

Chapitre 4

Hydraulique à surface libre

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

1	Charge hydraulique	3
1.1	Équation de Bernoulli	3
1.2	Paramètres géométriques	4
1.3	Charge moyenne	5
2	Charge spécifique et impulsion	7
2.1	Équations stationnaires	7
2.2	Écoulement sur un obstacle	8
2.3	Ressauts hydrauliques	10
3	Courbes de remous	11
3.1	Perte de charge et frottements	12
3.2	Coefficient de Strickler	13
3.3	Courbes de remous	14

Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les modèles de base qui décrivent les écoulements à surface libre en hydraulique fluviale. De tels écoulements sont “graduellement variés” quand la taille de leurs sections est petite devant les échelles caractéristiques de variation de leurs pentes. Nous considérons uniquement ici des écoulements stationnaires sous l’hypothèse de “variation graduelle”.



FIG. 4.1 – *Le fleuve Amazone vu de l’espace. Photo NASA.*

Le concept de “charge hydraulique” pour les écoulements à surface libre est présenté sur l’équation de Bernoulli dérivée des équations de Navier-Stokes. L’équation pour la charge hydraulique le long du canal est écrite dans le cas stationnaire et appliquée au cas d’un écoulement sur un obstacle lorsque le frottement peut être négligé. Les concepts d’écoulements “supercritiques” ou “sous-critiques”, dépendant du nombre de Froude, sont présentés sur cet exemple.

Des considérations sur les conditions aux limites expliquent l’apparition des

ressauts hydrauliques. Les relations de sauts pour ces ressauts hydrauliques sont présentées de manière simple. Le frottement turbulent sur le fond du canal est modélisé à travers une paramétrisation de Manning-Strickler, ce qui est très courant pour une approche des écoulements à surface libre de type ingénieur. La description des “courbes de remous” est donnée dans le cas de cette paramétrisation et les notions de “hauteur normale” et “hauteur critique” sont utilisées pour classer ces courbes.

1 Charge hydraulique

L'équation de Bernoulli conduit naturellement à la notion de charge hydraulique. On peut alors la moyenner sur la section d'un canal et définir la notion de perte de charge linéique le long de son axe.

1.1 Équation de Bernoulli

Nous débutons en considérant les équations de Navier-Stokes incompressibles et turbulentes

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} - \operatorname{div} \underline{\underline{R}} \quad , \quad (4.1)$$

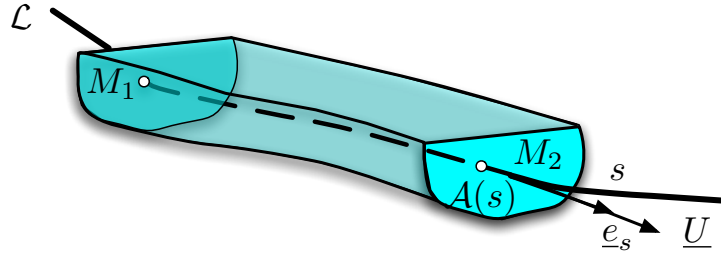
dans lesquelles ρ est la masse volumique constante et $\underline{\underline{R}}$ est le tenseur des contraintes de Reynolds défini par $R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}$ où les composantes U'_i sont les fluctuations turbulentes de vitesse. Les champs \underline{U} et p de ces équations sont les “moyennes de Reynolds” de la vitesse et la pression que nous omettons de noter \overline{U} et \overline{p} pour simplifier. On suppose que les forces de volumes $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\operatorname{grad} (gz)$ sont dues à la gravité.

Considérons une ligne de courant \mathcal{L} allant d'un point M_1 à un point M_2 (figure 4.2). En utilisant la relation

$$\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2 + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} \quad , \quad (4.2)$$

on peut dériver “l'équation de Bernoulli”

$$\int_{\mathcal{L}} \operatorname{grad} H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu \Delta \underline{U} - \operatorname{div} \underline{\underline{R}} \right) \cdot d\underline{M} \quad , \quad (4.3)$$

FIG. 4.2 – Ligne de courant \mathcal{L} dans un canal ouvert.

où H est la “charge hydraulique” définie par la relation

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2 . \quad (4.4)$$

En intégrant de M_1 à M_2 , l’équation de Bernoulli s’écrit

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M} , \quad \underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \text{div} \underline{R}) . \quad (4.5)$$

Le terme $\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}$ est la perte de charge linéique qui s’annule pour les régimes stationnaires considérés ici. Le terme \underline{J} est la perte de charge linéique due aux frottements visqueux et turbulents.

1.2 Paramètres géométriques

Étant donné un écoulement à surface libre dans un canal, on peut considérer la famille des sections $\mathcal{A}(s)$ qui suit une ligne de courant \mathcal{L} paramétrisée par la coordonnée curviligne s (voir figure 4.3). Nous notons $\mathcal{P}(s)$ la partie de la frontière d’une section $\mathcal{A}(s)$ en contact avec la paroi du canal de largeur $L(s)$. Pour chaque section $\mathcal{A}(s)$, on peut définir son aire $A(s)$, le périmètre $P(s)$ de $\mathcal{P}(s)$, que l’on nomme “périmètre mouillé”, et la largeur $L(s)$, que l’on nomme “largeur miroir”.

On définit alors le “rayon hydraulique” $R_H(s)$, le “diamètre hydraulique” $D_H(s)$ et la “hauteur hydraulique” $h_H(s)$ par les relations

$$R_H(s) = \frac{A(s)}{P(s)} , \quad D_H(s) = 4 R_H(s) , \quad h_H(s) = \frac{A(s)}{L(s)} . \quad (4.6)$$

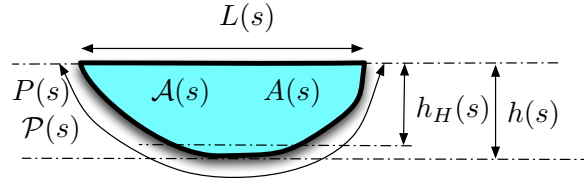


FIG. 4.3 – Section $A(s)$, périmètre mouillé $P(s)$, largeur miroir $L(s)$, profondeur maximale $h(s)$ et rayon hydraulique $h_H(s)$.

