Chapitre 3

Turbulence et frottement

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des modèles de turbulence qui décrivent, du point de vue de l'ingénieur, le frottement des parois sur un écoulement.

Cette présentation de la modélisation de la turbulence est orientée vers l'introduction des relations empiriques qui expriment les coefficients de frottement en fonction des paramètres globaux de l'écoulement, tels que la vitesse moyenne et la section de la conduite (hydraulique en charge) ou du canal (hydraulique à surface libre).

Des notions simples sur la décomposition entre champs moyens et fluctuations turbulentes sont données ici. En prenant la moyenne d'équations de transport, les notions de flux turbulents et de diffusivité turbulente sont présentées. Le modèle de longueur de mélange, qui est utile dans de nombreuses applications de l'ingénieur ayant trait à la mécanique des fluides, est explicité.

FIG. **3**.1 – *Écoulement turbulent à la sortie d'une émissaire marin.*

Dans le voisinage d'une paroi, tel que le fond d'un canal où la frontière intérieure d'une conduite, la longueur de mélange est le produit de la distance à la paroi et de la constante de Von Karman dont la valeur est issue des expériences. Cette loi robuste conduit à l'identification de profils logarithmiques pour la vitesse dans le voisinage de la paroi. Les cas des frontières lisses ou rugueuses sont considérés. Ce sont des cas limites du "diagramme de Moody" qui trace, pour des rugosités quelconques, le coefficient de frottement turbulent en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité adimensionnelle.

1 Modélisation turbulente

La décomposition d'un champ turbulent en la somme de sa moyenne et de ses fluctuations permet de définir la notion de flux turbulents comme étant la moyenne de produits de fluctuations. On paramétrise alors ces flux en fonction des champs moyens et à l'aide de coefficients comme la diffusivité turbulente ou la viscosité turbulente.

1.1 Moyenne et fluctuations

Quand un écoulement est turbulent, tout champ $B(\underline{x},t)$ (composantes des vitesses, pression, température ...) est fluctuant en espace et en temps sur une large gamme d'échelles.

Par conséquent, on essaie de décomposer B en la somme d'un champ moyen $\overline{B}$ qui varie aux grandes échelles spatiales et temporelles d'intérêt (par exemple pour l'ingénieur) et un champ rapidement fluctuant B' qui représente le mouvement aux plus petites échelles.

On considère le signal $b(t) = B(\underline{x},t)$ mesuré en un point donné $\underline{x}$. Sa transformée de Fourier $\widehat{b}(\omega)$, définie par

$$b(t) = \int_{I\!R} \widehat{b}(\omega) e^{-i\,\omega\,t}\, d\omega \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{b}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{I\!R} b(t) e^{i\,\omega\,t}\, dt\ , \qquad (\mathbf{3}.1)$$

conduit au spectre de puissance $E_B(\omega) = \frac{1}{2}|\widehat{b}(\omega)|^2$ où ω est la fréquence. Une définition plus exacte du spectre de puissance doit être recherchée dans les livres de turbulence ([**?**], [**?**]). De la même manière, le champ tridimensionnel $b(\underline{x}) = B(\underline{x},t)$ mesuré à un temps t donné peut être décomposé en modes de Fourier à travers les relations

$$b(\underline{x}) = \iiint_{I\!R^3} \widehat{b}(\underline{K}) e^{i\,\underline{K}\cdot\underline{x}}\, dK^3 \Longleftrightarrow \widehat{b}(\underline{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{I\!R^3} b(\underline{x}) e^{-i\,\underline{K}\cdot\underline{x}}\, dx^3\ , \quad (\mathbf{3}.2)$$

qui conduisent au spectre de puissance $E_B(K) = \frac{1}{2}\iint_{\|\underline{K}\|=K} |\widehat{b}(\underline{K})|^2\, dS$ comme fonction du nombre d'onde $K = \|\underline{K}\|$ et donc des échelles de longueur.

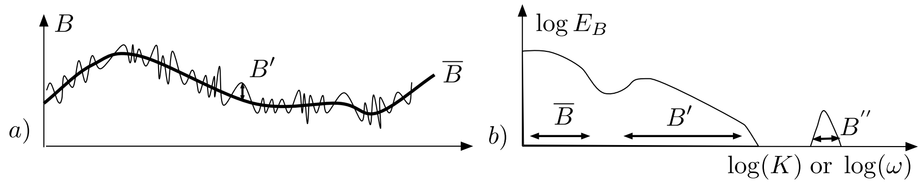

FIG. **3**.2 – a) *Décomposition de* $B = \overline{B} + B'$ *en champ moyen et fluctuations turbulentes. b) Spectre de puissance avec le mouvemenet brownien* B''.

Ces spectres montrent la répartition de puissance du signal en fonction des échelles de temps et d'espace (figure **3**.2).

Lorsque l'on considère les fluctuations browniennes B'' (aux échelles moléculaires) du champ B, on peut voir (figure **3**.2b) un trou spectral entre les échelles de la mécanique des milieux continus ($\overline{B}+B'$) et les échelles moléculaires (B''). La séparation entre ces deux échelles est alors bien définie.

Un tel trou spectral entre les grandes échelles ($\overline{B}$) et les échelles turbulentes (B') est rarement présent. Néanmoins, on suppose qu'il est tout de même possible d'effectuer la décomposition

$$B(\underline{x}, t) = \overline{B}(\underline{x}, t) + B'(\underline{x}, t) \ , \qquad (\mathbf{3}.3)$$

et que l'opérateur de moyenne possède de bonnes propriétés comme $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$ et $\overline{B'} = 0$. On a donc $\overline{B_1\, B_2} = \overline{B}_1\, \overline{B}_2 + \overline{B_1'\, B_2'}$. On suppose aussi $\overline{\frac{\partial B}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$ et $\overline{\frac{\partial B}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial x_i}$. On dit que $\overline{B}$ est la "moyenne de Reynolds" de B.

1.2 Flux turbulents

Si un écoulement est turbulent, on décompose sa vitesse $\underline{U} = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ en la somme des champs vectoriels moyen et fluctuant. Nous nous intéressons ici aux écoulements incompressibles et l'on a donc div $\underline{U} = 0$ et div $\overline{\underline{U}} = 0$.

Le champ B est un "scalaire passif" advecté par le champ de vitesse $\underline{U}$ s'il obéit à l'équation

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\; B = k_B\, \Delta B \ , \qquad (\mathbf{3}.4)$$

où k_B est un coefficient de diffusion moléculaire. En utilisant les propriétés de l'opérateur de moyenne et la relation div $\underline{U} = 0$, la moyenne de cette équation est

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\underline{\overline{U}}\,\overline{B}) = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \underline{\overline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\,\overline{B} = k_B\,\Delta\overline{B} - \mathrm{div}\,(\overline{\underline{U}'\,B'})\ . \qquad (\mathbf{3}.5)$$

La quantité $\underline{F}_{Bt} = \overline{\underline{U}'\,B'}$ est le “flux turbulent”.

De manière similaire, les équations de Navier-Stokes incompressibles peuvent être moyennées, ce qui conduit à

$$\mathrm{div}\,\underline{\overline{U}} = 0\ ,\quad \frac{\partial}{\partial t}\underline{\overline{U}} + \underline{\overline{U}}\cdot\underline{\mathrm{grad}}\,\underline{\overline{U}} = -\frac{1}{\rho}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\overline{p} - \underline{\mathrm{grad}}\,(g\,z) + \nu\,\Delta\underline{\overline{U}} - \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{R}}\ , \quad (\mathbf{3}.6)$$

où g est la gravité et le “tenseur de Reynolds” $\underline{\underline{R}}$ est défini par ses composantes

$$R_{ij} = \overline{U_i'\,U_j'}\ , \qquad (\mathbf{3}.7)$$

où U_i désigne les trois composantes de $\underline{U}$.

Un spectre typique $E(K)$ de l’énergie cinétique $k = \frac{1}{2}\overline{\underline{U}'^2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \underline{\underline{R}}$ d’un écoulement turbulent est représenté sur la figure **3**.3. On peut trouver dans les les livres de turbulence ([**?**], [**?**]) la dérivation de la loi $E(K) = C_K\,\epsilon^{3/2}\,K^{-5/3}$ du “spectre de Kolmogorov”, où C_K est la “constante de Kolmogorov”, valable entre les échelles K_0, où l’énergie est injectée au taux ϵ, et les échelles K_d, où elles sont dissipées au même taux.

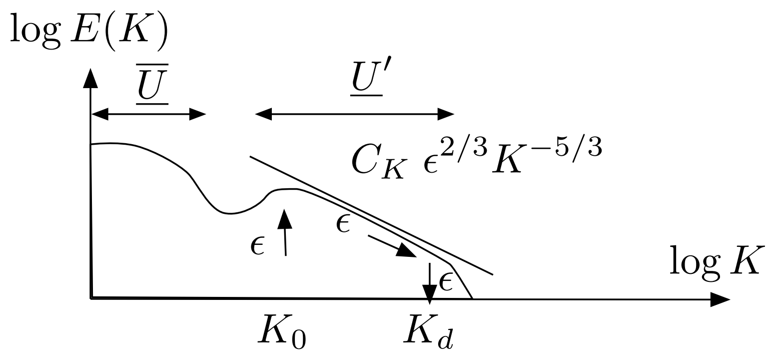

FIG. **3**.3 – *Exemple de spectre d’énergie* $E(K)$ *et décomposition* $\underline{U} = \underline{\overline{U}} + \underline{U}'$.

