

Chapitre 3

Turbulence et frottement

(Turbulence and friction)

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

1	Modélisation turbulente	Turbulence modelling	3
1.1	Moyenne et fluctuations	Mean and fluctuations	3
1.2	Flux turbulents	Turbulent flux	5
1.3	Viscosité turbulente	Turbulent viscosity	6
2	Profils de vitesses	Velocity profiles	7
2.1	Longueur de mélange	Mixing length	8
2.2	Fond plat	Flat bottom	9
2.3	Profils logarithmiques	Logarithmic profiles	10
3	Diagramme de Moody	Moody diagram	13
3.1	Frottement moyen	Average friction	13
3.2	Hydraulique en charge	Hydraulic in pipes	17
3.3	Pertes de charge singulières	Singular head loss	20

Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un aperçu des modèles de turbulence qui décrivent, du point de vue de l'ingénieur, le frottement des parois sur un écoulement.

Cette présentation de la modélisation de la turbulence est orientée vers l'introduction des relations empiriques qui expriment les coefficients de frottement en fonction des paramètres globaux de l'écoulement, tels que la vitesse moyenne et la section de la conduite (hydraulique en charge) ou du canal (hydraulique à surface libre).

Des notions simples sur la décomposition entre champs moyens et fluctuations turbulentes sont données ici. En prenant la moyenne d'équations de transport, les notions de flux turbulents et de diffusivité turbulente sont présentées. Le modèle de longueur de mélange, qui est utile dans de nombreuses applications de l'ingénieur ayant trait à la mécanique des fluides, est explicité.

Introduction

The goal of this chapter is to give an overview of the turbulence models which describe, from the engineering point of view, the friction of a walls on a flow.

This presentation of turbulence modelling is oriented towards the introduction of the empiric relations which express the turbulent friction coefficients as a function of global parameters of the flow, such as the average velocity and the section of the pipe (hydraulics in closed ducts) or the channel (open channel flows).

Simple notions on the decomposition between mean fields and turbulent fluctuations are given. By taking the average of transport equations or of the Navier-Stokes equations, the notions of turbulent fluxes and turbulence diffusivity are introduced. The mixing length model, which is helpful in a lot of engineering applications dealing with fluid mechanics, is explicitated.



FIG. 3.1 – Écoulement turbulent à la sortie d'une émissaire marin.

Turbulent flow at the exit of marine wharf.

Dans le voisinage d'une paroi, tel que le fond d'un canal où la frontière intérieure d'une conduite, la longueur de mélange est le produit de la distance à la paroi et de la constante de Von Karman dont la valeur est issue des expériences. Cette loi robuste conduit à l'identification de profils logarithmiques pour la vitesse dans le voisinage de la paroi. Les cas des frontières lisses ou rugueuses sont considérés. Ce sont des cas limites du "diagramme de Moody" qui trace, pour des rugosités quelconques, le coefficient de frottement turbulent en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité adimensionnelle.

In the vicinity of a wall, such as the bottom of a channel flow or the inside boundaries of a pipe, the mixing length is the product of the distance to the wall and the Von Karman constant which value comes out of experiments. This robust law lead to identification of logarithm profiles for the velocity in the vicinity of the wall. The cases of smooth or rough boundaries are compared. They are limit cases of the "Moody diagram" which plot, for general roughnesses, the turbulent friction coefficient as a function of the Reynolds number and the dimensionless roughness.

1 Modélisation turbulente

Turbulence modelling

La décomposition d'un champ turbulent en la somme de sa moyenne et de ses fluctuations permet de définir la notion de flux turbulents comme étant la moyenne de produits de fluctuations. On paramétrise alors ces flux en fonction des champs moyens et à l'aide de coefficients comme la diffusivité turbulente ou la viscosité turbulente.

The decomposition of a turbulent field as the sum of its mean and its fluctuations enables to define the notion of turbulent fluxes as being the mean of the fluctuation products. One then parametrizes these fluxes as functions of the mean fields with the help of coefficients such as the turbulent diffusivity or the turbulent viscosity.

1.1 Moyenne et fluctuations

Mean and fluctuations

Quand un écoulement est turbulent, tout champ $B(\underline{x}, t)$ (composantes des vitesses, pression, température ...) est fluctuant en espace et en temps sur une large gamme d'échelles.

When a flow is turbulent, any field $B(\underline{x}, t)$ (velocity components, pressure, temperature ...) is fluctuating in space and time on a large variety of scales.

Par conséquent, on essaie de décomposer B en la somme d'un champ moyen \overline{B} qui varie aux grandes échelles spatiales et temporelles d'intérêt (par exemple pour l'ingénieur) et un champ rapidement fluctuant B' qui représente le mouvement aux plus petites échelles.

Thus, one tries to decompose B as the sum of a mean field \overline{B} which varies at the large space and time scales of interest (for instance for the engineer) and a rapidly fluctuating field B' which represents the motion of the smaller scales.

On considère le signal $b(t) = B(\underline{x}, t)$ mesuré en un point donné \underline{x} . Sa transformée de Fourier $\widehat{b}(\omega)$, définie par

One considers the signal $b(t) = B(\underline{x}, t)$ measured at a given point \underline{x} . Its Fourier transform $\widehat{b}(\omega)$, defined by

$$b(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{b}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \iff \widehat{b}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} b(t) e^{i\omega t} dt, \quad (3.1)$$

conduit au spectre de puissance $E_B(\omega) = \frac{1}{2}|\widehat{b}(\omega)|^2$ où ω est la fréquence. Une définition plus exacte du spectre de puissance doit être recherchée dans les livres de turbulence ([?], [?]). De la même manière, le champ tridimensionnel $b(\underline{x}) = B(\underline{x}, t)$ mesuré à un temps t donné peut être décomposé en modes de Fourier à travers les relations

$$b(\underline{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \widehat{b}(\underline{K}) e^{i\underline{K}\cdot\underline{x}} dK^3 \iff \widehat{b}(\underline{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbb{R}^3} b(\underline{x}) e^{-i\underline{K}\cdot\underline{x}} d\underline{x}^3, \quad (3.2)$$

qui conduisent au spectre de puissance $E_B(K) = \frac{1}{2} \iint_{\|\underline{K}\|=K} |\widehat{b}(\underline{K})|^2 dS$ comme fonction du nombre d'onde $K = \|\underline{K}\|$ et donc des échelles de longueur.

leads to the power spectrum $E_B(\omega) = \frac{1}{2}|\widehat{b}(\omega)|^2$ where ω is the frequency. A more exact definition of the power spectrum must be found in turbulence books ([?], [?]). Similarly, the three dimensional field $b(\underline{x}) = B(\underline{x}, t)$ measured at a given time t can be decomposed in Fourier modes through the relations

which lead to the power spectrum $E_B(K) = \frac{1}{2} \iint_{\|\underline{K}\|=K} |\widehat{b}(\underline{K})|^2 dS$ as a function of the wave number $K = \|\underline{K}\|$ and thus of the length scales.