La hauteur hydraulique $h_H(s)$ n'est pas forcément égale à la vraie hauteur $h(s)$ que l'on définit comme étant la plus grande distance entre le fond et la surface libre. Mais dans la plupart des cas pratiques, l'approximation $h \sim h_H$ est supposée.

Quand la section du canal est un rectangle de hauteur h et de longueur L avec $L \gg h$, on a $R_H = h$ et $h_H = h$. De nombreuses sections typiques, comme les trapèzes, peuvent être considérées pour décrire les canaux ouverts.

1.3 Charge moyenne

Dans de nombreuses applications, les écoulements en canaux ouverts peuvent être décrits par des quantités moyennées sur la section $\mathcal{A}(s)$ d'aire $A(s)$.

Pour une abscisse donnée s , le débit $Q(s)$ et la vitesse moyenne $U(s)$ sont définis par la relation

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS = A(s) U(s) \implies U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (4.7)$$

La charge hydraulique moyenne est définie par

$$H(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} \right) dS = \frac{P_*(s)}{\rho g} + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} , \quad (4.8)$$

où P_* et α sont définis par

$$P_*(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} (p + \rho g z) dS \quad , \quad \alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} U^2 dS . \quad (4.9)$$

On a $\alpha = 1$ quand le champ de vitesse \underline{U} est constant sur la section \mathcal{A} . Pour des écoulements turbulents, le profil de vitesse est presque plat et α est proche de un.

La quantité $P_*(s)$ peut être appelée la “pression piézométrique moyenne”. Quand la pression locale p peut être considérée comme hydrostatique, ce qui est souvent le cas pour des écoulements à surface libre, la pression piézométrique locale $p_* = p + \rho g z$ est partout égale à la pression piézométrique moyenne P_* . C’est le cas lorsque l’écoulement est “graduellement varié”, c’est-à-dire quand l’échelle de variation de ces champs est grande comparée à l’échelle des sections. Nous faisons cette hypothèse pour les écoulements de ce chapitre.

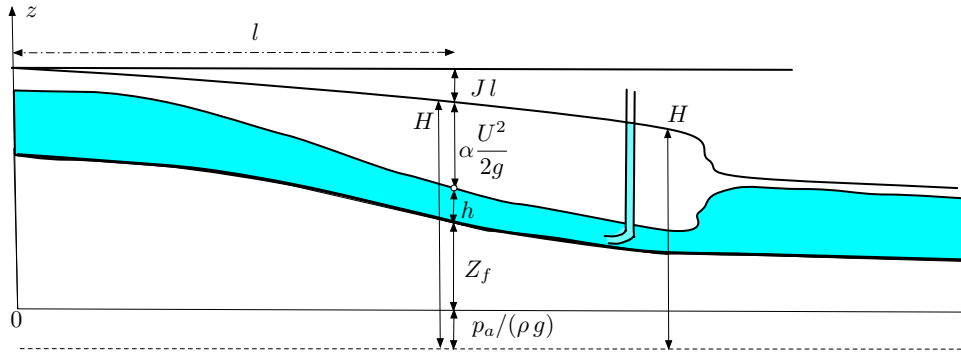


FIG. 4.4 – Charge $H = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f + h + \alpha \frac{U^2}{2g}$ et perte de charge linéique J .

Nous notons $z = Z_f(s)$ l’équation du point le plus profond (figure 4.4) et nous appellons $I(s) = -Z_f'(s)$, par abus de langage, la “pente du canal”. Si $I(s)$ est petit, cette définition rejoint la notion de pente par rapport à l’horizontale et l’on peut, de plus, considérer que $h(s)$ est proche de la profondeur du canal mesurée sur un axe vertical. Nous faisons cette hypothèse pour les canaux de ce chapitre. Avec toutes ces hypothèses ($\alpha \sim 1$, $I \ll 1$, graduellement varié), la charge moyenne s’écrit

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g}. \quad (4.10)$$

En moyennant l’équation de Bernoulli dans le cas stationnaire $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, on obtient

$$H(s_2) - H(s_1) = - \int_{s_1}^{s_2} J(s) ds, \quad J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}} \underline{J} \cdot \underline{e}_s dS. \quad (4.11)$$

En dérivant par rapport à s_2 , la perte de charge linéique $J(s)$ satisfait la relation

$$\frac{dH}{ds} = -J. \quad (4.12)$$

2 Charge spécifique et impulsion

Les équations stationnaires se ramènent à une équation différentielle ordinaire pour la hauteur d'eau. En l'absence de frottement, la charge spécifique est conservée au passage d'un obstacle. Les relations de saut à travers un ressaut hydraulique sont explicitées.

2.1 Équations stationnaires

Nous considérons un écoulement à surface libre stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulent ($\alpha \sim 1$), de faible pente ($I \ll 1$) et graduellement varié. L'équation d'équilibre s'écrit alors

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad , \quad H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g}, \quad (4.13)$$

où J est la perte de charge linéique qui doit être paramétrisée en fonction de h et U à l'aide d'un modèle de turbulence.

Pour simplifier la présentation qui suit, nous supposons que la largeur miroir L est constante et que la hauteur hydraulique h_H peut être confondue avec la profondeur h . On a donc $h_H = h$, $A = L h_H = L h$ et $Q = A U = L h U$ où Q est le débit. On définit alors le débit linéique $q = Q/L = h U$ qui est donc constant pour les écoulements stationnaires considérés ici.

Avec ces hypothèses, l'expression de la charge hydraulique est de la forme

$$H(s) = h(s) + \frac{q^2}{2g h^2(s)} + Z_f(s) + \frac{p_a}{\rho g}. \quad (4.14)$$

En notant $I = -Z'_f(s)$ la pente du fond, l'équation d'équilibre (4.13) s'écrit

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} = \frac{q}{g^{1/2} h^{3/2}}, \quad (4.15)$$

où le nombre sans dimension Fr , appelé le “nombre de Froude”, apparaît. On définit alors la “hauteur critique” h_c par la relation

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \implies Fr = \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2}. \quad (4.16)$$

2.2 Écoulement sur un obstacle

Comme premier exemple d’application de l’équation d’équilibre (4.15), on considère un fond d’équation $z = Z_f(s)$ tel que Z_f est constant excepté sur un obstacle d’extension finie et de faible pente (voir figure 4.5). Dans ce cas, s peut être choisi comme étant la coordonnée horizontale x . Par exemple, on peut considérer un obstacle de forme gaussienne avec $Z_f(s) = a \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right)$ où a est petit devant σ .