Le problème de la modélisation de la turbulence est d’exprimer des produits tels que $\overline{U_i'\,B'}$ ou $\overline{U_i'\,U_j'}$, qui sont appelés “corrélations doubles”, en fonction des champs moyens.

Les modèles d'ordre un proposent des expressions des flux turbulents tels que $\underline{F}_{Bt}$ ou $\underline{\underline{R}}$ en fonction des champs moyens $\overline{B}$ et $\underline{\overline{U}}$ ou de leurs gradients.

1.3 Viscosité turbulente

Presque tous les modèles de turbulence débutent avec la loi empirique

$$\underline{F}_{Bt} = -k_{Bt}\ \underline{\mathrm{grad}}\ \overline{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\underline{U}'\, B'} = -k_{Bt}\ \underline{\mathrm{grad}}\ \overline{B}\ , \tag{3.8}$$

où k_{Bt} est appelée la “diffusivité turbulente” de B. L'équation d'advection moyennée pour B est alors

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \underline{\overline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \overline{B} = \mathrm{div}\ \left[(k_B + k_{Bt})\ \underline{\mathrm{grad}}\ \overline{B}\right]\ . \tag{3.9}$$

De même, la modélisation turbulente du tenseur de Reynolds $\underline{\underline{R}}$ en fonction des composantes moyennes $\overline{U}_i$ suppose la loi empirique

$$R_{ij} = -2\,\nu_t\,\overline{d}_{ij} + \frac{2}{3}\,k\,\delta_{ij} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{R}} = -2\,\nu_t\,\underline{\underline{\overline{d}}} + \frac{2}{3}\,k\,\underline{\underline{I}}\ , \tag{3.10}$$

où “l'énergie cinétique turbulente” k est définie par

$$k = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \underline{\underline{R}} = \frac{1}{2}\left(\overline{U_1'^2} + \overline{U_2'^2} + \overline{U_3^2}\right)\ , \tag{3.11}$$

et les composantes du “tenseur des taux de déformation” $\underline{\underline{d}}$ sont $d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$. La quantité ν_t est appelée la “viscosité turbulente”.

Pour $i \neq j$, cette loi s'écrit

$$\overline{U_i'U_j'} = -\nu_t\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right) = -2\ \nu_t\ d_{ij}\ . \tag{3.12}$$

L'expression des composantes diagonales $i = j$ prend en compte la contrainte d'incompressibilité $\mathrm{tr}\ \underline{\underline{\overline{d}}} = \mathrm{div}\ \underline{\overline{U}} = 0$.

La plupart du temps, le coefficient de diffusion turbulente k_{Bt} et la viscosité turbulente ν_t sont choisis comme étant égaux.

Pour un écoulement parallèle $\underline{\overline{U}} = \overline{u}(z)\,\underline{e}_x$, la seule composante non triviale de ce modèle est

$$\overline{u'w'} = -\nu_t\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\ . \tag{3.13}$$

2 Profils de vitesses

Le modèle de longueur de mélange est une paramétrisation turbulente souvent utilisée dans les applications. Près des parois, il permet de calculer les profils logarithmiques des vitesses en tenant compte du caractère lisse ou rugueux de la surface.

2.1 Longueur de mélange

Un modèle de turbulence très simple est obtenu en choisissant une viscosité turbulente ν_t constante. Ce modèle peut donner des résultats réalistes quand les champs turbulents sont homogènes en espace. Ce n'est pas le cas des sillages d'obstacles ou des voisinages des frontières telles que le fond d'une rivière ou les parois d'un tuyau. Des modèles de turbulence plus complexes sont alors requis pour de tels cas.

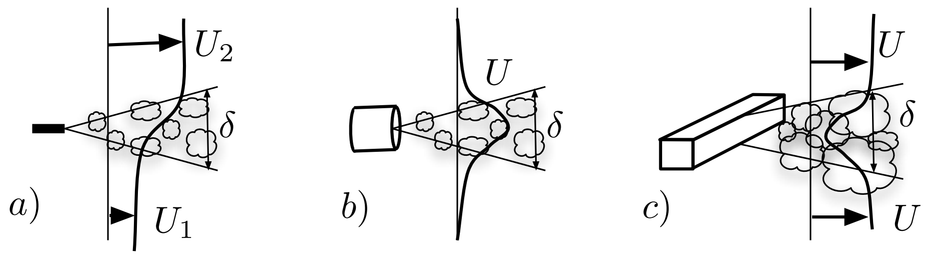

FIG. **3**.4 – *Valeurs de longueurs de mélange. a) Couche de mélange,* $l_m \sim 0.07\,\delta$. *b) Jet circulaire,* $l_m \sim 0.075\,\delta$. *c) Sillage plan,* $l_m \sim 0.16\,\delta$.

Le modèle de longueur de mélange est utilisé pour décrire une turbulence inhomogène. Il suppose que la viscosité turbulente s'écrit

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2\, \underline{\underline{\overline{d}}} : \underline{\underline{\overline{d}}}}\,, \qquad (\mathbf{3}.14)$$

où $\underline{\underline{\overline{d}}} : \underline{\underline{\overline{d}}} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\overline{d}}} \cdot \underline{\underline{\overline{d}}}) = d_{ij}\, d_{ji} = d_{ij}\, d_{ij}$ est la somme des carrés de toutes les composantes du tenseur (symétrique) des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (nous avons utilisé ici la convention d'Einstein qui consiste à sommer les indices répétés i et j). La quantité $l_m(\underline{x}, t)$ est appelée la "longueur de mélange". Elle doit être ajustée en fonction de la géométrie de l'écoulement. Par exemple, elle est de l'ordre du dixième de l'épaisseur caractéristique $\delta(x)$ pour une couche de mélange, un jet ou un sillage turbulent (voir figure **3**.4).

Pour l'écoulement parallèle $\underline{\overline{U}} = \overline{u}(z)\,\underline{e}_x$, le modèle de longueur de mélange conduit à

$$\nu_t = l_m^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right| \qquad , \qquad \overline{u'w'} = -l_m^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \; . \tag{3.15}$$

Près d'un mur, les observations expérimentales montrent que

$$l_m = \kappa\, z \qquad , \qquad \kappa = 0.41 \; , \tag{3.16}$$

où κ est la "constante de Von Karman" (figure **3**.5).

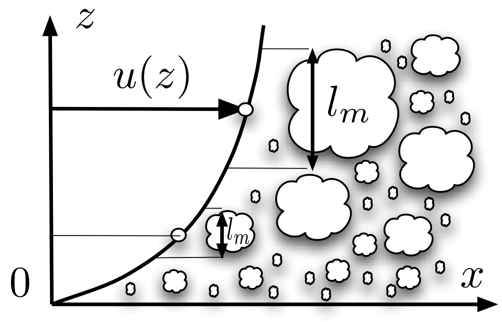

FIG. **3**.5 – *Longueur de mélange près d'un mur :* $l_m = \kappa\, z$ *avec* $\kappa = 0.41$.

Le modèle de longueur de mélange peut être comparé à l'expression $\nu \sim l_{mol}\, u_{mol}$ de la viscosité moléculaire où l_{mol} est le libre parcours moyen des molécules et u_{mol} leur vitesse caractéristique. En effet, on peut écrire $\nu_t = l_m\; u_m$ où $u_m \sim l_m \sqrt{2\,\underline{\underline{\overline{d}}} : \underline{\underline{\overline{d}}}}$, ce qui s'écrit $u_m \sim l_m \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|$ pour un écoulement parallèle. La longueur l_m peut être vue comme le libre parcours moyen de petits tourbillons et u_m comme leur vitesse caractéristique.

2.2 Fond plat

Considérons la couche d'épaisseur R d'un écoulement turbulent sur un fond plat. On suppose que l'écoulement est forcé par un gradient de pression constant $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = -G$, dans un champ de gravité $-g\,\underline{e}_z$.

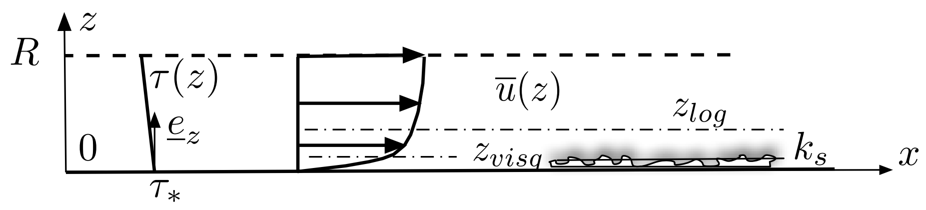

FIG. **3**.6 – *Écoulement à surface libre sur un fond lisse ou rugueux.*

Dire que la vitesse moyenne $\underline{\overline{U}} = \overline{u}(z)\,\underline{e}_x$ satisfait les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - g - \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'w'}\right) \ . \end{aligned} \qquad (\mathbf{3}.17)$$

On note τ la contrainte tangentielle $\tau(z) = \rho\left(\nu\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right)$ et $\tau_* = \tau(0)$ sa valeur en $z = 0$. On a donc $0 = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau}{\partial z}$. Comme $\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = -G$ est constant $\frac{\partial \tau}{\partial z} = -G$ l'est aussi. On en déduit la relation

$$\tau(z) = \tau_* - G\,z \ , \qquad (\mathbf{3}.18)$$

où $\tau_* = \tau(0)$ est pour l'instant inconnu. On note u_* la "vitesse de frottement" définie par $\tau_* = \rho\,u_*^2$. Le modèle de longueur de mélange $\overline{u'w'} = -l_m^2\,|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$ conduit alors à

$$\left(\nu + l_m^2\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 - \frac{G}{\rho}\,z \ . \qquad (\mathbf{3}.19)$$

L'intégration de cette équation va permettre de déterminer le profil de vitesse $\overline{u}(z)$ dont l'expression dépend du raccordement avec les conditions aux limites du fond.