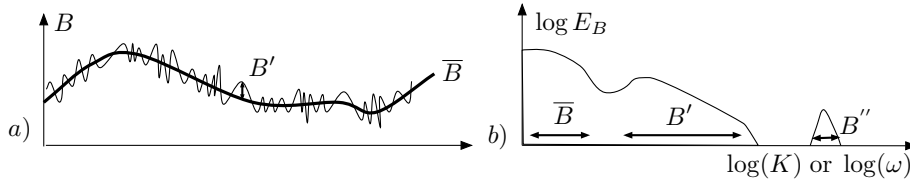


FIG. 3.2 – a) Décomposition de $B = \overline{B} + B'$ en champ moyen et fluctuations turbulentes. b) Spectre de puissance avec le mouvement brownien B'' .

a) Decomposition $B = \overline{B} + B'$ in mean field and turbulent fluctuations. b) Power spectrum of B .

Ces spectres montrent la répartition de puissance du signal en fonction des échelles de temps et d'espace (figure 3.2).

These spectra show the repartition of the signal power as a function of the time and space scales (Figure 3.2).

Lorsque l'on considère les fluctuations browniennes B'' (aux échelles moléculaires) du champ B , on peut voir (figure 3.2b) un trou spectral entre les échelles de la mécanique des milieux continus ($\overline{B} + B'$) et les échelles moléculaires (B''). La séparation entre ces deux échelles est alors bien définie.

When considering the Brownian fluctuations B'' (at the molecular scales) of the field B , one can see (Figure 3.2b) a spectral gap between the continuum mechanics scales ($\overline{B} + B'$) and the molecular scales (B''). The separation between these two scales is thus well defined.

Un tel trou spectral entre les grandes échelles (\overline{B}) et les échelles turbulentes (B') est rarement présent. Néanmoins, on suppose qu'il est tout de même possible d'effectuer la décomposition

Such a spectral gap between the large scales (\overline{B}) and the turbulent scales (B') is seldom present. Nevertheless, one assume that it is however possible to perform the decomposition

$$B(\underline{x}, t) = \overline{B}(\underline{x}, t) + B'(\underline{x}, t), \quad (3.3)$$

et que l'opérateur de moyenne possède de bonnes propriétés comme $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$ et $\overline{B'} = 0$. On a donc $\overline{B_1 B_2} = \overline{B_1} \overline{B_2} + \overline{B'_1 B'_2}$. On suppose aussi $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial B}{\partial t}}$ et $\frac{\partial \overline{B}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial B}{\partial x_i}}$. On dit que \overline{B} est la “moyenne de Reynolds” de B .

and that the average operator owns nice properties such as $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$ and $\overline{B'} = 0$. One thus has $\overline{B_1 B_2} = \overline{B_1} \overline{B_2} + \overline{B'_1 B'_2}$. One also assumes $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial B}{\partial t}}$ and $\frac{\partial \overline{B}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial B}{\partial x_i}}$. One says that \overline{B} is the “Reynolds average” of B .

1.2 Flux turbulents

Turbulent flux

Si un écoulement est turbulent, on décompose sa vitesse $\underline{U} = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ en la somme des champs vectoriels moyen et fluctuant. Nous nous intéressons ici aux écoulements incompressibles et l'on a donc $\text{div } \underline{U} = 0$ et $\text{div } \overline{\underline{U}} = 0$.

If a flow is turbulent, one decomposes its velocity $\underline{U} = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ into the sum of the mean and fluctuating vector fields. We consider here only incompressible flow and one has thus $\text{div } \underline{U} = 0$ and $\text{div } \overline{\underline{U}} = 0$.

Le champ B est un “scalaire passif” advecté par le champ de vitesse \underline{U} s'il obéit à l'équation

The field B is a “passive scalar” convected by the velocity field \underline{U} if it obeys to the equation

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } B = k_B \Delta B, \quad (3.4)$$

où k_B est un coefficient de diffusion moléculaire. En utilisant les propriétés de l'opérateur de moyenne et la relation $\text{div } \underline{U} = 0$, la moyenne de cette équation est

where k_B is a molecular diffusion coefficient. Using the properties of the average operator and the relation $\text{div } \underline{U} = 0$, the average of this equation is

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \text{div } (\overline{\underline{U} B}) = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{\underline{U}} \cdot \text{grad } \overline{B} = k_B \Delta \overline{B} - \text{div } (\overline{\underline{U}' B'}). \quad (3.5)$$

La quantité $\underline{F}_{Bt} = \overline{\underline{U}' B'}$ est le “flux turbulent”.

The quantity $\underline{F}_{Bt} = \overline{\underline{U}' B'}$ is the “turbulent flux”.

De manière similaire, les équations de Navier-Stokes incompressibles peuvent être moyennées, ce qui conduit à

Similarly, the incompressible Navier-Stokes equation can be averaged, leading to

$$\text{div } \overline{\underline{U}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{\underline{U}} + \overline{\underline{U}} \cdot \text{grad } \overline{\underline{U}} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \overline{p} - \text{grad } (g z) + \nu \Delta \overline{\underline{U}} - \text{div } \underline{\underline{R}}, \quad (3.6)$$

où g est la gravité et le “tenseur de Reynolds” $\underline{\underline{R}}$ est défini par ses composantes

where g is the gravity and $\underline{\underline{R}}$ the “Reynolds tensor” defined by its components

$$R_{ij} = \overline{U'_i U'_j}, \quad (3.7)$$

où U_i désigne les trois composantes de \underline{U} .

where U_i denotes the three components of \underline{U} .