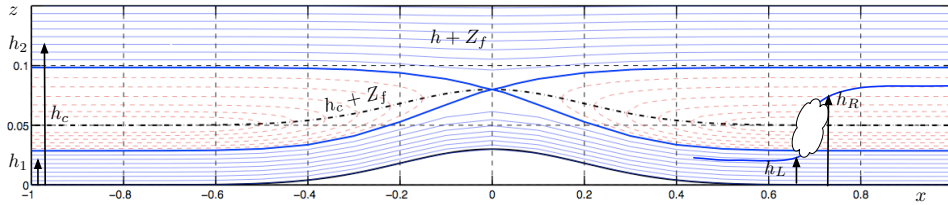


FIG. 4.5 – Courbes $z = h(x) + Z_f(x)$.

Si l’extension horizontale de l’obstacle n’est pas trop grande, on peut considérer que la perte de charge linéique $J \sim 0$ est négligeable comparée à I . L’équation d’équilibre (4.15) s’écrit

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I(s)}{1 - (h/h_c)^{-3}} \implies \left[1 - (h/h_c)^{-3} \right] \frac{dh}{ds} = I = -\frac{dZ_f}{ds}. \quad (4.17)$$

Comme h_c est considérée comme constante sur la portion de canal étudiée, cette équation différentielle s’intègre en $h(s) + \frac{1}{2}h_c^3/h^2(s) = H_0 - Z_f(s)$ où H_0 est une constante d’intégration. On retrouve bien la conservation de la charge

$$H = h(s) + \frac{U(s)^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) \implies H_0 = H - \frac{p_a}{\rho g}. \quad (4.18)$$

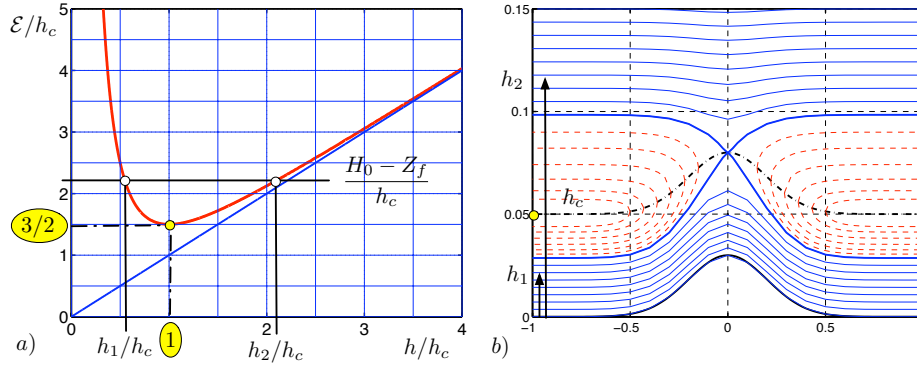


FIG. 4.6 – a) Charge spécifique adimensionnée $\frac{\mathcal{E}(q,h)}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c}\right)^{-2}$ avec $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Profils de surface libres possibles.

On définit alors la “charge spécifique” par les relations

$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2gh^2} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2}. \quad (4.19)$$

La charge spécifique $\mathcal{E}(q, h)$ est représentée sur la figure 4.6. Pour un débit donné q , elle est minimum pour h_c avec $\mathcal{E}(q, h_c) = \frac{3}{2} h_c$. Pour $H_0 - Z_f \geq E_c$, il existe deux solutions h_1 et h_2 à l’équation $\mathcal{E}(q, h) = H_0 - Z_f$. Ces deux solutions sont appelées “hauteurs conjuguées pour la charge spécifique”.

Au point s où $h < h_c$, donc $Fr > 1$, l’écoulement est dit “supercritique”. Quand $h > h_c$, et donc $Fr < 1$, l’écoulement est dit “sous-critique”. Il est “critique” au point où $h = h_c$, donc $Fr = 1$.

La figures 4.6b montre toutes les courbes $z = Z_f(s) + h(s)$ où $h(s)$ sont toutes les solutions de l’équation $\mathcal{E}[q, h(s)] = H_0 - Z_f(s)$ pour q fixé avec toutes les valeurs possibles de H_0 . Les lignes pointillées correspondent à des courbes non physiques, dans la mesure où elles ne permettent pas de franchir l’obstacle.

Quand l’écoulement est partout sous-critique ($h > h_c$), la hauteur de la surface libre décroît en passant sur l’obstacle. Quand l’écoulement est partout super-critique ($h < h_c$), la surface libre varie dans l’autre sens. Il y a une seule courbe qui passe de sous-critique à supercritique. Pour cette courbe, l’écoulement est critique au sommet de l’obstacle.

2.3 Ressauts hydrauliques

On observe, dans les écoulements naturels, que la hauteur de la surface libre peut transiter abruptement de $h_L < h_c$ à $h_R > h_c$ au travers d'un "ressaut hydraulique". Un tel ressaut hydraulique permet de raccorder l'écoulement à une condition aux limites en aval.



FIG. 4.7 – Ressaut stationnaire. Photo de Baptiste Monsion.

La relation de saut pour les ressauts hydrauliques est obtenue à partir d'un bilan de masse et de quantité de mouvement. Notons (h_L, U_L) la hauteur et la vitesse à la gauche du ressaut hydraulique et (h_R, U_R) les grandeurs correspondantes à droite.