2.3 Profils logarithmiques

On suppose que $\tau(z) \sim \tau_* = \rho\,u_*^2$ est presque constant dans la couche $z \in [0, R]$, et que donc $R \ll \tau_*/G$. En supposant la loi $l_m = \kappa\,z$, où $\kappa = 0.41$ est la constante de Von Karman, les équations s'écrivent

$$\left(\nu + \kappa^2\,z^2\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 \ . \qquad (\mathbf{3}.20)$$

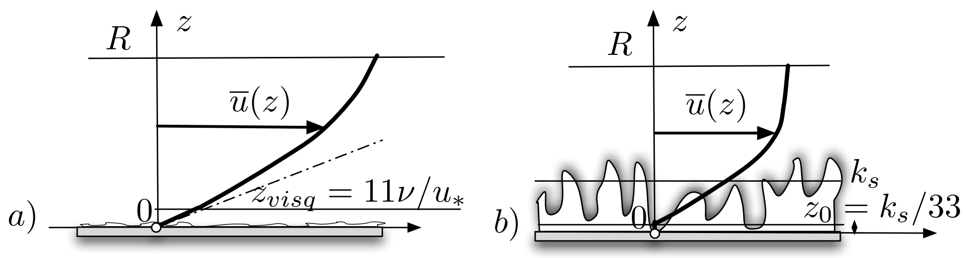

FIG. **3**.7 – *Couche limite sur un fond plat. a) Régime lisse. b) Régime rugueux.*

On dit que le fond est "lisse" s'il existe une couche limite $z \in [0, z_{vis}]$ dans laquelle la viscosité moléculaire ν est dominante par rapport à la viscosité turbulente $\nu_t = l_m \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|$. Cette hypothèse peut être traduite par $l_m = 0$ dans cette couche. Dans ce cas, les équations $\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2$ avec $\overline{u}(0) = 0$ conduisent à

$$\frac{\overline{u}(z)}{u_*} = \frac{u_*\, z}{\nu} \; . \tag{3.21}$$

On dit que le fond est "rugueux" s'il y a une couche $z \in [0, z_0]$ dans laquelle la vitesse $u(z)$ est nulle. Si k_s est la hauteur moyenne des rugosités, les observations expérimentales montrent que

$$z_0 = k_s/33 \; . \tag{3.22}$$

La nature "lisse" ou "rugueuse" du fond dépend de k_s et ν mais aussi de l'écoulement turbulent à travers sa vitesse de frottement u_*. En effet, les observations expérimentales montrent que les critères pour les régimes lisses et rugueux sont respectivement

$$\frac{u_*\, k_s}{\nu} < 5 \qquad , \qquad \frac{u_*\, k_s}{\nu} > 70 \; . \tag{3.23}$$

Quand le nombre sans dimension $u_*\, k_s/\nu$ est entre 5 et 70, le régime n'est ni lisse ni rugueux et l'analyse de couche limite est plus complexe.

Quand z est suffisamment grand, la viscosité moléculaire ν est négligeable en face de la viscosité turbulente et l'équation s'écrit

$$\kappa^2\, z^2 \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 \; . \tag{3.24}$$

Dans ce cas, le profil de vitesse s'écrit

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + \zeta \ , \tag{3.25}$$

où les constantes δ et ζ représentent en fait une seule constante d'intégration $-\frac{1}{\kappa}\ln\delta + \zeta$ qui est le seul degré de liberté de la famille de profils de vitesse.

Quand le fond est lisse, les observations expérimentales montrent que le profil logarithmique se raccorde avec le profil visqueux en z_{vis} défini par

$$z_{vis} = 11\ \frac{\nu}{u_*} \ . \tag{3.26}$$

Le profil de vitesse de cette couche logarithmique est donc

$$\frac{\overline{u}_{sth}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ \ln\left(\frac{u_*\, z}{\nu}\right) + 5.2 = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\delta_{sth}}\right) + \zeta_{sth} \ , \tag{3.27}$$

avec $\delta_{sth} = \nu/u_*$ et $\zeta_{sth} = 11 - \ln(11)/\kappa = 5.2$.

Quand le fond est rugueux, les observations expérimentales montrent que ce profil logarithmique se raccorde avec le profil nul en z_0 avec $k_s = 33\, z_0$. Le profil de vitesse de la couche logarithmique est donc

$$\frac{\overline{u}_{rgh}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ \ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\delta_{rgh}}\right) + \zeta_{rgh} \ , \tag{3.28}$$

avec $\delta_{rgh} = k_s$ et $\zeta_{rgh} = \ln(33)/\kappa = 8.5$.

3 Diagramme de Moody

En moyennant les profils de vitesses logarithmiques que nous avons déterminés sur la couche d'épaisseur $R \ll \tau_*/G$, on peut relier la force de frottement à la vitesse moyenne de l'écoulement. Le diagramme de Moody étend cette relation au cas des parois dont la nature est intermédiaire entre les cas limites lisse et rugueux. En reliant les forces de frottement à la perte de charge linéique dans une conduite, on obtient un modèle utile pour les applications que l'on peut compléter par la paramétrisation des pertes de charges singulières.

3.1 Frottement moyen

Nous considérons le profil de vitesse $\overline{u}(z)/u_* = \frac{1}{\kappa}\ln(z/\delta) + \zeta$, avec $(\delta, \zeta) = (\delta_{sth}, \zeta_{sth})$ dans le cas lisse et $(\delta, \zeta) = (\delta_{rgh}, \zeta_{rgh})$ dans le cas rugueux. Nous définissons alors la vitesse moyenne de la couche $z \in [0, R]$ par la relation $U = \frac{1}{R}\int_0^R \overline{u}\, dz$.

Si z_{vis}/R, dans le cas lisse, et z_0/R, dans le cas rugueux, sont suffisament petits, on peut écrire

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{\overline{u}}{u_*}\, dz = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{R}{\delta}\right) + \zeta - \frac{1}{\kappa} \,, \qquad (\mathbf{3}.29)$$

en négligeant l'intégrale sur $[0, z_{vis}]$ dans le cas lisse et $[0, z_0]$ dans le cas rugueux ainsi que la primitive $(z/\delta)\ \ln(z/\delta) - (z/\delta)$ de la fonction $\ln(z/\delta)$ respectivement en $z = z_{vis}$ et $z = z_0$.

Pour les applications pratiques, il est utile de regarder la relation entre la vitesse moyenne U et la contrainte tangentielle τ_*. Une analyse dimensionnelle conduit à la relation $\tau_* = \frac{1}{2}\, C_f\, \rho\, U^2$ où C_f est un coefficient sans dimension, appellé "coefficient de trainée", qui peut dépendre de U, R où d'autres paramètres de l'écoulement comme ν ou k_s.

Très souvent, le "coefficient de frottement" λ, défini par la relation $\lambda = 4\ C_f$ est préféré. En utilisant la définition de la vitesse de frottement u_* de la relation $\tau_* = \rho\, u_*^2$, la relation entre τ_* et U, ou, de manière équivalente, entre u_* et U, s'écrit

$$\tau_* = \frac{1}{8}\,\lambda\,\rho\, U^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \,. \qquad (\mathbf{3}.30)$$

Il est aussi courant de définir le "diamètre hydraulique" $D_H = 4\ R$ associé au domaine considéré $z \in [0, R]$. Avec ces définitions, la relation entre le coefficient de frottement λ et la vitesse U s'écrit maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a\ \log_{10}\left(\frac{D_H}{\delta}\right) + b \,, \qquad (\mathbf{3}.31)$$

où $a = \ln(10)/(\kappa\sqrt{8}) = 2.0$ et $b = [\zeta - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8}$.

En utilisant l'expression $(\delta_{rgh}, \zeta_{rgh}) = (k_s, 8.5)$ pour le régime rugueux et $(\delta_{sth}, \zeta_{sth}) = (\nu/u_*, 5.2)$ pour le régime lisse, les coefficients de frottement des deux régimes s'écrivent respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ru}}} = -2.0\ \log_{10}\left(\frac{Ru}{\alpha_f}\right) \,, \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} \qquad (\mathbf{3}.32)$$

avec $2.0\ \log_{10}(\alpha_f) = b_{rgh} = [\zeta_{rgh} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = 0.9$ et

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{sth}}} = -2.0\ \log_{10}\left(\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda_{sth}}}\right) \ , \quad Re = \frac{U\,D_H}{\nu}, \tag{3.33}$$

avec $2.0\ \log_{10}\left(\beta_f/\sqrt{8}\right) = -b_{sth} = -[\zeta_{sth} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = 0.2$. Le nombre de Reynolds Re et le nombre Ru sont deux nombres sans dimension. Les valeurs numériques des coefficients issus de cette analyse sont $(\alpha_f, \beta_f) = (2.8, 3.6)$.