Un spectre typique $E(K)$ de l'énergie cinétique $k = \frac{1}{2}\overline{U'^2} = \frac{1}{2}\text{tr } \underline{R}$ d'un écoulement turbulent est représenté sur la figure 3.3. On peut trouver dans les livres de turbulence ([?], [?]) la dérivation de la loi $E(K) = C_K \epsilon^{3/2} K^{-5/3}$ du "spectre de Kolmogorov", où C_K est la "constante de Kolmogorov", valable entre les échelles K_0 , où l'énergie est injectée au taux ϵ , et les échelles K_d , où elles sont dissipées au même taux.

A typical spectrum $E(K)$ of the kinetic energy $k = \frac{1}{2}\overline{U'^2} = \frac{1}{2}\text{tr } \underline{R}$ of a turbulent flow is represented on Figure 3.3. One can find in turbulence books ([?], [?]) the derivation of the $E(K) = C_K \epsilon^{3/2} K^{-5/3}$ law of the "Kolmogorov spectrum", where C_K is the "Kolmogorov constant", valid between the scales K_0 , where the energy is injected with the rate ϵ , and the dissipative scales K_d , where it is dissipated at the same rate, can be found in turbulence books ([?], [?]).

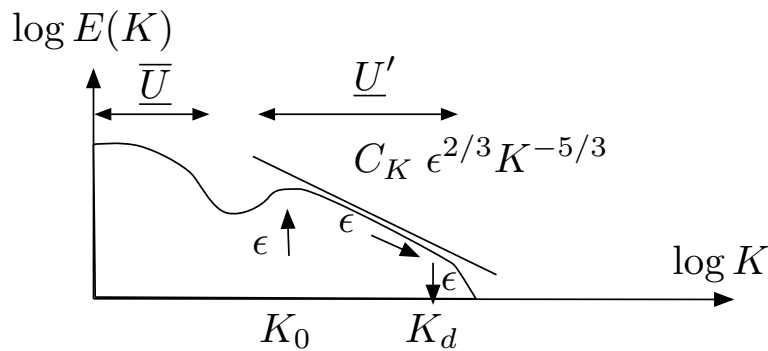


FIG. 3.3 – Exemple de spectre d'énergie $E(K)$ et décomposition $\underline{U} = \overline{U} + \underline{U}'$.

Example of a kinetic energy spectrum $E(K)$ and decomposition $\underline{U} = \overline{U} + \underline{U}'$.

Le problème de la modélisation de la turbulence est d'exprimer des produits tels que $\overline{U'_i B'}$ ou $\overline{U'_i U'_j}$, qui sont appelés "corrélations doubles", en fonction des champs moyens.

The turbulence modelling problem is to express products such as $\overline{U'_i B'}$ or $\overline{U'_i U'_j}$, which are named "double correlations", as a function of the mean fields.

Les modèles d'ordre un proposent des expressions des flux turbulents tels que \underline{F}_{Bt} ou \underline{R} en fonction des champs moyens \overline{B} et \overline{U} ou de leurs gradients.

Order one models propose expressions of turbulent fluxes such as \underline{F}_{Bt} or \underline{R} as functions of the mean fields \overline{B} and \overline{U} or of their gradients.

1.3 Viscosité turbulente

Turbulent viscosity

Presque tous les modèles de turbulence débutent avec la loi empirique

Nearly all the turbulent models starts with the empirical law

$$\underline{F}_{Bt} = -k_{Bt} \text{grad } \overline{B} \iff \overline{U' B'} = -k_{Bt} \text{grad } \overline{B}, \quad (3.8)$$

où k_{Bt} est appelée la "diffusivité turbulente" de B . L'équation d'advection moyennée pour B est alors

where k_{Bt} is called the "turbulent diffusivity" of B . The averaged convection equation for B is thus

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{U} \cdot \text{grad } \overline{B} = \text{div} \left[(k_B + k_{Bt}) \text{grad } \overline{B} \right]. \quad (3.9)$$

De même, la modélisation turbulente du tenseur de Reynolds \underline{R} en fonction des composantes moyennes \overline{U}_i suppose la loi empirique

$$R_{ij} = -2\nu_t \overline{d}_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \iff \underline{R} = -2\nu_t \underline{\overline{d}} + \frac{2}{3} k \underline{I}, \quad (3.10)$$

où “l’énergie cinétique turbulente” k est définie par

$$k = \frac{1}{2} \text{tr} \underline{R} = \frac{1}{2} (\overline{U_1^2} + \overline{U_2^2} + \overline{U_3^2}), \quad (3.11)$$

et les composantes du “tenseur des taux de déformation” $\underline{\overline{d}}$ sont $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$. La quantité ν_t est appelée la “viscosité turbulente”.

Similarly, the turbulent modelling of the Reynolds tensor \underline{R} as a function of the average components \overline{U}_i assumes the empirical law

where the “turbulent kinetic energy” k is defined by

and the components of the “deformation rate tensor” $\underline{\overline{d}}$ are $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$. The quantity ν_t is called the “turbulent viscosity”.

Pour $i \neq j$, cette loi s’écrit

For $i \neq j$, this law reads

$$\overline{U'_i U'_j} = -\nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) = -2\nu_t d_{ij}. \quad (3.12)$$

L’expression des composantes diagonales $i = j$ prend en compte la contrainte d’incompressibilité $\text{tr} \underline{\overline{d}} = \text{div} \overline{\underline{U}} = 0$.

The expression of the diagonal components $i = j$ takes into account the incompressibility constraint $\text{tr} \underline{\overline{d}} = \text{div} \overline{\underline{U}} = 0$.

La plupart du temps, le coefficient de diffusion turbulente k_{Bt} et la viscosité turbulente ν_t sont choisis comme étant égaux.

Most of the time, the turbulent diffusion coefficient k_{Bt} and the turbulent viscosity ν_t are chosen as equal.

Pour un écoulement parallèle $\overline{\underline{U}} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$, la seule composante non triviale de ce modèle est

For a parallel flow $\overline{\underline{U}} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$, the only non trivial component of this model is

$$\overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}. \quad (3.13)$$

2 Profils de vitesses

Velocity profiles

Le modèle de longueur de mélange est une paramétrisation turbulente souvent utilisée dans les applications. Près des parois, il permet de calculer les profils logarithmiques des vitesses en tenant compte du caractère lisse ou rugueux de la surface.