Pour le cas stationnaire considéré ici, la loi de conservation de la masse dit que le débit linéique $q = U h$ est constant, ce qui s'écrit

$$U_L h_L = U_R h_R = q . \quad (4.20)$$

Puisque la pression est supposée hydrostatique des deux côtés du ressaut, un bilan de quantité de mouvement sur un petit domaine englobant la discontinuité conduit à

$$h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 . \quad (4.21)$$

En éliminant U_L et U_R , on écrit cette relation sous la forme

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) , \quad (4.22)$$

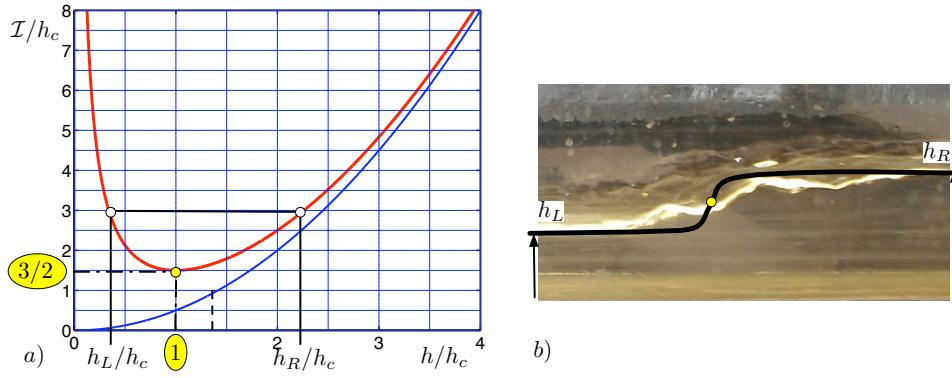


FIG. 4.8 – a) Fonction impulsion adimensionnée $\frac{\mathcal{I}(q,h)}{h_c} = \left(\frac{h}{h_c}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_c}\right)^2$ avec $h_c = q^{2/3} g^{-1/3}$. b) Ressaut hydraulique.

où la “fonction impulsion” $\mathcal{I}(q, h)$ est définie par

$$\mathcal{I}(q, h) = hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{g}{h} \left(h_c^3 + \frac{1}{2}h^3 \right). \quad (4.23)$$

Les deux hauteurs h_L et h_R sont appelées “hauteurs conjuguées pour l’impulsion”.

Pour q fixé, le minimum de \mathcal{I} est atteint pour $h = h_c$. Comme $Fr = (h_c/h)^{3/2}$, on voit donc (figure 4.8) que l’écoulement est supercritique ($Fr > 1$) d’un côté du ressaut et sous-critique ($Fr < 1$) de l’autre. Des considérations sur la dissipation de l’énergie entraînent que le nombre de Froude diminue dans le sens de l’écoulement.

3 Courbes de remous

On montre que le frottement moyen est proportionnel à la perte de charge linéique. Les deux grandeurs sont alors modélisées conjointement, par exemple avec la paramétrisation de Manning-Strickler. La classification des courbes de remous est utile pour décrire les solutions stationnaires.

3.1 Perte de charge et frottements

La perte de charge linéique due au frottement de l'écoulement sur le fond est définie par

$$J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{J} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (4.24)$$

En revenant aux équations de Navier-Stokes turbulentes (4.1), on peut écrire

$$\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U} + \text{div} \underline{R}) = -\frac{1}{\rho g} \text{div} (\underline{\tau}) \quad , \quad \underline{\tau} = \rho (2\nu \underline{d} - \underline{R}) \quad , \quad (4.25)$$

où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes et \underline{d} le tenseur des taux de déformation.

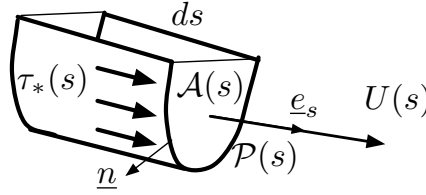


FIG. 4.9 – Contrainte de cisaillement τ_* appliquée par l'écoulement sur les murs de périmètre mouillé P .

On considère un écoulement à surface libre de périmètre mouillé P . On note τ_* la contrainte de cisaillement moyenne exercée par le fluide sur le mur et définie par

$$\frac{1}{P(s)} \int_{\mathcal{P}(s)} \underline{e}_s \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} dl = -\tau_*(s) \quad , \quad (4.26)$$

où \underline{n} est le vecteur unitaire normal au fond (figure 4.9). Lorsque l'écoulement est graduellement varié, on peut supposer que

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial}{\partial s} (\underline{e}_s \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{e}_s) dS \sim 0 . \quad (4.27)$$

L'application du théorème de la divergence du tenseur $\underline{\tau}$ intégrée sur un petit volume de canal de longueur infinitésimale ds conduit alors, en utilisant les définitions (4.24) et (4.25) de J et \underline{J} , à l'importante égalité

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad , \quad R_H = \frac{A}{P} . \quad (4.28)$$

Grâce à cette relation, une paramétrisation de la contrainte de cisaillement τ_* fournit une paramétrisation de la perte de charge linéique J .

3.2 Coefficient de Strickler

L'analyse dimensionnelle exprimant la contrainte tangentielle de cisaillement τ_* en fonction de la vitesse moyenne U , du diamètre hydraulique D_H , de la viscosité cinématique ν et de la taille caractéristique de la rugosité k_s , entraîne

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2, \quad (4.29)$$

où le nombre de Reynolds Re et Ru sont définis par

$$Re = \frac{U D_H}{\nu}, \quad Ru = \frac{k_s}{D_H}. \quad (4.30)$$

Les relations $\tau_* = \rho g R_H J$ entre J et τ_* , et $D_H = 4 R_H$ entre le diamètre hydraulique D_H et le rayon hydraulique R_H impliquent alors

$$J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H}. \quad (4.31)$$

Pour les écoulements en canaux ouverts, le nombre de Reynolds est élevé pour les applications pratiques et le fond peut donc être considéré comme rugueux. Dans ce cas, le frottement λ peut être paramétrisé par la formule de Manning-Strickler qui s'écrit

$$\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}. \quad (4.32)$$

Pour des études pratiques dans les écoulements ouverts, la valeur $\phi_{MS} = 0.2$ est pertinente en choisissant $k_s = d_{50}$, où d_{50} est la médiane du spectre des tailles de sédiments. Une autre approche, très courante en hydraulique, consiste à considérer directement le nombre de Strickler K_s qui relie J à U et R_H à travers la formule

$$U = K_s R_H^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

En comparant la définition de K_s avec la définition de ϕ_{MS} , on obtient la relation $K_s = g^{1/2} \phi_{MS}^{-1/2} 2^{11/6} k_s^{-1/6}$.