Contrairement à $\kappa = 0.41$ et donc $a = 2.0$, les coefficients (α_f, β_f) dépendent de la géométrie de l'écoulement qui peut être confiné dans un tuyau de section quelconque ou comporter une surface libre dans un canal de section quelconque. Il convient d'estimer ces coefficients par des modèles du type de celui que nous venons de présenter pour le cas d'un fond plat ou de les mesurer expérimentalement. Des valeurs typiques sont $\alpha_f \in [2, 4]$ et $\beta_f \in [0, 6]$.

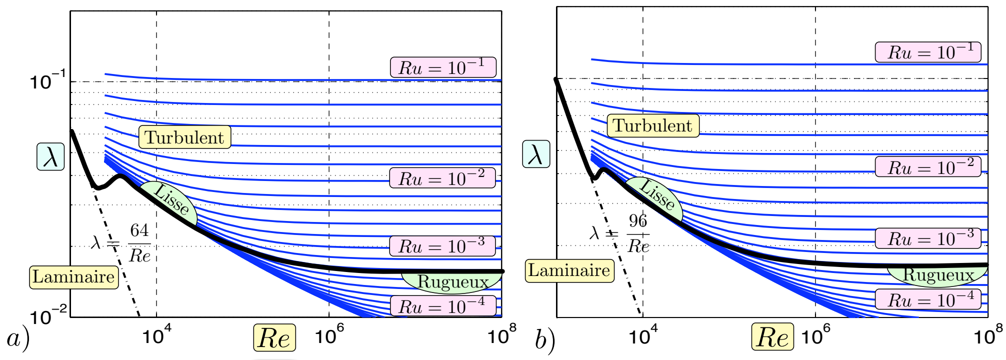

FIG. **3**.8 – *Diagramme de Moody pour la formule de Colebrook. a) Écoulements en charge avec* $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$. *b) Écoulements à surface libre avec* $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$.

Pour les "régimes intermédiaires", qui ne sont ni lisses ni rugueux et dans le cas de géométries quelconques, les formules obtenues pour des fonds plats lisses ou rugueux sont complétées par la formule de Colebrook qui s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0\ \log_{10}\left(\frac{Ru}{\alpha_f} + \frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \ . \tag{3.34}$$

Pour les écoulements en charge dans des tuyaux, le choix $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$ est très courant. Dans ce dernier cas, la formule de Haaland $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log_{10}\left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{Ru}{3.7}\right)^{1.11}\right]$, qui à l'avantage d'être explicite, ne diffère que de 2% de celle de Colebrook.

Un choix courant de jeu de valeurs pour les écoulements à surface libre est $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$, particulièrement valide pour des canaux à sections trapèzoïdoales. Le choix $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 3.4)$ est préféré pour de larges sections.

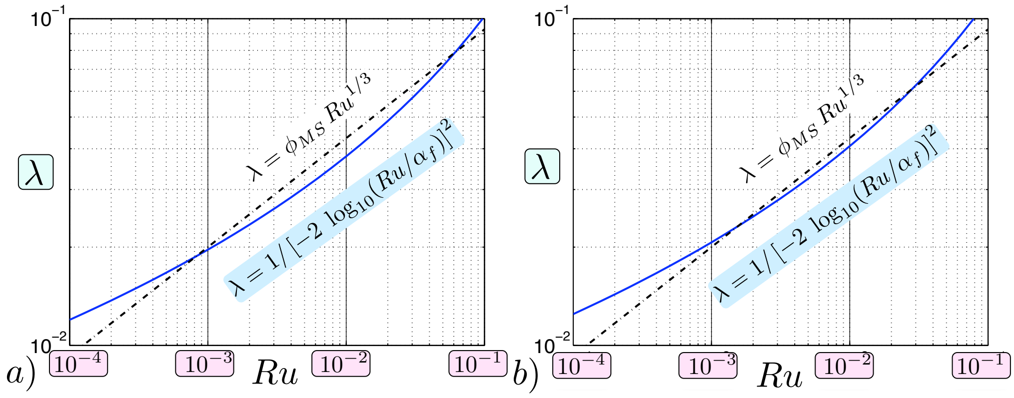

FIG. **3**.9 – *Comparaison entre la fonction $\lambda(Ru)$ de la formule de Colebrook aux larges Re et la paramétrisation de Manning- Strickler $\lambda = \phi_{MS}\, Ru^{1/3}$ avec $\phi_{MS} = 0.2$. a) $\alpha_f = 3.7$ (hydraulique en charge), b) $\alpha_f = 3$ (hydraulique à surface libre).*

La dépendance de $\lambda(Re, Ru)$ vis-à-vis de Re et Ru constitue le "diagramme de Moody" que représente la figure **3**.8. À bas Reynolds, quand l'écoulement est laminaire, on obtient la relation analytique $\lambda = 64/Re$ pour l'écoulement de Poiseuille circulaire et $\lambda = 96/Re$ pour l'écoulement de Poiseuille sur un plan incliné. Entre le régime laminaire et le régime turbulent, un "régime transitionnel" est observé avec un coefficient de frottement λ qui peut croître sur un court intervalle avec Re pour un Ru fixé.

Les régimes rugueux sont obtenus dans la limite des grands nombres de Reynolds Re tels que λ ne dépend que de Ru. La fonction $\lambda(Ru)$ pour des Re infinis est représentée sur la figure **3**.9 pour $\alpha_f = 3.7$ (hydraulique en charge) et $\alpha_f = 3$ (hydraulique à surface libre). Pour les valeurs $Ru \in [10^{-4}, 10^{-1}]$

qui sont courantes dans les applications pratiques, cette fonction peut être remplacée par la paramétrisation de Manning-Strickler $\lambda = \phi_{MS}\, Ru^{1/3}$, où la valeur $\phi_{MS} = 0.2$ peut être choisie pour les deux valeurs de α_f considérées.

3.2 Hydraulique en charge

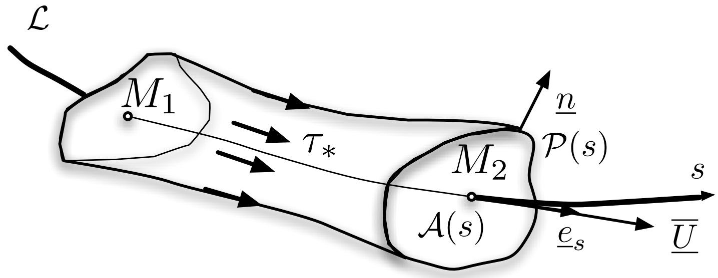

FIG. **3**.10 – *Écoulement dans une conduite.*

L'utilisation des diagrammes de Moody est très répandue pour modéliser les écoulements en charge dans des conduites. On écrit tout d'abord les équations de Navier-Stokes incompressibles et turbulentes sous la forme

$$\mathrm{div}\,\overline{\underline{U}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \overline{\underline{U}}}{\partial t} + \overline{\underline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\,\overline{\underline{U}} = -\frac{1}{\rho}\underline{\mathrm{grad}}\,\overline{p} - \underline{\mathrm{grad}}\,(g\,z) + \frac{1}{\rho}\,\underline{\mathrm{div}}\,\overline{\underline{\underline{\tau}}}\,, \quad (\mathbf{3}.35)$$

où $\overline{\underline{\underline{\tau}}} = \rho(2\,\nu\,\overline{\underline{\underline{d}}} - \underline{\underline{R}})$ et $\overline{\underline{\underline{d}}}$ sont respectivement les moyennes de Reynolds du tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes et du tenseur de taux de déformations. On considère une ligne de courant $\mathcal{L}$ qui va d'un point M_1 vers un point M_2. En utilisant l'identité $\overline{\underline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\,\overline{\underline{U}} = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{grad}}\,\overline{\underline{U}}^2 + \underline{\mathrm{rot}}\,\overline{\underline{U}} \wedge \overline{\underline{U}}$, on montre "la relation de Bernoulli"

$$H(M_2) - H(M_1) = \int_{\mathcal{L}} \underline{\mathrm{grad}}\,H \cdot \underline{dM} = -\int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g}\frac{\partial \overline{\underline{U}}}{\partial t} + \overline{\underline{J}} \right) \cdot \underline{dM}\,, \quad (\mathbf{3}.36)$$

où $\overline{\underline{J}} = -\frac{1}{\rho\,g}\,\underline{\mathrm{div}}\,(\overline{\underline{\underline{\tau}}})$ et où H est la "charge hydraulique" définie par la relation

$$H(\underline{x},t) = \frac{\overline{p}}{\rho\,g} + z + \frac{1}{2\,g}\overline{\underline{U}}^2\,. \quad (\mathbf{3}.37)$$

Le terme $\frac{1}{g}\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}$ est la perte de charge linéique due à l'instationnarité de l'écoulement tandis que $\underline{\overline{J}}$ est la perte de charge linéique due aux frottements visqueux ou turbulents.