The mixing length model is a turbulent parametrization often used in applications. Near the walls, it allows to compute the logarithmic velocity profiles taking into account the smooth or rough nature of the surface.

2.1 Longueur de mélange

Mixing length

Un modèle de turbulence très simple est obtenu en choisissant une viscosité turbulente ν_t constante. Ce modèle peut donner des résultats réalistes quand les champs turbulents sont homogènes en espace. Ce n'est pas le cas des sillages d'obstacles ou des voisinages des frontières telles que le fond d'une rivière ou les parois d'un tuyau. Des modèles de turbulence plus complexes sont alors requis pour de tels cas.

A very simple turbulent model is obtained by choosing a constant turbulent viscosity ν_t . This model can give realistic results when the turbulent fields are homogeneous in space. This is not the case of the wakes of obstacles or of the vicinity of boundaries such as the bottom of a river or the boundaries of a pipe. More complex turbulent models are thus required for such cases.

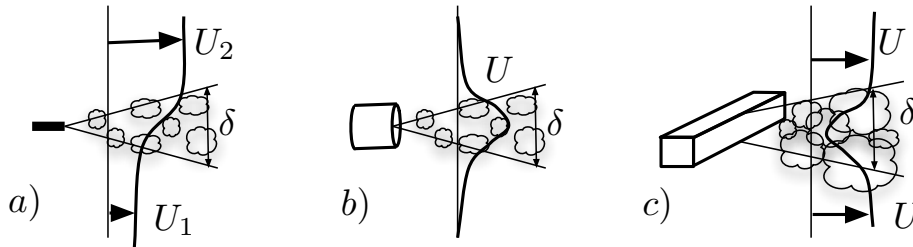


FIG. 3.4 – Valeurs de longueurs de mélange. a) Couche de mélange, $l_m \sim 0.07 \delta$. b) Jet circulaire, $l_m \sim 0.075 \delta$. c) Sillage plan, $l_m \sim 0.16 \delta$.

Mixing length values : a) mixing layer, $l_m \sim 0.07 \delta$. b) round jet, $l_m \sim 0.075 \delta$. c) plane wake, $l_m \sim 0.16 \delta$.

Le modèle de longueur de mélange est utilisé pour décrire une turbulence inhomogène. Il suppose que la viscosité turbulente s'écrit

The mixing length model is used to describe inhomogeneous turbulence. It assumes that the turbulent viscosity reads

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}}, \quad (3.14)$$

où $\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} = \text{tr}(\underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{d}}) = d_{ij} d_{ji} = d_{ij} d_{ij}$ est la somme des carrés de toutes les composantes du tenseur (symétrique) des taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ (nous avons utilisé ici la convention d'Einstein qui consiste à sommer les indices répétés i et j). La quantité $l_m(\underline{x}, t)$ est appelée la "longueur de mélange". Elle doit être ajustée en fonction de la géométrie de l'écoulement. Par exemple, elle est de l'ordre du dixième de l'épaisseur caractéristique $\delta(x)$ pour une couche de mélange, un jet ou un sillage turbulent (voir figure 3.4).

where $\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} = \text{tr}(\underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{d}}) = d_{ij} d_{ji} = d_{ij} d_{ij}$ is the sum of the squares of all the components of the (symmetric) deformation rate tensor $\underline{\underline{d}}$ (we have used here the Einstein convention which consists in summing the repeated indices i and j). The quantity $l_m(\underline{x}, t)$, is called the "mixing length". It must be fitted as a function of the flow geometry. For instance, it is the order of the tenth of the thickness $\delta(x)$ for a mixing layer, a jet, or a turbulent wake (see Figure 3.4).

Pour l'écoulement parallèle $\overline{\underline{U}} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$, le modèle de longueur de mélange conduit à

For the parallel flow $\overline{\underline{U}} = \overline{u}(z) \underline{e}_x$, the mixing length model leads to

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right|, \quad \overline{u'w'} = -l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}. \quad (3.15)$$

Près d'un mur, les observations expérimentales montrent que

Near a wall, experiments observations show that

$$l_m = \kappa z \quad , \quad \kappa = 0.41 \quad , \quad (3.16)$$

où κ est la “constante de Von Karman” (figure 3).

where κ is the “Von Karman constant” (figure 3).

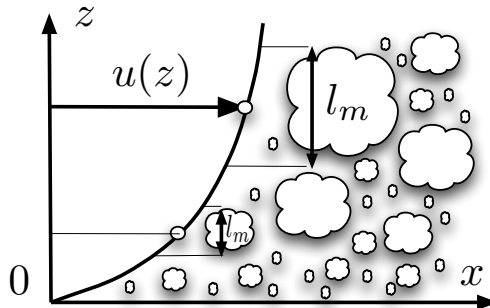


FIG. 3.5 – Longueur de mélange près d'un mur : $l_m = \kappa z$ avec $\kappa = 0.41$.

Mixing length near a wall : $l_m = \kappa z$ with $\kappa = 0.41$.

Le modèle de longueur de mélange peut être comparé à l'expression $\nu \sim l_{mol} u_{mol}$ de la viscosité moléculaire où l_{mol} est le libre parcours moyen des molécules et u_{mol} leur vitesse caractéristique. En effet, on peut écrire $\nu_t = l_m u_m$ où $u_m \sim l_m \sqrt{2 \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}}$, ce qui s'écrit $u_m \sim l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ pour un écoulement parallèle. La longueur l_m peut être vue comme le libre parcours moyen de petits tourbillons et u_m comme leur vitesse caractéristique.

The mixing length model can be compared to the expression $\nu \sim l_{mol} u_{mol}$ of the molecular velocity where l_{mol} is the free mean path of the molecules and u_{mol} their typical velocity. Indeed, one can write $\nu_t = l_m u_m$ where $u_m \sim l_m \sqrt{2 \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}}$, which reads $u_m \sim l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ for a parallel flow. The length l_m can be seen as the free mean path of small vortices and u_m as their characteristic velocities.