Par exemple, on choisira $K_s = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ pour un canal en béton et $K_s = 30 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ pour une rivière à fond irrégulier.

3.3 Courbes de remous

Nous considérons maintenant l'équation de quantité de mouvement stationnaire

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad , \quad I = -\frac{dZ_f}{ds} \quad , \quad (4.34)$$

quand $I > 0$. Contrairement au cas de l'obstacle localisé, J n'est pas négligeable sur la longueur du canal étudiée. Les solutions $h(s)$ de cette équation sont les "courbes de remous" qui donnent la réponse de la surface libre à la forme $Z_f(s)$ du fond et aux conditions aux limites en aval.

Nous considérons le cas simple d'un canal de section rectangulaire dont la largeur L est grande comparée à la profondeur h . Cette hypothèse implique $R_H = A/(L + h) \sim A/L = h$.

Nous supposons ici que la perte de charge de linéique J est paramétrisée par la formule de Manning-Strickler $U = K_s h^{2/3} J^{1/2}$ qui peut être écrite sous la forme suivante

$$J = I \left(\frac{h}{h_n} \right)^{-10/3} \quad , \quad h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10} \quad , \quad (4.35)$$

où h_n est appelée la "hauteur normale". Nous remarquons que cette hauteur dépend de la pente I tandis que la "hauteur critique" h_c , définie par

$$Fr^2 = \left(\frac{h_c}{h} \right)^3 \quad , \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad , \quad (4.36)$$

est indépendante de I . Avec ces définitions de h_n et de h_c , l'équation de quantité de mouvement stationnaire s'écrit

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad . \quad (4.37)$$

Pour un débit linéique donné q , la hauteur normale $h_n(I)$, définie par $I = J$, et la hauteur critique h_c , définie par $Fr = 1$, sont des quantités importantes qui peuvent être comparées entre elles pour caractériser l'écoulement en tout point. Aux points où $h_c < h_n$, l'écoulement est dans un régime de "faible pente". Le régime de "forte pente" est obtenue pour $h_n < h_c$.

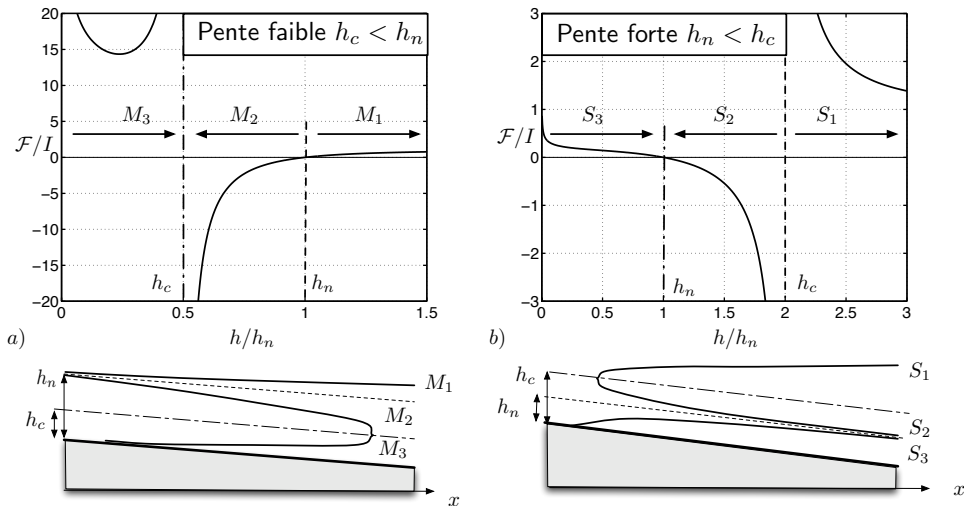


FIG. 4.10 – Fonction $\mathcal{F}(h)$ et courbes de remous associées $h(s)$. a) Régime de faible pente $h_c < h_n$ avec des courbes de type M . b) Régime de forte pente $h_n < h_c$ avec des courbes de type S .

La transition entre un régime à forte pente et un régime à faible pente est obtenue en un point où la pente I est égale à la “pente critique” I_c définie par la relation $h_n(I_c) = h_c$.

Une seule condition aux limites $h(s_0) = h_0$ imposée quelque part en amont ou en aval du bief (portion de canal) considéré est suffisante pour déterminer la “courbe de remous” $h(s)$. Cette courbe se raccorde avec la condition aux limites en aval ou en amont en fonction des cas.

En fonction de la position de $h(s_0) = h_0$ comparée à h_n et h_c , on obtient des courbes de remous croissantes ou décroissantes qui sont notées (M_1, M_2, M_3) dans le cas d’un régime de faible pente et (S_1, S_2, S_3) dans le cas d’un régime de forte pente (figure 4.10).

Le tracé de ces courbes de remous montre que des singularités apparaissent quand Fr devient égal à 1. On peut observer l’apparition d’un ressaut hydraulique avant d’atteindre la singularité $Fr = 1$. La position d’un tel ressaut hydraulique stationnaire fournit un nouveau degré de liberté au système lorsque deux conditions aux limites à l’amont et à l’aval sont imposées à la fois.

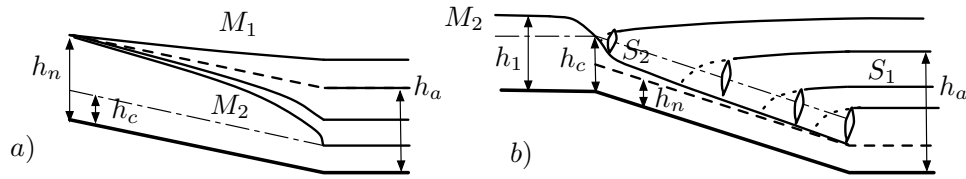


FIG. 4.11 – *Changement de pente et courbes de remous associées. a) Régime de faible pente. b) Exemple de forte pente avec un ressaut hydraulique.*

Comme exemple d'application de ce concept de courbe de remous, considérons un écoulement dans un régime de faible pente ($h_c < h_n$) avec une transition vers un fond plat horizontal (figure 4.11a). Si la condition aux limites $h = h_a$, avec $h_c < h_a$, est imposée en aval de ce point de transition (par exemple avec un lac de grandes dimensions), on peut calculer les courbes de remous qui sont de type M_2 pour $h_c < h_a < h_n$ et de type M_1 pour $h_n < h_a$. Dans le cas d'une forte pente (figure 4.11b), on voit qu'un ressaut hydraulique doit apparaître pour que le profil de la surface libre puisse se raccorder à la condition aux limites aval $h = h_a$ si $h_c < h_a$.