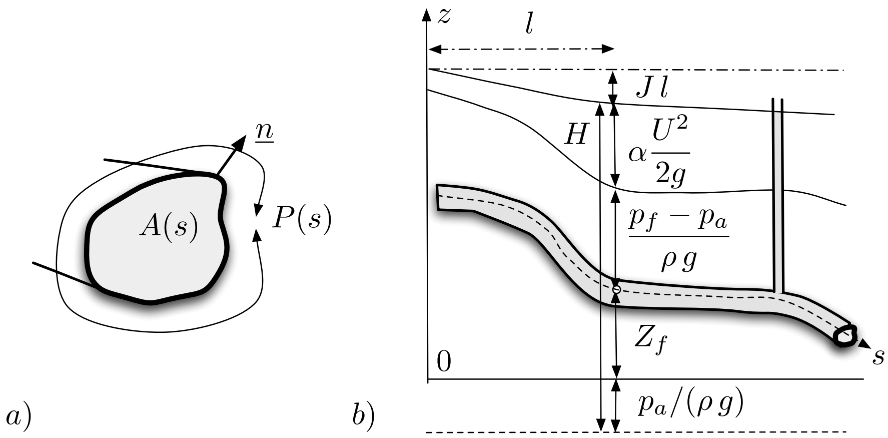

FIG. **3**.11 – *Écoulement en charge dans une conduite. a) Section A et périmètre mouillé P. b) Représentation de la charge moyenne H_{charge} où p_a est la pression atmosphérique.*

Pour les écoulements fluides remplissant tout le volume d'une conduite, appelés "écoulements en charge", on définit le rayon hydraulique $R_H(s) = A(s)/P(s)$ comme étant le rapport entre l'aire $A(s)$ de la section $\mathcal{A}(s)$ et le "périmètre mouillé" $P(s)$ de sa frontière $\mathcal{P}(s)$ (voir figure **3**.11a). On note $z = Z_f(s)$ l'équation de l'axe $\mathcal{L}$ de la conduite et $p_f(s)$ la pression moyenne sur cet axe.

Dans beaucoup de situations, on constate que la pression est hydrostatique en moyenne de Reynolds. Dans ce cas, la quantité $\frac{\overline{p}}{\rho\, g} + z = \frac{p_f}{\rho\, g} + Z_f$ est constante dans la section normale à l'axe. La charge hydraulique moyennée sur une telle section s'écrit alors

$$H(s) = \frac{p_f(s)}{\rho\, g} + Z_f(s) + \alpha(s)\,\frac{U^2(s)}{2\, g}\ . \qquad (\mathbf{3}.38)$$

où la vitesse moyenne $U(s)$ et le coefficient $\alpha(s)$ sont définis par les relations

$$U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{\overline{U}} \cdot \underline{e}_s\, dS \quad , \qquad \alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)}\,\frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{U}^2\, dS\ . \quad (\mathbf{3}.39)$$

On définit la perte de charge linéique moyenne $J(s)$ due aux frottements par la relation

$$J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{\overline{J}} \cdot \underline{e}_s \, dS = -\frac{1}{\rho\, g} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{\mathrm{div}\, \underline{\underline{\overline{\tau}}}} \cdot \underline{e}_s \, dS \, . \qquad (\mathbf{3}.40)$$

On définit ensuite la contrainte de cisaillement moyenne $\tau_*(s)$ exercée par le fluide sur la paroi par la relation

$$\tau_*(s) = -\frac{1}{P(s)} \int_{\mathcal{P}(s)} \underline{e}_s \cdot \underline{\underline{\overline{\tau}}} \cdot \underline{n} \, dl \, , \qquad (\mathbf{3}.41)$$

où $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi de la conduite dirigé vers l'extérieur.

On suppose maintenant que la turbulence de l'écoulement est stationnaire et pleinement développée et que la forme de la conduite change lentement en fonction de s (écoulement graduellement varié).

On constate alors que le profil de vitesse $\underline{\overline{U}}$ est presque plat, si bien que le coefficient $\alpha(s)$ est proche de la valeur $\alpha = 1$ et que le vecteur unitaire $\underline{e}_s$ est presque constant sur une section $\mathcal{A}(s)$. L'hypothèse "d'écoulement graduellement varié" entraîne, en particulier, que $\frac{\partial}{\partial s}(\underline{e}_s \cdot \underline{\underline{\overline{\tau}}} \cdot \underline{e}_s)$ est négligeable. L'application du théorème de la divergence sur une petite portion de conduite entraine alors à l'importante relation

$$\tau_*(s) = \rho\, g\, R_H(s)\, J(s) \, . \qquad (\mathbf{3}.42)$$

La paramétrisation du frottement moyen $\tau_*(s)$ en fonction de $U(s)$, $D_H(s)$, $Re(s) = U(s) D_H(s)/\nu$ et $Ru(s) = k_s/D_H(s)$ équivaut donc à la paramétrisation de la perte de charge linéique moyenne $J(s)$.

Pour des écoulements stationnaires ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulents ($\alpha \sim 1$) et graduellement varié ($\tau_s = \rho\, g\, R_H\, J$) on peut donc écrire

$$H = \frac{p_f}{\rho\, g} + Z_f + \frac{U^2}{2g} \quad , \qquad \frac{dH}{ds} = -J \quad , \qquad J = \lambda(Re, Ru)\, \frac{U^2}{2\, g\, D_H} \, . \quad (\mathbf{3}.43)$$

Ces relations, où λ est issu du diagramme de Moody, constituent le premier pas pour un calcul de pertes de charges dans un réseau en charge.

3.3 Pertes de charge singulières

Pour calculer les pertes de charges dans un réseau, il faut aussi prendre en compte, en plus des portions de conduites lentement variables en espace, des singularités comme les élargissements brusques, les coudes ou encore les jonctions. La charge y subit une diminution brusque que l'on modélise par une perte de charge singulière et que l'on doit paramétrer pour chaque géométrie. On exprime souvent la perte de charge singulière sous la forme

$$\Delta H = K_g \, \frac{U^2}{2\, g} = K_g \, \frac{Q^2}{2\, g\, A^2} \ , \tag{3.44}$$

où U et A sont respectivement la vitesse et la section en amont de la singularité, K_g le coefficient de perte de charge singulière et $Q = U\, A$ le débit.

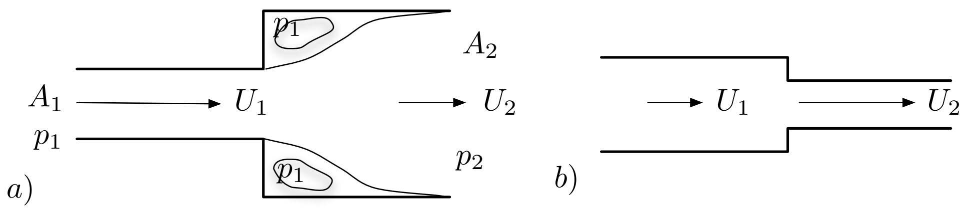

FIG. **3**.12 – *a) Perte de charge singulière dans un élargissement brusque. b) Pas de perte de charge singulière dans un rétrécissement.*

Dans le cas d'un élargissement brusque, on peut donner une estimation de la perte de charge singulière en supposant que la pression du fluide dans la zone de recirculation est approximativement égale à la pression d'entrée p_1. Dans ce cas, un bilan global de quantité de mouvement (théorème d'Euler) sur un domaine englobant la singularité conduit à

$$\rho\, U_1^2\, A_1 + p_1\, A_2 = \rho\, U_2^2\, A_2 + p_2\, A_2 \ . \tag{3.45}$$

On en déduit la perte de charge singulière

$$\Delta H = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2\, g} = K_g \, \frac{U_1^2}{2\, g} \qquad \text{avec} \qquad K_g = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \ . \tag{3.46}$$

Dans le cas d'un rétrécissement de section, on peut considérer que la perte de charge singulière est négligeable.

Dans le cas d'un coude de rayon de courbure ρ_c et de déviation φ, on peut utiliser la formule $K_g = \frac{\varphi}{\pi/2}\left[0.131 + 1.847\left(\frac{2\rho_c}{D_H}\right)^{-3.5}\right]$ pour le coefficient de perte de charge singulière.

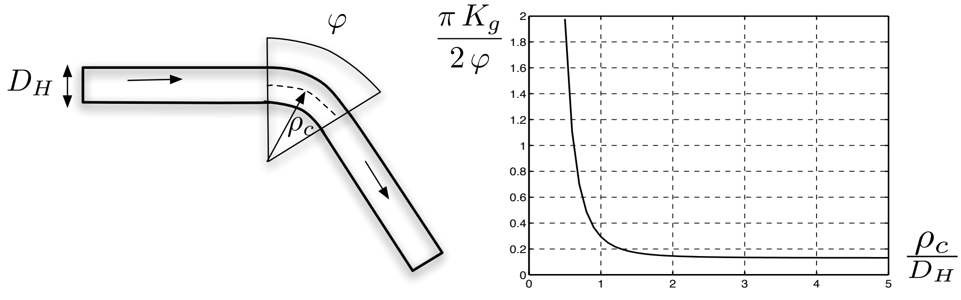

FIG. **3**.13 – *Perte de charge singulière dans un coude.*

FORMULAIRE

Modélisation turbulente

Moyenne et fluctuations :

$$B = \overline{B} + B' \,, \qquad \underline{U} = \underline{\overline{U}} + \underline{U}' \,.$$

Diffusion turbulente :

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \underline{\overline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \overline{B} = k_B\, \Delta \overline{B} - \mathrm{div}\,(\overline{\underline{U}'\, B'}) \,, \quad \underline{F}_{Bt} = \overline{\underline{U}'\, B'} = -k_{Bt}\, \underline{\mathrm{grad}}\, \overline{B} \,.$$