2.2 Fond plat

Flat bottom

Considérons la couche d'épaisseur R d'un écoulement turbulent sur un fond plat. On suppose que l'écoulement est forcé par un gradient de pression constant $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -G$, dans un champ de gravité $-g \underline{e}_z$.

Let us consider the layer of thickness R of a turbulent flow above a flat bottom. One assumes that the flow is forced by a constant pressure gradient $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -G$, in a gravity field $-g \underline{e}_z$.

Dire que la vitesse moyenne $\bar{\underline{U}} = \bar{u}(z) \underline{e}_x$ satisfait les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds s'écrit

Saying that the averaged velocity $\bar{\underline{U}} = \bar{u}(z) \underline{e}_x$ satisfies the Reynolds averaged Navier-Stokes equations read

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right)$$

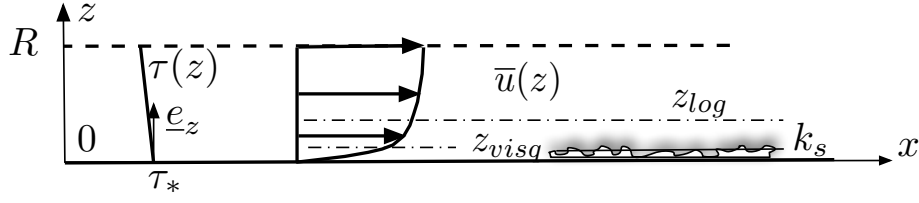


FIG. 3.6 – Écoulement à surface libre sur un fond lisse ou rugueux.

Free surface flow on a smooth or rough bottom.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) . \quad (3.17)$$

On note τ la contrainte tangentielle $\tau(z) = \rho \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right)$ et $\tau_* = \tau(0)$ sa valeur en $z = 0$. On a donc $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}$. Comme $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -G$ est constant $\frac{\partial \tau}{\partial z} = -G$ l'est aussi. On en déduit la relation

One denotes by τ the tangential stress $\tau(z) = \rho \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right)$ and $\tau_* = \tau(0)$ its value at $z = 0$. One thus has $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z}$. Since $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -G$ is constant $\frac{\partial \tau}{\partial z} = -G$ is so. One then deduces the relation

$$\tau(z) = \tau_* - G z , \quad (3.18)$$

où $\tau_* = \tau(0)$ est pour l'instant inconnu. On note u_* la “vitesse de frottement” définie par $\tau_* = \rho u_*^2$. Le modèle de longueur de mélange $\overline{u'w'} = -l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ conduit alors à

where $\tau_* = \tau(0)$ is so far unknown.. One denotes by u_* the “friction velocity” defined by $\tau_* = \rho u_*^2$. The mixing length turbulence model $\overline{u'w'} = -l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ thus leads to

$$\left(\nu + l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 - \frac{G}{\rho} z . \quad (3.19)$$

L'intégration de cette équation va permettre de déterminer le profil de vitesse $\bar{u}(z)$ dont l'expression dépend du raccordement avec les conditions aux limites du fond.

The integration of this equation will allow the determination of the velocity profile $\bar{u}(z)$ whose expression depends on the match with the bottom boundary conditions.

2.3 Profils logarithmiques

Logarithmic profiles

On suppose que $\tau(z) \sim \tau_* = \rho u_*^2$ est presque constant dans la couche $z \in [0, R]$, et que donc $R \ll \tau_*/G$. En supposant la loi $l_m = \kappa z$, où $\kappa = 0.41$ est la constante de Von Karman, les équations s'écrivent

One supposes that $\tau(z) \sim \tau_* = \rho u_*^2$ is nearly constant in the layer $z \in [0, R]$, and thus $R \ll \tau_*/G$. Assuming the law $l_m = \kappa z$, where $\kappa = 0.41$ is the Von Karman constant, the equations read

$$\left(\nu + \kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2 . \quad (3.20)$$

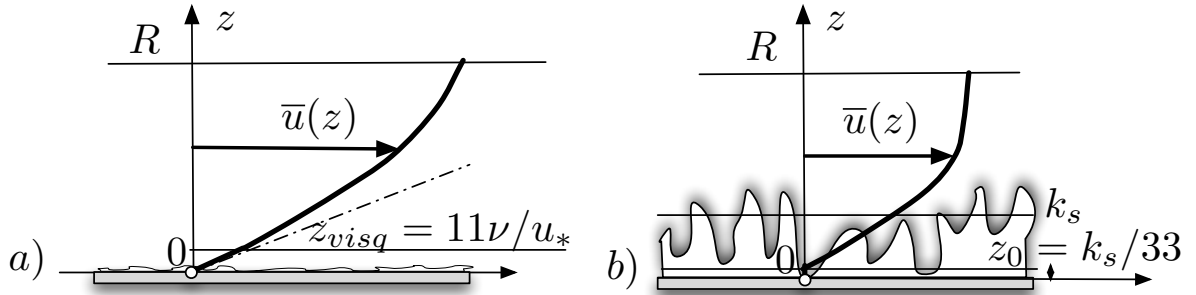


FIG. 3.7 – Couche limite sur un fond plat. a) Régime lisse. b) Régime rugueux.

Boundary layer over a flat bottom : a) Smooth regime. b) rough regime.

On dit que le fond est “lisse” s’il existe une couche limite $z \in [0, z_{vis}]$ dans laquelle la viscosité moléculaire ν est dominante par rapport à la viscosité turbulente $\nu_t = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$. Cette hypothèse peut être traduite par $l_m = 0$ dans cette couche. Dans ce cas, les équations $\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2$ avec $\bar{u}(0) = 0$ conduisent à

One says that the bottom is “smooth” if there is a boundary layer $z \in [0, z_{vis}]$ in which the molecular viscosity ν is dominant with respect with the turbulent viscosity $\nu_t = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$. This hypothesis can be stated as $l_m = 0$ in this layer. In that case, the equations $\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2$ with $\bar{u}(0) = 0$ leads to

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu} . \quad (3.21)$$

On dit que le fond est “rugueux” s’il y a une couche $z \in [0, z_0]$ dans laquelle la vitesse $u(z)$ est nulle. Si k_s est la hauteur moyenne des rugosités, les observations expérimentales montrent que

One says that the bottom is “rough” if there is a layer $z \in [0, z_0]$ in which the velocity $u(z)$ is zero. If k_s is the mean height of the roughness, experiment observations show that

$$z_0 = k_s/33 . \quad (3.22)$$

La nature “lisse” ou “rugueuse” du fond dépend de k_s et ν mais aussi de l’écoulement turbulent à travers sa vitesse de frottement u_* . En effet, les observations expérimentales montrent que les critères pour les régimes lisses et rugueux sont respectivement

The “smooth” or “rough” nature of the bottom depend on k_s and ν but also of the turbulent flow through its friction velocity u_* . Indeed, experimental observations shows that the criteria for the smooth and rough regime are respectively

$$\frac{u_* k_s}{\nu} < 5 , \quad \frac{u_* k_s}{\nu} > 70 . \quad (3.23)$$

Quand le nombre sans dimension $u_* k_s/\nu$ est entre 5 et 70, le régime n’est ni lisse ni rugueux et l’analyse de couche limite est plus complexe.