Lorsque la pente est nulle ($I = 0$) ou négative ($I < 0$), on peut définir de nouvelles courbes de remous (C_1 et C_2 pour $I = 0$, A_1 et A_2 pour $I < 0$) en utilisant un raisonnement similaire au cas des pentes positives à partir de l'équation (4.34).

FORMULAIRE

Charge hydraulique

Charge locale :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} U^2 .$$

Paramètres géométriques :

$$R_H = \frac{A}{P} \quad , \quad D_H = 4 R_H \quad , \quad h_H = \frac{A}{L} .$$

Charge moyenne :

$$H(s) = \frac{p_a}{\rho g} + h(s) + Z_f(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} .$$

Charge spécifique et impulsion

Perte de charge linéique :

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad , \quad H = \frac{p_a}{\rho g} + h + Z_f + \frac{U^2}{2g} .$$

Équation d'équilibre :

$$q = U h \quad , \quad \frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - Fr^2} \quad , \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{g h}} .$$

Charge spécifique :

$$\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{1}{2} \frac{h_c^3}{h^2} \quad , \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} .$$

Ressaut stationnaire :

$$U_L h_L = U_R h_R = q \quad , \quad h_L U_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 = h_R U_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 .$$

Fonction impulsion :

$$\mathcal{I}(q, h_L) = \mathcal{I}(q, h_R) \quad \text{avec} \quad \mathcal{I}(q, h) = hU^2 + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{g}{h} \left(h_c^3 + \frac{1}{2}h^3 \right) .$$

Courbes de remous

Frottements :

$$J = -\frac{1}{A} \iint_{\mathcal{A}} \frac{1}{\rho g} \operatorname{div}(\underline{\tau}) \cdot \underline{e}_s \, da \quad , \quad \tau_* = -\frac{1}{P} \int_{\mathcal{P}} \underline{e}_s \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dl .$$

Coefficient λ :

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda(Re, Ru) \rho U^2 \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad , \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} .$$

Perte de charge :

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad \implies \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H} .$$

Coefficient de Strickler :

$$U = K_s R_H^{\frac{2}{3}} J^{\frac{1}{2}} .$$

Courbes de remous :

$$\frac{dh}{ds} = \mathcal{F}(h) = I \frac{1 - (h/h_n)^{-10/3}}{1 - (h/h_c)^{-3}} \quad , \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad , \quad h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2} \right)^{3/10} .$$

EXERCICES

EXERCICE 4.1 Écoulement sur un obstacle

On dispose d'un canal de largeur L et de débit constant Q . On note $q = Q/L$ le débit linéique, h la hauteur de la couche d'eau et U sa vitesse. Les abaques de la figure 4.12 permettent d'estimer graphiquement la charge spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2}$ et l'impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2$ en fonction de q et h .

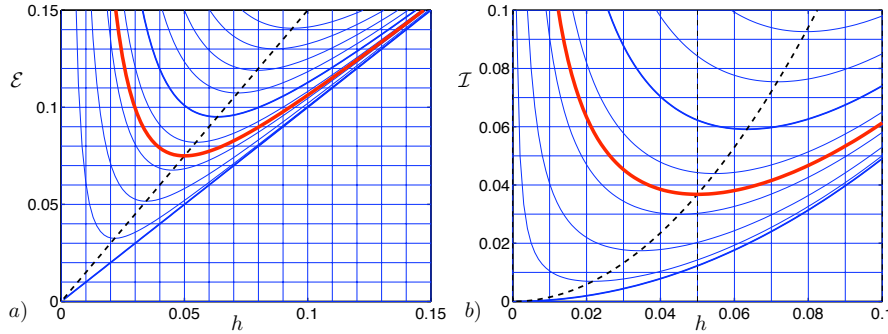


FIG. 4.12 – a) Énergie spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2} = \frac{1}{2h^2} (2h^3 + h_c^3)$ et b) Impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{q}{h} (h_c^3 + \frac{1}{2}h^3)$. Intervalle entre les iso- q : $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. En rouge : cas $h_c = 5 \text{ cm}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{E}(q, h)$ et $\mathcal{I}(q, h)$ ont le même minimum h_c , appelé “hauteur critique”, pour un débit donné. On suppose que $h_c = 5 \text{ cm}$. Déterminer le débit linéique q correspondant à partir des abaques. Exprimer le nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{gh}$ en fonction de h_c/h . Identifier les régimes sous-critiques et supercritiques.

Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 1 - \frac{q}{gh^3}$ et $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial h} = -\frac{q^2}{h^2} + gh$ s'annulent pour $h_c = (q^2/g)^{1/3}$. Si $h_c = 5 \text{ cm}$, on a donc $q = \sqrt{gh_c^3} = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. Comme $q = Uh$, on a $Fr = U/\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{q^2}{gh^3}} = (h_c/h)^{3/2}$. Le régime est supercritique ($Fr > 1$) pour $h < h_c$ et sous-critique ($Fr < 1$) pour $h > h_c$.

On considère un obstacle de forme gaussienne dont la hauteur est donnée par $Z_f(x) = a e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec $a = 3 \text{ cm}$ et $\sigma = 20 \text{ cm}$. On dispose, “loin” en amont de

l'obstacle (par exemple à 1 m), une vanne de fond dont l'ouverture, réglable, est notée e (voir figure 4.13). Pour un débit donné ($h_c = 5$ cm) on cherche à décrire les régimes d'écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de e en négligeant toutes les pertes de charges.

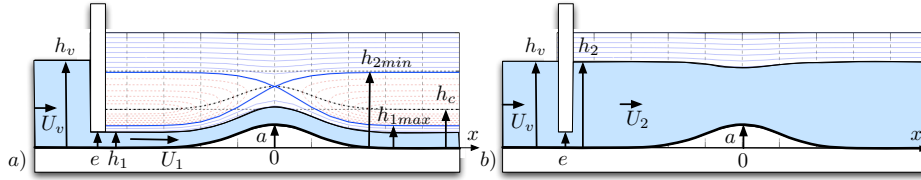


FIG. 4.13 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture e de vanne.