Tenseur de Reynolds :

$$\mathrm{div}\, \underline{\overline{U}} = 0 \,, \quad \frac{\partial}{\partial t}\underline{\overline{U}} + \underline{\overline{U}} \cdot \underline{\mathrm{grad}}\, \underline{\overline{U}} = -\frac{1}{\rho}\underline{\mathrm{grad}}\, \overline{p} - \underline{\mathrm{grad}}\,(g\, z) + \nu\, \Delta \underline{\overline{U}} - \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{R}} \,.$$

Viscosité turbulente :

$$R_{ij} = \overline{U_i' U_j'} = -2\,\nu_t\,\overline{d}_{ij} + \frac{2}{3}\,k\,\delta_{ij}\ , \qquad k = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \underline{\underline{R}} = \frac{1}{2}\left(\overline{U_1'^2} + \overline{U_2'^2} + \overline{U_3^2}\right)\ .$$

Profils de vitesses

Longueur de mélange :

$$\nu_t = l_m^2\,\sqrt{2\,\underline{\underline{\overline{d}}} : \underline{\underline{\overline{d}}}}\ .$$

Écoulement parallèle :

$$\overline{u'w'} = -\nu_t\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\ , \quad \nu_t = l_m^2\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|\ .$$

Loi de Von Karman :

$$l_m = \kappa\,z \qquad , \qquad \kappa = 0.41\ .$$

Fond plat :

$$\tau(z) = \rho\left(\nu + \kappa^2\,z^2\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right|\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \tau_* - G\,z \sim \tau_*\ , \qquad \tau_* = \rho\,u_*^2\ .$$

Lisse ou rugueux :

$$\frac{u_*\,k_s}{\nu} < 5\ , \quad z_{vis} = 11\,\frac{\nu}{u_*}\ , \qquad \frac{u_*\,k_s}{\nu} > 70\ , \quad z_0 = k_s/33\ .$$

$$\frac{\overline{u}_{sth}}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\,\ln\left(\frac{u_*\,z}{\nu}\right) + 5.2\ , \qquad \frac{\overline{u}_{rgh}}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\,\ln\left(\frac{z}{k_s}\right) + 8.5\ .$$

Diagramme de Moody

Coefficients de frottement :

$$\boxed{\tau_* = \frac{1}{2}\, C_f\, \rho\, U^2 = \frac{1}{8}\, \lambda\, \rho\, U^2 \; .}$$

Fond lisse :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{sth}}} = -2.0\, \log_{10}\left(\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \quad , \quad Re = \frac{U\, D_H}{\nu} \; .}$$

Fond rugueux :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{rgh}}} = -2.0\, \log_{10}\left(\frac{Ru}{\alpha_f}\right) \quad , \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} \; .}$$

Formule de Colebrook :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0\, \log_{10}\left(\frac{Ru}{\alpha_f} + \frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \; .}$$

Hydraulique en charge

Charge hydraulique moyenne :

$$\boxed{H(s) = \frac{p_f(s)}{\rho\, g} + Z_f(s) + \alpha(s)\, \frac{U^2(s)}{2\, g} \; .}$$

Écoulement stationnaire :

$$\boxed{\frac{dH}{ds} = -J \quad \text{avec} \quad H = \frac{p_f}{\rho\, g} + Z_f + \frac{U^2}{2g} \quad , \quad J = \lambda(Re, Ru)\, \frac{U^2}{2\, g\, D_H} \; .}$$

Écoulement graduellement varié :

$$\boxed{\tau_*(s) = \rho\, g\, R_H(s)\, J(s)\ .}$$

Perte de charge singulière :

$$\boxed{\Delta H = K_g\, \frac{U^2}{2\, g} = K_g\, \frac{Q^2}{2\, g\, A^2}\ .}$$

EXERCICES

EXERCICE 3.1 Dégazage en mer

Un pétrolier largue en mer $M = 10$ tonnes de résidus d'hydrocarbures. Il maintient sa vitesse de croisière dans la direction x et déverse cette pollution sur une longueur $L = 1$ km (voir figure **3**.14).

Le polluant, plus léger que l'eau de la mer, reste en surface, et l'on suppose donc qu'il est advecté par un champ 2D turbulent $\underline{U}(x, y, t) = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ de moyenne $\overline{\underline{U}}$ et de divergence div $\underline{U}$ nulles. On note $C = \overline{C} + C'$ la décomposition en moyenne et fluctuations turbulentes de la concentration surfacique $C(x, y, t)$. On modélise l'advection du scalaire passif par cette turbulence à l'aide d'un coefficient de diffusivité turbulente k_{Ct} que l'on suppose constant et égal à $k_{Ct} = 10^{-2}$ m^2/s. On note $k = k_C + k_{Ct}$ et on suppose que la diffusivité moléculaire k_C du polluant est très petite devant k_{Ct}.

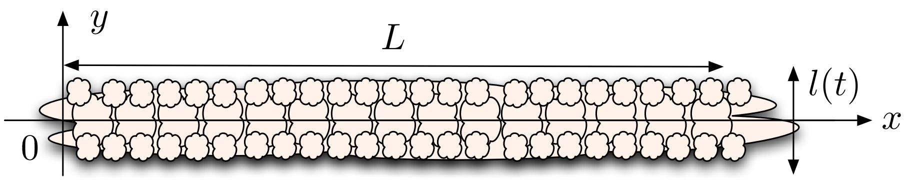

Fig. **3**.14 – Croissance d'une panache de pollution 1D

À $t = t_0$, on suppose que la concentration surfacique (kg/m^2) moyenne du polluant peut être modélisée par le profil $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$ avec $\overline{C}_0(y) =$

$C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2\,l_0^2}\right)$ et l_0=1 m. Cette modélisation 1D est justifiée par le fait que l_0 est petit devant L. On souhaite calculer l'évolution de la concentration moyenne $\overline{C}(y,t)$ que l'on suppose donc indépendante de x sur le domaine d'étude considéré.

1) Exprimer C_m en fonction de M et l_0 et indiquer sa valeur numérique. Écrire l'équation d'advection-diffusion de C. Moyenner cette équation. En déduire l'équation de diffusion turbulente qui régit $\overline{C}(y,t)$.

On doit avoir $M = L \int_{-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2\,l_0^2}\right)\ dy = \sqrt{2\,\pi}\ C_m\, L\, l_0$ d'où $C_m = M/(\sqrt{2\,\pi}\, L\, l_0) \sim 4$ kg/m^2. La moyenne de l'équation $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U}\cdot \underline{\mathrm{grad}}\ \underline{U} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\underline{U}\, C) = k_C\,(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2})$ s'écrit $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'\,C'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'\,C'}) = k_C\,\left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}\right)$. Comme $\underline{C}(y,t)$ ne dépend par de x, la modélisation du flux turbulent $\underline{F}_{Ct} = \overline{\underline{U}'\,C'} = -k_{Ct}\,\underline{\mathrm{grad}}\ \underline{C}$ conduit à $\overline{u'\,C'} = 0$ et $\overline{v'\,C'} = -k_{Ct}\,\frac{\partial \overline{C}}{\partial y}$. L'équation de diffusion turbulente s'écrit donc $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = (k_C + k_{Ct})\,\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} = k\,\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$.

2) Montrer que $\overline{C}(y,t) = C_m \frac{l_0}{l(t)} \exp\left[-\frac{y^2}{2\,l^2(t)}\right]$ est solution de l'équation de diffusion turbulente lorsque $l^2(t) = 2\,k\,t$. On pourra poser $\overline{C} = A(t)\,\exp[-\varphi(y,t)]$. Comment choisir l'origine des temps, à travers la valeur de t_0, pour que cette solution vérifie la condition initiale $\overline{C}(y,t_0) = \overline{C}_0(y)$. En déduire le temps T au bout duquel le maximum de concentration $\overline{C}(y,T)$ est en-dessous du seuil de détection $C_d = 0.2$ kg/m^2 du polluant par les satellites, valable uniquement de jour. Est-il possible de dégazer de nuit, sans être détecté de jour ?

En reportant dans l'équation $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$, on obtient $A'(t) - A(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(y,t) = k\,A(t)\left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]$. Si $A(t) = C_m\,\frac{l_0}{\sqrt{2\,k\,t}}$ et $\varphi(y,t) = \frac{y^2}{4\,k\,t}$, l'équation s'écrit $-\frac{l_0}{2\,t\,\sqrt{2\,k\,t}} + \frac{l_0}{\sqrt{2\,k\,t}}\,\frac{y^2}{4\,k\,t^2} = k\,\frac{l_0}{\sqrt{2\,k\,t}}\left(-\frac{1}{2\,k\,t} + \frac{y^2}{4\,k^2\,t^2}\right)$ et se trouve donc bien vérfiée. Comme $l^2(t) = 2\,k\,t$, on choisit t_0 tel que $l(t_0) = l_0$, c'est-à-dire $t_0 = l_0^2/(2\,k) = 50$ s. La concentration maximale $\overline{C}(0,t) = C_m\,l_0/l(t)$ atteint le seuil C_d lorsque $l(t)/l_0 = C_m/C_d$. Ce seuil est atteint au temps $t = t_0 + T$ tel que $l(t_0+T) = \sqrt{2\,k\,(t_0+T)} = l_0\,C_m/C_d$. On a donc $T = [l_0^2/(2\,k)]\,[(C_m/C_d)^2 - 1] \sim 2\ 10^4$ s $\sim$ 5h30. Ce temps est inférieur à la durée de la nuit. Il faut augmenter la capacité de détection des satellites.