When the dimensionless number $u_* k_s/\nu$ is between 5 and 70, the regime is neither smooth nor rough and the boundary layer analysis is more complex.

Quand z est suffisamment grand, la viscosité moléculaire ν est négligeable en face de la viscosité turbulente et l’équation s’écrit

When z is sufficiently large, the molecular viscosity ν is negligible in front of the turbulent viscosity and the equation read

$$\kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = u_*^2. \quad (3.24)$$

Dans ce cas, le profil de vitesse s'écrit

| In this case, the velocity profile read

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta} \right) + \zeta, \quad (3.25)$$

où les constantes δ et ζ représentent en fait une seule constante d'intégration $-\frac{1}{\kappa} \ln \delta + \zeta$ qui est le seul degré de liberté de la famille de profils de vitesse.

| where the two constants δ and C represent in fact a single integration constant $-\frac{1}{\kappa} \ln(\delta) + C$ which is the only one degree of freedom of the velocity profile family.

Quand le fond est lisse, les observations expérimentales montrent que le profil logarithmique se raccorde avec le profil visqueux en z_{vis} défini par

| When the bottom is smooth, experimental observations show that the logarithmic profile matches with the viscous profile at z_{vis} defined by

$$z_{vis} = 11 \frac{\nu}{u_*}. \quad (3.26)$$

Le profil de vitesse de cette couche logarithmique est donc

| The velocity profile of the logarithmic layer is thus

$$\frac{\bar{u}_{sth}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5.2 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta_{sth}} \right) + \zeta_{sth}, \quad (3.27)$$

avec $\delta_{sth} = \nu/u_*$ et $\zeta_{sth} = 11 - \ln(11)/\kappa = 5.2$.

| with $\delta_{sth} = \nu/u_*$ and $\zeta_{sth} = 11 - \ln(11)/\kappa = 5.2$.

Quand le fond est rugueux, les observations expérimentales montrent que ce profil logarithmique se raccorde avec le profil nul en z_0 avec $k_s = 33 z_0$. Le profil de vitesse de la couche logarithmique est donc

| When the bottom is rough, experimental observations show how the logarithmic profile matches with the zero velocity profile at z_0 with $k_s = 33 z_0$. The velocity profile of the logarithmic layer is thus

$$\frac{\bar{u}_{rgh}(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8.5 = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{\delta_{rgh}} \right) + \zeta_{rgh}, \quad (3.28)$$

avec $\delta_{rgh} = k_s$ et $\zeta_{rgh} = \ln(33)/\kappa = 8.5$.

| with $\delta_{rgh} = k_s$ and $\zeta_{rgh} = \ln(33)/\kappa = 8.5$.

3 Diagramme de Moody

En moyennant les profils de vitesses logarithmiques que nous avons déterminés sur la couche d'épaisseur $R \ll \tau_*/G$, on peut relier la force de frottement à la vitesse moyenne de l'écoulement. Le diagramme de Moody étend cette relation au cas des parois dont la nature est intermédiaire entre les cas limites lisse et rugueux. En reliant les forces de frottement à la perte de charge linéique dans une conduite, on obtient un modèle utile pour les applications que l'on peut compléter par la paramétrisation des pertes de charges singulières.

3.1 Frottement moyen

Nous considérons le profil de vitesse $\bar{u}(z)/u_* = \frac{1}{\kappa} \ln(z/\delta) + \zeta$, avec $(\delta, \zeta) = (\delta_{sth}, \zeta_{sth})$ dans le cas lisse et $(\delta, \zeta) = (\delta_{rgh}, \zeta_{rgh})$ dans le cas rugueux. Nous définissons alors la vitesse moyenne de la couche $z \in [0, R]$ par la relation $U = \frac{1}{R} \int_0^R \bar{u} dz$.

Si z_{vis}/R , dans le cas lisse, et z_0/R , dans le cas rugueux, sont suffisamment petits, on peut écrire

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\bar{u}}{u_*} dz = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{R}{\delta}\right) + \zeta - \frac{1}{\kappa}, \quad (3.29)$$

en négligeant l'intégrale sur $[0, z_{vis}]$ dans le cas lisse et $[0, z_0]$ dans le cas rugueux ainsi que la primitive $(z/\delta) \ln(z/\delta) - (z/\delta)$ de la fonction $\ln(z/\delta)$ respectivement en $z = z_{vis}$ et $z = z_0$.

Pour les applications pratiques, il est utile de regarder la relation entre la vitesse moyenne U et la contrainte tangentielle τ_* . Une analyse dimensionnelle conduit à la relation $\tau_* = \frac{1}{2} C_f \rho U^2$ où C_f est un coefficient sans dimension, appelé "coefficient de traînée", qui peut dépendre de U , R ou d'autres paramètres de l'écoulement comme ν ou k_s .

Très souvent, le "coefficient de frottement" λ , défini par la relation $\lambda = 4 C_f$ est préféré. En utilisant la définition de la vitesse de frottement u_* de la relation $\tau_* = \rho u_*^2$, la relation entre τ_* et U , ou, de manière équivalente, entre u_* et U , s'écrit

Moody diagram

By averaging the logarithmic velocity profiles that we have determined on the layer of thickness $R \ll \tau_*/G$, one can link the friction force to the averaged velocity of the flow. The Moody diagram extend this relation to the cas of the walls which nature is intermediary between the smooth and rough limit cases. By linking the friction forces to the lineic head loss in a pipe, one gets a model usefull for the applications, which can be completed by the parametrizations of the singular head losses.