- 2) Pour $e = 2.5$ cm, on observe deux régimes tels que la hauteur h_v de la couche d'eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 4.13). À l'aval de cette vanne, cette hauteur est $h_1 = e$ pour le premier régime et h_2 pour le second. Déterminer, à l'aide des abaques, la charge spécifique commune aux deux régimes ainsi que h_v et h_2 . En déduire U_1 et U_2 . Pour chacun des régimes, tracer, sur la figure 4.12a, des segments verticaux indiquant la valeur de l'énergie potentielle h et de l'énergie cinétique $U^2/(2g)$ dont la somme est la charge spécifique \mathcal{E} . Déterminer graphiquement ces valeurs.

La conservation de la charge entraîne que $H = \frac{p_a}{\rho g} + h_v + \frac{U_v^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$ et donc $\mathcal{E}(q, h_v) = \mathcal{E}(q, h_1) = \mathcal{E}(q, h_2) = 12.5$ cm en utilisant $q = hU$. Les hauteurs $h_1 = e = 2.5$ cm et $h_2 = h_v = 12$ cm sont donc conjuguées pour la charge spécifique. On en déduit $U_1 = q/h_1 = 1.4$ m/s et $U_2 = 30$ cm/s. En traçant sur le graphe la droite $\mathcal{E} = h$ (qui est aussi l'asymptote des courbes iso- q), on peut reporter un segment de longueur $h_1 = 2.5$ cm pour le régime a) et $h_2 = 12$ cm pour le régime b), surmonté, respectivement, d'un segment de longueur $U_1^2/(2g) = 10$ cm ou $U_2^2/(2g) = 0.5$ cm.

- 3) Montrer que la coexistence de deux tels régimes n'est possible que pour $e < h_{1max}$ et, en conséquence, $h_v > h_{2min}$ où h_{1max} et h_{2min} sont des valeurs que l'on précisera. Tracer les profils de la surface libre pour tous ces régimes. Que se passe-t-il si $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement.

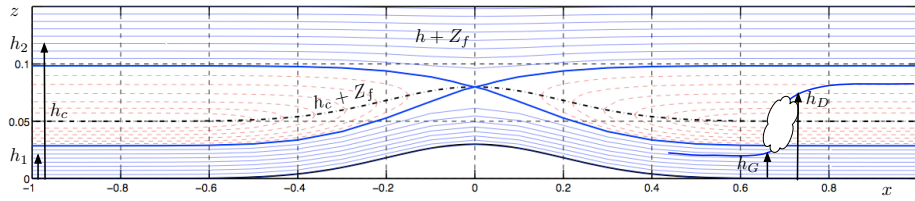


FIG. 4.14 – Trajectoires possibles pour un débit donné.

On a $\mathcal{E}(q, h_{1max}) = \mathcal{E}(q, h_{2min}) = \mathcal{E}(q, h_c) + a$. On en déduit, à partir de l'abaque, que $h_{1max} = 2.8$ cm et $h_{2min} = 9.8$ cm. En utilisant l'abaque de la charge spécifique, on peut tracer les courbes de remous que l'on peut comparer à la solution numérique de la figure 4.14. Pour $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$, le régime est bloqué sur la courbe qui part de $h = h_{2min} = 9.8$ cm au voisinage de la vanne, dont le régime est sous-critique ($Fr < 1$) pour $x < 0$ et supercritique ($Fr > 1$) pour $x > 0$ (voir figure 4.15).

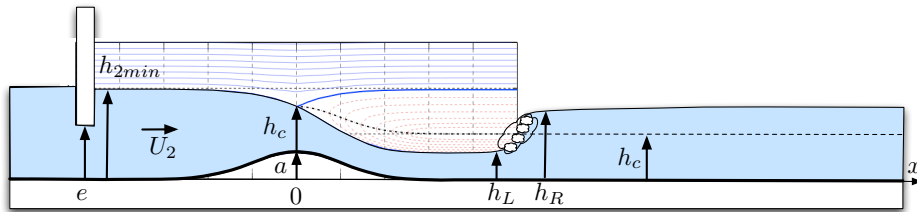


FIG. 4.15 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique

- 4) On suppose que $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$ et que l'écoulement est donc critique en $x = 0$. Que vaut h en $x = 0$? On observe un ressaut hydraulique "loin" (par exemple à 1 m) en aval de l'obstacle. Déterminer, à l'aide des abaques, les hauteurs h_L et h_R de part et d'autre du ressaut. Déterminer graphiquement la perte de charge à travers le ressaut. Commenter.

On $h = h_c$ en $x = 0$. "Loin" en aval de l'obstacle, on a $h_L = h_{1max} = 2.8$ cm. Comme l'impulsion est conservée à travers le ressaut, on lit sur l'abaque 4.12b que $\mathcal{I} = 0.047$ m⁻¹ s⁻² et $h_R = 8$ cm. Sur l'abaque 4.12a, on lit $\mathcal{E}(q, h_L) = 10.5$ cm et $\mathcal{E}(q, h_R) = 9$ cm. Il y a donc une perte de charge $\Delta H = \mathcal{E}(q, h_L) - \mathcal{E}(q, h_R) = 1.5$ cm due à la turbulence intense du ressaut.

On suppose que l'effet des parois peut être modélisé par une formule de Manning-Strickler $J = U^2 K_s^{-2} h^{-4/3}$ où le nombre de Strickler "équivalent" est $K_s = 100$ m^{1/3} s⁻¹ (le vrai Strickler ferait intervenir le rayon hydraulique R_H qui est différent de h lorsque le canal est étroit).

- 5) On suppose que l'obstacle est maintenant un triangle de hauteur $a = 3$ cm et de demi-base $l = 30$ cm (voir figure 4.16) et que la pente du canal est $I = 0.001$ en dehors de l'obstacle. À l'aide de l'abaque de la figure 4.17, déterminer la hauteur normale $h_n = [q/(I K_s)]^{3/10}$ sur toutes les parties du canal où $I > 0$. En déduire une description des courbes de remous de la photographie.