EXERCICE 3.2 Dimensionnement d'un émissaire en mer

On cherche à dimensionner un émissaire en mer servant à évacuer une cuve d'eaux usées dont la surface libre est située à la cote $Z_{cuv} = 20\ m$, la surface libre de la mer étant située à la cote $Z_{mer} = 0$ m. On note D le diamètre de l'émissaire et d la distance de son exutoire à la côte. On suppose que l'émissaire est posé sur une bathymétrie en pente douce.

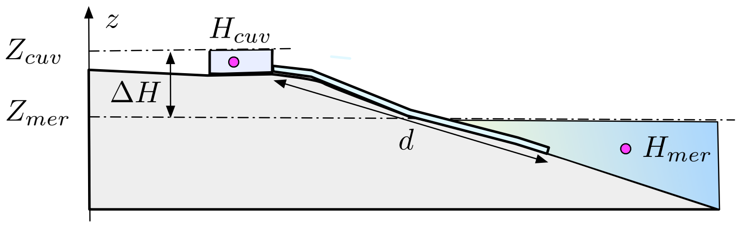

FIG. **3**.15 – Émissaire reliant une cuve à la mer.

1) En supposant que la pression atmosphérique p_a est constante, exprimer les charges H_{cuv} et H_{mer} aux cotes respectives Z_{cuv} et Z_{mer}. On suppose que, loin des extrémités du tuyau, la cuve et la mer son au repos. En déduire que la perte de charge ΔH dans l'émissaire est indépendante de son débit.

On a $H_{cuv} = Z_{cuv} + p_a/(\rho\, g)$ et $H_{mer} = Z_{mer} + p_a/(\rho\, g)$. On a donc $\Delta H = (H_{cuv} - H_{mer}) = 20$ m.

2) On suppose que $D = 20$ cm, $d = 1$ km et que la taille moyenne des rugosités de la canalisation, en fer galvanisé, est $k_s = 0.2$ mm. Déterminer le débit de l'émissaire ainsi que le nombre de Reynolds de l'écoulement en utilisant le Diagramme de Moody (figure **3**.16) ainsi que la limite rugueuse de la formule de Colebrook de l'hydraulique en charge. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

L'équilibre s'écrit $\Delta H/d = J$ avec $\Delta H/d = 0.02$ et $J = \lambda \frac{U^2}{2\, g\, D_H}$. La rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.001$ puisque $D_H = D$. On doit donc résoudre $\Delta H/d = \lambda(U, D)\, \frac{U^2}{2\, g\, D_H}$ où la dépendance de λ en fonction de U et de D est donnée par le diagramme de Moody ou la formule de Colebrook avec $Re = UD/\nu$ et $Ru = k_s/D$.

Cette équation implicite en U se résoud explicitement si l'on suppose que le Re est grand. Dans ce cas, le diagramme de Moody conduit à la valeur $\lambda = 0.02$, ce qui implique la valeur $U = \sqrt{\frac{2\,g\,D\,J}{\lambda}} \sim 2$ m/s. On en déduit $Re = \frac{U\,D}{\nu} \sim 4\;10^5$. On vérifie sur le Diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.02$ est valide pour cette valeur du nombre de Reynolds et l'on voit que le rapport entre $\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}$ et Ru/α_f est d'environ 0.17 dans la formule de Colebrook avec $\alpha_f = 3.7$ et $\beta_f = 2.51$. On peut donc négliger le premier terme et calculer $\lambda = \left[-2\,\log_{10}\left(Ru/\alpha_f\right)\right]^{-1/2} \sim 0.02$. La formule de Haaland conduit au même résultat à quelque pourcents près. Le débit est $Q = \pi\,D^2\,U/4 \sim 0.06$ m^3/s.

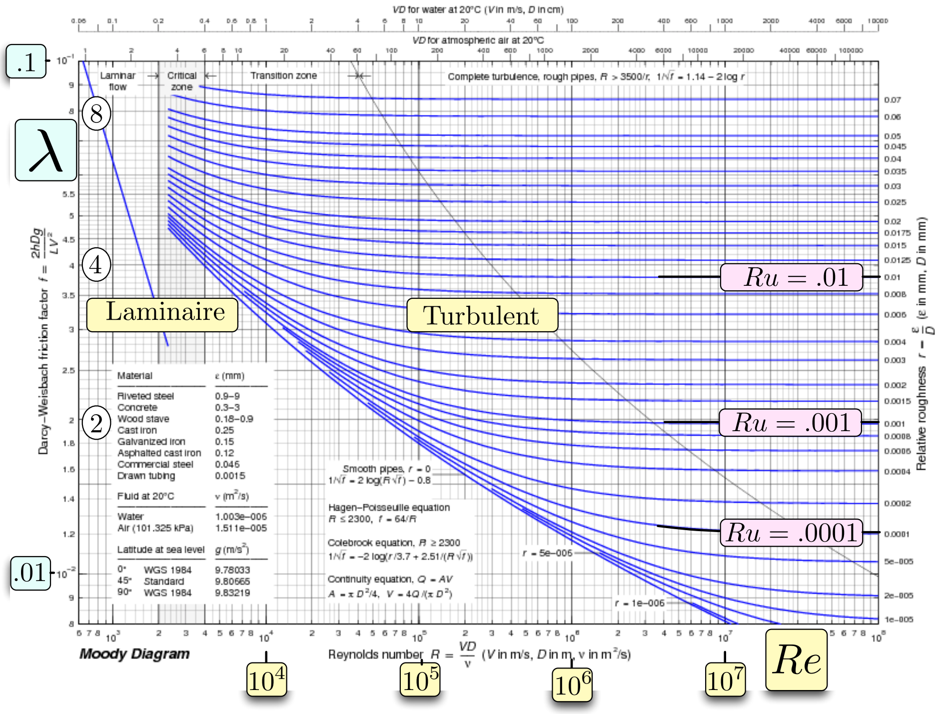

FIG. **3**.16 – Diagramme de Moody. Coefficient de frottement λ en fonction de Re pour différentes valeurs de Ru. Diagramme de Tom Davis.

3) Reprendre le calcul avec une canalisation de diamètre $D = 1$ m, en béton grossier, avec $k_s = 1$ cm.

On a toujours $J = \Delta H/d = 0.02$ mais la rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.01$. Le diagramme de Moody indique alors la valeur $\lambda = 0.04$. On en déduit $U = \sqrt{\frac{2\,g\,D\,J}{\lambda}} \sim 3.2$ m/s et $Re = \frac{U\,D}{\nu} \sim 2.2\ 10^6$. On vérifie sur le diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.04$ est valide. Le débit devient $Q = \pi\,D^2\,U/2 \sim 5$ m^3/s.

EXERCICE 3.3 Conduites d'une usine hydroélectrique

Une conduite en charge de longueur $d = 6$ km relie un lac situé à une cote $z = Z_l$ au-dessus d'une usine hydroélectrique située à un cote $z = Z_u$. On suppose que le dénivelé est $h = Z_l - Z_u = 300$ m. Le tuyau est en acier galvanisé avec $k_s = 1$ mm. Son diamètre est $D = 2$ m. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

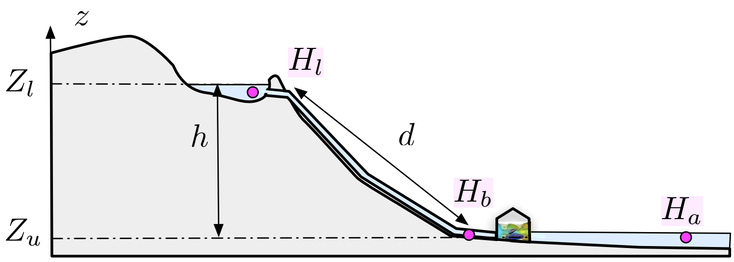

FIG. **3**.17 – Lac, conduite forcée et usine hydroélectrique. Charges hydrauliques H_l, H_b et H_a en trois points.

1) On suppose que la vitesse dans la conduite est $U = 1$ cm/s. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Déterminer le coefficient de perte de charge λ. Calculer la perte de charge linéique.

Le nombre de Reynolds est $Re = UD/\nu = 2\ 10^4$. Comme on a $Ru = 5\ 10^{-4}$, on est en régime lisse. Le Diagramme de Moody conduit alors à la valeur $\lambda \sim 0.025$. On en déduit $J = \lambda \frac{U^2}{2\,g\,D} \sim 6\ 10^{-8}$.

2) Exprimer la charge H_l du lac en notant p_a la pression atmosphérique. On note H_b la charge au bas de la conduite, juste avant l'usine. Exprimer H_b en fonction de H_l, de la vitesse U dans la conduite et de ses caractéristiques. Que vaut H_b si $U = 0$? Calculer la vitesse U_m lorsque $H_b = H_a$ où $H_a = Z_u + \frac{p_a}{gh}$ est la charge du lac artificiel situé en aval de

l'usine. Vérifier que le régime est rugueux. Comparer l'ordre de grandeur du terme $\frac{U^2}{2g}$ à la perte de charge totale.