Average friction

We consider the velocity profil $\bar{u}/u_* = \frac{1}{\kappa} \ln(z/\delta) + \zeta$, with $(\delta, \zeta) = (\delta_{sth}, \zeta_{sth})$ in the smooth case and $(\delta, \zeta) = (\delta_{rgh}, \zeta_{rgh})$ in the rough case. We then define the average velocity of the layer $z \in [0, R]$ by the relation $U = \frac{1}{R} \int_0^R \bar{u} dz$.

If z_{vis}/R , in the smooth case, and z_0/R , in the rough case, are small enough, one can write

neglecting the integral on $[0, z_{vis}]$ in the smooth case and $[0, z_0]$ in the rough case and the primitive $(z/\delta) \ln(z/\delta) - (z/\delta)$ of the function $\ln(z/\delta)$ respectively at $z = z_{vis}$ and $z = z_0$.

For practical studies, it is useful to look at the relation between the vertically averaged velocity U and the tangential stress τ_* . A dimensionless analysis leads to the relation $\tau_* = \frac{1}{2} C_f \rho U^2$ where C_f is a dimensionless coefficient, called "drag coefficient", which can depend on U , R and of other parameter of the flow such as ν or k_s .

Very often, the "friction coefficient" λ , defined by the relation $\lambda = 4 C_f$, is preferred. Using the definition of the friction velocity u_* from the relation $\tau_* = \rho u_*^2$, the relation between τ_* and U or, equivalently, between u_* and U , reads

$$\tau_* = \frac{1}{8} \lambda \rho U^2 \iff \frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}. \quad (3.30)$$

Il est aussi courant de définir le “diamètre hydraulique” $D_H = 4 R$ associé au domaine considéré $z \in [0, R]$. Avec ces définitions, la relation entre le coefficient de frottement λ et la vitesse U s’écrit maintenant

It is also common to define the “hydraulic diameter” $D_H = 4 R$ associated to the considered domain $z \in [0, R]$. With these definitions, the relation between the friction coefficient λ and the velocity U now reads

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a \log_{10} \left(\frac{D_H}{\delta} \right) + b, \quad (3.31)$$

où $a = \ln(10)/(\kappa\sqrt{8}) = 2.0$ et $b = [\zeta - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8}$.

where $a = \ln(10)/(\kappa\sqrt{8}) = 2.0$ and $b = [\zeta - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8}$.

En utilisant l’expression $(\delta_{rgh}, \zeta_{rgh}) = (k_s, 8.5)$ pour le régime rugueux et $(\delta_{sth}, \zeta_{sth}) = (\nu/u_*, 5.2)$ pour le régime lisse, les coefficients de frottement des deux régimes s’écrivent respectivement

Using the expression $(\delta_{rgh}, \zeta_{rgh}) = (k_s, 8.5)$ for the rough regime and $(\delta_{sth}, \zeta_{sth}) = (\nu/u_*, 5.2)$ for the smooth regime, the friction coefficients of both regimes respectively read

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ru}}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{Ru}{\alpha_f} \right), \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} \quad (3.32)$$

avec $2.0 \log_{10}(\alpha_f) = b_{rgh} = [\zeta_{rgh} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = 0.9$ et

with $2.0 \log_{10}(\alpha_f) = b_{rgh} = [\zeta_{rgh} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = 0.9$ and

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{sth}}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\beta_f}{Re \sqrt{\lambda_{sth}}} \right), \quad Re = \frac{U D_H}{\nu}, \quad (3.33)$$

avec $2.0 \log_{10}(\beta_f/\sqrt{8}) = -b_{sth} = -[\zeta_{sth} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = 0.2$. Le nombre de Reynolds Re et le nombre Ru sont deux nombres sans dimension. Les valeurs numériques des coefficients issus de cette analyse sont $(\alpha_f, \beta_f) = (2.8, 3.6)$.

with $2.0 \log_{10}(\beta_f/\sqrt{8}) = b_{sth} = [\zeta_{sth} - (1 + \ln 4)/\kappa]/\sqrt{8} = -0.2$. The Reynolds number Re and the number Ru are two dimensionless numbers. The numerical values of the coefficients coming out of this analysis are $(\alpha_f, \beta_f) = (2.8, 2.2)$.

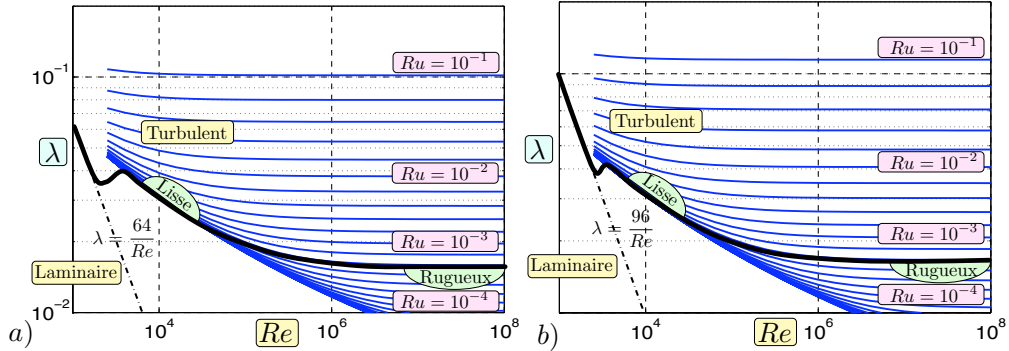


FIG. 3.8 – Diagramme de Moody pour la formule de Colebrook. a) Écoulements en charge avec $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$. b) Écoulements à surface libre avec $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$.

Moody diagram for the Colebrook formula. a) Flows in pipes with $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$. b) Open channel flows with $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$.

Contrairement à $\kappa = 0.41$ et donc $a = 2.0$, les coefficients (α_f, β_f) dépendent de la géométrie de l'écoulement qui peut être confiné dans un tuyau de section quelconque ou comporter une surface libre dans un canal de section quelconque. Il convient d'estimer ces coefficients par des modèles du type de celui que nous venons de présenter pour le cas d'un fond plat ou de les mesurer expérimentalement. Des valeurs typiques sont $\alpha_f \in [2, 4]$ et $\beta_f \in [0, 6]$.