On a $h_n = 1.6$ cm pour la rampe de pente $I = a/l = 0.1$ et $h_n = 8$ cm lorsque $I = 0.001$. Le régime est en forte pente ($h_n < h_c$) sur la rampe et en faible pente ($h_c < h_n$) sinon. On en déduit les courbes de remous M_2 , S_2 , M_3 et M_1 .

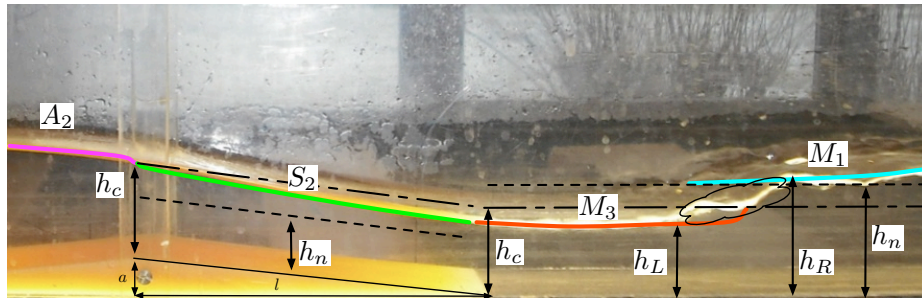


FIG. 4.16 – Courbes de remous d'un passage critique suivi d'un ressaut.

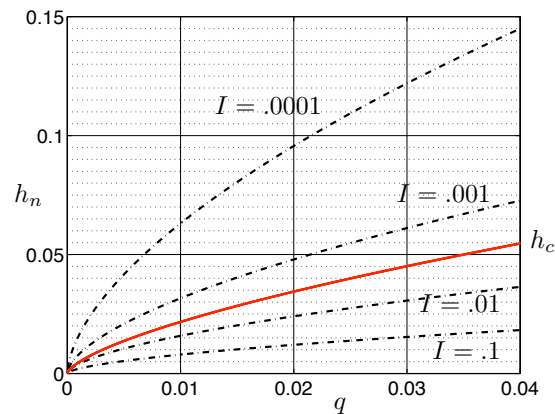


FIG. 4.17 – Tracé de $h_n = [q/(I K_s)]^{3/10}$ et $h_c = (q^2/g)^{1/3}$ en fonction de q pour $K_s = 100$.

NOTATIONS

\mathcal{A}	Section d'un tube
A	Aire de la section \mathcal{A} (m^2)
$A(s)$	Aire fonction de s (m^2)
A_1, A_2	Courbes de remous de type A
\bar{B}	Champ B en moyenne macroscopique ($[B]$)
B'	Fluctuations turbulentes du champ B ($[B]$)
C_1, C_2	Courbes de remous de type C
div	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs (m^{-1})
$\underline{\text{div}}$	Divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux (m^{-1})
\underline{dM}	Élément d'intégration vectoriel (m)
D_H	Diamètre hydraulique $D_H = 4 R_H$ (m)
d_{50}	Valeur médiane des diamètres des sédiments (m)
dS	Surface d'intégration dans \mathbb{R}^3 (m^2)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
\underline{e}_s	Vecteur unitaire associé à la coordonnée s ()
\mathcal{E}	Charge spécifique (m)
\underline{F}	Densité massique des forces extérieures de volume (N kg^{-1})
Fr	Nombre de Froude ()
$\mathcal{F}(h)$	Fonction de h de l'hydraulique à surface libre ()
$\underline{\text{grad}}$	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
g	Gravité (m s^{-2})
H	Charge hydraulique (m)
$H(s)$	Charge hydraulique moyenne (m)
h_0	Hauteur h en $s = s_0$ (m)
h_1, h_2	Hauteurs conjuguées pour la charge spécifique (m)
h_H	Hauteur hydraulique A/L (m)
h_n	Hauteur normale (m)
h_c	Hauteur critique (m)
h_a	Hauteur imposée à l'aval (m)
h_L, h_R	Hauteurs à gauche et à droite du ressaut (m)
I	Pente du fond ()
I_c	Pente critique ()
\mathcal{I}	Impulsion ($\text{m}^3 \text{s}^{-2}$)
\underline{J}	Vecteur perte de charge linéique (m^{-1})
J	Perte de charge linéique (m^{-1})
k_s	Hauteur moyenne des rugosités (m)
K_s	Nombre de Strickler ($\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$)

\mathcal{L}	Ligne de courant
L	Largeur miroir (m)
M_1, M_2	Deux points de l'espace
M_1, M_2, M_3	Courbes de remous de type M
\underline{n}	Vecteur normal pointant vers l'extérieur ()
p	Champ de pression (Pa)
p_a	Pression atmosphérique (Pa)
P_*	Pression piézométrique (Pa)
\mathcal{P}	Périmètre mouillé
P	Périmètre mouillé (m)
Q	Débit volumique ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$)
q	Débit volumique linéique ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
\underline{R}	Tenseur de Reynolds ($\text{m}^2 \text{s}^2$)
\underline{R}_{ij}	Composantes du tenseur de Reynolds ($\text{m}^2 \text{s}^2$)
rot	Opérateur rotationnel d'un champ vectoriel (m^{-1})
R_H	Rayon hydraulique $R_H = A/P$ (m)
Re	Nombre de Reynolds ()
Ru	Nombre sans dimension k_s/D_H ()
s	Coordonnée curviligne (m)
S_1, S_2, S_3	Courbes de type S
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
\underline{U}	Vitesse moyenne dans la direction \underline{e}_x où \underline{e}_s (m s^{-1})
U_L, U_R	Vitesses à gauche et à droite du ressaut (m s^{-1})
x, y, z	Coordonnées spatiales (m)
Z_f	Côte de l'axe ou du fond (m)
α	Moyenne du carré de \underline{U} sur le carré de sa moyenne ()
Δ	Opérateur Laplacien (m^{-2})
λ	Coefficient de perte de charge ()
ν	Viscosité cinématique moléculaire ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
$\underline{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes (Pa)
τ_*	Contrainte de cisaillement au fond (Pa)
ϕ_{MS}	Coefficient de la formule de Manning-Strickler ()