On a $H_l = \frac{p_a}{\rho\, g} + Z_l$. La charge H_b vérifie $H_l = H_b + J\, d$ avec $J = \lambda(Re, Ru)\, \frac{U^2}{2\, g\, D_H}$. On a donc $H_b = H_l$ pour $U = 0$. Comme $Ru = 0.0005$, on lit, sur le diagramme de Moody, la valeur $\lambda \sim 1.7\ 10^{-2}$ en supposant que Re est grand. On a $-\frac{dH}{ds} = \frac{H_l - H_b}{d} = \frac{h}{d} \sim 0.05$. Comme la perte de charge due au frottement est $J = \lambda\, \frac{U_m^2}{2\, g\, D}$ et que $\frac{dH}{ds} = -J$ on en déduit $U_m = \sqrt{\frac{2\, g\, D\, h}{\lambda\, d}} \sim 11$ m/s. Comme $Re = U_m\, D/\nu = 22\ 10^6$, on vérifie que l'on est bien en régime rugueux. Le terme $U_m^2/(2\, g) \sim 6$ m est petit devant la perte de charge $H_l - H_b = 300$ m.

FIG. **3**.18 – Conduites forcées et centrale hydroélectrique.

3) La puissance récupérable par l'usine est $P = \beta\, \rho\, g\, (H_b - H_a)\, Q$ où H_b est la charge en bas de la conduite, $H_a = Z_u + \frac{p_a}{gh}$ est la charge dans le lac artificiel situé en aval de l'usine, $\beta = 0.8$ est le rendement des turbines et Q le débit. Calculer le débit qui optimise la puissance produite par la centrale. Que vaut cette puissance ? Vérifier que ce débit correspond à un régime rugueux.

La perte de charge dans la conduite est $H_l - H_b = J\, d$. Comme $H_l = H_a + h$, on a donc $H_b - H_a = h - J\, d$. La vitesse est reliée à la perte de charge par la relation $J = \lambda\, \frac{U^2}{2\, g\, D}$. On suppose que le régime est rugueux et que donc $\lambda \sim 1.7\ 10^{-2}$ est indépendant de U. Le débit est $Q = \frac{\pi\, D^2}{4}\, U$. La puissance récupérable s'écrit donc $P = \beta\, \rho\, g\, \left(h - \frac{\lambda\, d}{2\, g\, D}\, U^2\right)\, \frac{\pi\, D^2}{4}\, U$.

En dérivant cette expression par rapport à U, on voit que le maximum de puissance est atteint pour $J\,d = h/3$, c'est-à-dire pour une perte de charge égale au tiers de la charge disponible. On en déduit que $\frac{\lambda\,d}{2\,g\,D}\,U^2 = h/3$ et donc $U = \sqrt{\frac{2\,g\,h\,D}{3\,d\,\lambda}} \sim 6.3$ m/s. Le débit est alors $Q \sim 20$ m^3/s. La puissance maximale est alors $P_{max} = \beta\,\rho\,Q\,\frac{2\,h}{3} = \beta\,\rho\,g\,\frac{\pi\,D^2}{4}\,U\,\frac{2\,h}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{6}}\,\beta\,\rho\,\sqrt{g^3\,h^3\,D^5/(\lambda\,d)} \sim 3.2$ MW. Comme $Re = U\,D/\nu = 1.3\;10^7$, on est bien en régime rugueux, ce qui justifie l'hypothèse λ constant utilisée dans la dérivation de P par rapport à U.

NOTATIONS

$\mathcal{A}$	Section d'un tube ()
A	Aire d'une section (m^2)
$B(\underline{x},t)$	Champ quelconque ($[B]$)
$\overline{B}$	Champ B en moyenne macroscopique ($[B]$)
B'	Fluctuations turbulentes du champ B ($[B]$)
B''	Fluctuations microscopiques du champ B ($[B]$)
$b(t) = B(\underline{x},t)$	Signal B en un point $\underline{x}$ ($[B]$)
$\widehat{b}(\omega)$	Transformée de Fourier en temps de b ($[B]$ s)
$b(\underline{x}) = B(\underline{x},t)$	Champ B au temps t ($[B]$)
$\widehat{b}(\underline{K})$	Transformée de Fourier en espace de b ($[B]$ m^3)
C_f	Coefficient de trainée ()
C_K	Constante de Kolmogorov ()
D_H	Diamètre hydraulique $D_H = 4\,R_H$ (m)
div	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs (m^{-1})
$\underline{\text{div}}$	Divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux (m^{-1})
$\underline{\underline{d}}$	Tenseur des vitesses de déformations (s^{-1})
dK^3	Volume d'intégration dans $I\!R^3$ (m^{-3})
dS	Surface d'intégration dans $I\!R^3$ (m^2)
dx^3	Volume d'intégration dans $I\!R^3$ (m^3)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$\underline{e}_s$	Vecteur unitaire associé à la coordonnée s ()
$E_B(\omega)$	Spectre temporel d'énergie de B ($[B]^2$ s)
$E_B(K)$	Spectre spatial d'énergie de B ($[B]^2$ m^3)
$E(K)$	Spectre d'énergie du champ de vitesse m^3 s^{-2})
$\underline{F}$	Densité massique des forces extérieures de volume (N kg^{-1})
$\underline{F}_{Bt}$	Flux turbulent du champ B ($[B]$ m s^{-1})
$\underline{\text{grad}}$	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
g	Gravité (m s^{-2})
$H(\underline{x},t)$	Charge hydraulique (m)

$H(s)$	Charge hydraulique moyenne (m)
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur identité ()
$\underline{J}$	Vecteur perte de charge linéique (m^{-1})
J	Perte de charge linéique (m^{-1})
$\underline{K}$	Vecteur d'onde (m^{-1})
K_0	Nombre d'onde des grandes échelles (m^{-1})
K	Nombre d'onde $\Vert\underline{K}\Vert$ (m^{-1})
K_g	Coefficient de perte de charge singulière d'un coude ()
k_B	Diffusivité moléculaire du champ B (m^2 s^{-1})
k_{Bt}	Diffusivité turbulente du champ B (m^2 s^{-1})
k	Energie cinétique turbulente (m^2 s^{-2})
K_d	Nombre d'onde des échelles dissipatives (m^{-1})
$\mathcal{L}$	Ligne de courant ()
Ln	Logarithme népérien ()
$\log_{10}$	Logarithme décimal ()
l_m	Longueur de mélange de Prandtl (m)
l_{mol}	Libre parcours moyen des molécules (m)
M_1, M_2	Deux points de l'espace ()
p	Champ de pression (Pa)
p_a	Pression atmosphérique (Pa)
P	Périmètre mouillé (m)
Q	Débit volumique (m^3 s^{-1})
R_H	Rayon hydraulique $R_H = A/P$ (m)
R	Distance à la plaques (m)
Re	Nombre de Reynolds ()
Ru	Nombre sans dimension k_s/D_H ()
$\mathbb{R}$	Espace des nombres réels ()
$\underline{\underline{R}}$	Tenseur de Reynolds (m^2 s^2)
R_{ij}	Composantes du tenseur de Reynolds (m^2 s^2)
s	Coordonnée curviligne (m)
tr	Opérateur trace d'un tenseur ()
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
U_i	Composantes du champ $\underline{U}$ (m s^{-1})
$\underline{U} \cdot \underline{\mathrm{grad}}$	Opérateur gradient suivant $\underline{U}$ (s^{-1})
U	Vitesse moyenne dans la direction $\underline{e_x}$ (m s^{-1})
u_{mol}	Vitesse caractéristique des molécules (m)
u_*	Vitesse de frottement définie par $\tau_* = \rho\, u_*^2$ (m s^{-1})
u_{sth}	Profil logarithmique de vitesse sur paroi lisse (m s^{-1})

u_{rgh}	Profil logarithmique de vitesse sur paroi rugueuse (m s^{-1})
x, y, z	Coordonnées spatiales (m)
Z_f	Côte de l'axe ou du fond (m)
z_0	Coordonnée où la vitesse s'annule (m)
z_{vis}	Limite de la couche visqueuse (m)
z_{log}	Limite de la couche logarithmique (m)
$\alpha(s)$	Moyenne du carré de $\underline{U}$ sur le carré de sa moyenne ()
α_f	Coefficient de la formule de Colebrook ()
β_f	Coefficient de la formule de Colebrook ()
Δ	Opérateur Laplacien (m^{-2})
ΔH	Perte de charge singulière (m)
δ_{ij}	Symbole de Kroenecker ()
δ	Épaisseur caractéristique (m)
δ_{sth}	Coefficient δ sur paroi lisse (m^{-1})
δ_{rgh}	Coefficient δ sur paroi rugueuse (m^{-1})
ϵ	Taux de dissipation d'énergie (m^2 s^{-3})
ζ	Coefficient des profils logarithmiques ()
ζ_{sth}	Coefficient ζ sur paroi lisse ()
ζ_{rgh}	Coefficient ζ sur paroi rugueuse ()
κ	Constant de Von Karman $\kappa = 0.41$ ()
λ	Coefficient de frottement ()
λ_{sth}	Coefficient λ sur paroi lisse ()
λ_{rgh}	Coefficient λ sur paroi rugueuse ()
ν	Viscosité cinématique moléculaire (m^2 s^{-1})
ν_t	Viscosité cinématique turbulente (m^2 s^{-1})
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
ρ_c	Rayon de courbure d'un coude (m)
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes (Pa)
τ	Contrainte de cisaillement (Pa)
τ_*	Contrainte de cisaillement au fond (Pa)
ϕ_{MS}	Coefficient de la formule de Manning-Strickler ()
φ	Angle d'un coude ()
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{B}, ...$	Produit contracté de tenseurs
$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}$	Produit doublement contracté $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})$