + Pt$. Pour $x \leq \lambda_n t$, la droite caractéristique passant par (x, t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/\lambda_n)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + Px/\lambda_n = \tilde{h}_0 + \chi x$. La solution $\tilde{h}(x, t)$ part de \tilde{h}_0 , croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $\tilde{h}_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse λ_n .

EXERCICE 5.3 Crue non linéaire

On considère une portion de rivière de longueur l drainant un bassin soumis à une pluie homogène et stationnaire que l'on modélise par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = P$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3} \beta h^{2/3}$ et $\beta = K_s I^{1/2}$. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x, 0) = 0$. On suppose que la condition aux limites à l'amont est $h(0, t) = 0$ pour tout temps.

- 1) Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x, t) = (a, 0)$ pour $a \in [0, l]$. Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x, t) = (0, \tau)$ pour $\tau \geq 0$. Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x, t) \in [0, l] \times \mathbb{R}_+$. Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ avec la droite d'équation $x = l$. En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(l, t)$ devient constant. Donner l'expression de cette valeur constante h_* . Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(l, t)$ au bas de la pente.

Les caractéristiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3} \beta h^{2/3}$ et $\dot{h} = P$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = Pt$ et $\dot{x} = \frac{5}{3} \beta P^{2/3} t^{2/3}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta P^{2/3} t^{5/3}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a, 0)$. Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en déduit que $h(t) = P(t - \tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0, \tau)$ s'écrit $x(t) = \beta P^{2/3} (t - \tau)^{5/3}$. Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x, t) . Elles ne se coupent donc pas. L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ est $x = \beta P^{5/3} t^{5/3}$. Elle coupe la droite $x = l$ en (l, t_*) avec $t_* = (l/\beta)^{3/5} / P^{2/5}$. La valeur de $h(l, t)$ à l'équilibre est $h_* = Pt_* = (lP/\beta)^{3/5}$. Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x, t) = (l, t)$ avec $t \in [0, t_*]$, sont toutes issues du segment de droite $(x, t) = (a, t)$ avec $a \in [0, l]$. La valeur de $h(l, t)$ est donc égale à $h(l, t) = Pt$ pour $t \in [0, t_*]$ et à $h(l, t) = h_*$ pour $t \geq t_*$.

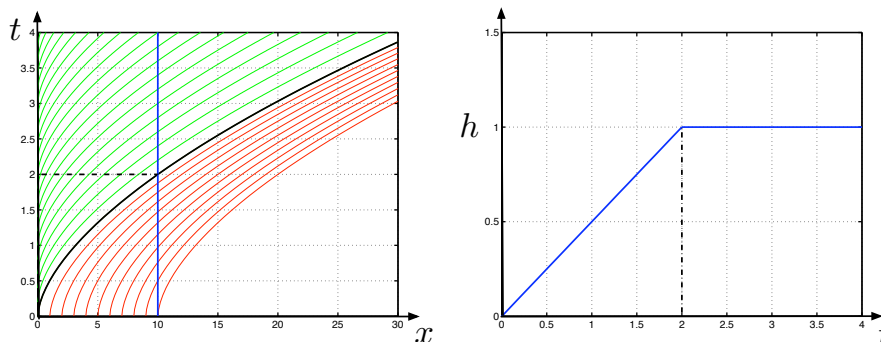


FIG. 5.10 – a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(l, t)$ en fonction du temps.

- 2) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_* , en heures, et de h_* , en m, pour une longueur $l = 10$ km, une largeur $L = 1$ m, une pente $I = 0.1$, un nombre de Strickler de $K_s = 10 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ et une pluie $p = 1$ mm/jour sur un bassin versant d'aire $A = 10 \text{ km}^2$ en supposant que toute l'eau des précipitations est drainée par la rivière.

On a $P = p A / (l L)$. L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 3 heures et une hauteur h_* de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 14 cm.