Contrarily to κ and thus $a = 2.0$, the coefficients (α_f, β_f) depend on the geometry of the flow which can be confined in a pipe of mundane section or own a free surface in a chanel of mundane section. One has to estimate these coefficients with models of the type of the one that we have just presented in the case of a flat bottom or to measure them experimentally. Typical values are $\alpha_f \in [2, 4]$ and $\beta_f \in [0, 6]$

Pour les “régimes intermédiaires”, qui ne sont ni lisses ni rugueux et dans le cas de géométries quelconques, les formules obtenues pour des fonds plats lisses ou rugueux sont complétées par la formule de Colebrook qui s'écrit

For “intermediate regimes”, which are neither smooth nor rough, these formula are completed by the Colebrook formula which reads

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{Ru}{\alpha_f} + \frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}} \right). \quad (3.34)$$

Pour les écoulements en charge dans des tuyaux, le choix $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$ est très courant. Dans ce dernier cas, la formule de Haaland $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{Ru}{3.7} \right)^{1.11} \right]$, qui à l'avantage d'être explicite, ne diffère que de 2% de celle de Colebrook.

For confined flows in pipes, the choice $(\alpha_f, \beta_f) = (3.7, 2.51)$ is very common. In this las case, the Haaland formula $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1.8 \log_{10} \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{Ru}{3.7} \right)^{1.11} \right]$, which has the advantage to be explicit, only depart by 2% of the Colebrook one.

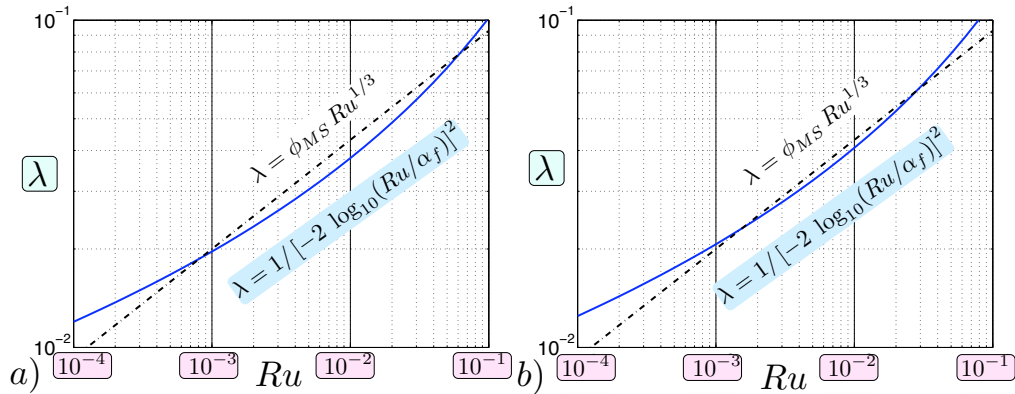


FIG. 3.9 – Comparaison entre la fonction $\lambda(Ru)$ de la formule de Colebrook aux grandes Re et la paramétrisation de Manning- Strickler $\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}$ avec $\phi_{MS} = 0.2$. a) $\alpha_f = 3.7$ (hydraulique en charge), b) $\alpha_f = 3$ (hydraulique à surface libre).

Comparison between the function $\lambda(Ru)$ of the Colebrook formula at large Re and the Manning-Strickler parametrization $\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}$ with $\phi_{MS} = 0.2$. a) $\alpha_f = 3.7$, b) $\alpha_f = 3$.

Un choix courant de jeu de valeurs pour les écoulements à surface libre est $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$, particulièrement valide pour des canaux à sections trapézoïdales. Le choix $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 3.4)$ est préféré pour de larges sections.

A very common set of values for open channel flows is $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 2.5)$, particularly valid for channels with trapezoid sections. The choice $(\alpha_f, \beta_f) = (3, 3.4)$ is preferred for large sections.

La dépendance de $\lambda(Re, Ru)$ vis-à-vis de Re et Ru constitue le “diagramme de Moody” que représente la figure 3.8. À bas Reynolds, quand l’écoulement est laminaire, on obtient la relation analytique $\lambda = 64/Re$ pour l’écoulement de Poiseuille circulaire et $\lambda = 96/Re$ pour l’écoulement de Poiseuille sur un plan incliné. Entre le régime laminaire et le régime turbulent, un “régime transitionnel” est observé avec un coefficient de frottement λ qui peut croître sur un court intervalle avec Re pour un Ru fixé.

The dependency of $\lambda(Re, Ru)$ with respect to Re and Ru constitutes the “Moody diagram” which shown on Figure 3.8. At low Reynolds, when the flow is laminar, one finds the analytic relation $\lambda = 64/Re$ for the circular Poiseuille flow and $\lambda = 96/Re$ for the plane Poiseuille flow on a tilted plane. Between the laminar and the fully turbulent regime, a “transitional regime” is observed with a friction coefficient λ which can be growing on a small interval with Re at fixed Ru .

Les régimes rugueux sont obtenus dans la limite des grands nombres de Reynolds Re tels que λ ne dépend que de Ru . La fonction $\lambda(Ru)$ pour des Re infinis est représentée sur la figure 3.9 pour $\alpha_f = 3.7$ (hydraulique en charge) et $\alpha_f = 3$ (hydraulique à surface libre). Pour les valeurs $Ru \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ qui sont courantes dans les applications pratiques, cette fonction peut être remplacée par la paramétrisation de Manning-Strickler $\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}$, où la valeur $\phi_{MS} = 0.2$ peut être choisie pour les deux valeurs de α_f considérées.

Rough regimes are obtained in the limit of large Reynolds numbers Re such that λ only depends on Ru . The function $\lambda(Ru)$ for infinite Re is shown on Figure 3.9 for $\alpha_f = 3.7$ et $\alpha_f = 3$. For the values $Ru \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ that are useful for practical applications, this function can be replaced by the Manning-Strickler parametrization $\lambda = \phi_{MS} Ru^{1/3}$, where the value $\phi_{MS} = 0.2$ can be chosen for the two considered values.

3.2 Hydraulique en charge

Hydraulic in pipes

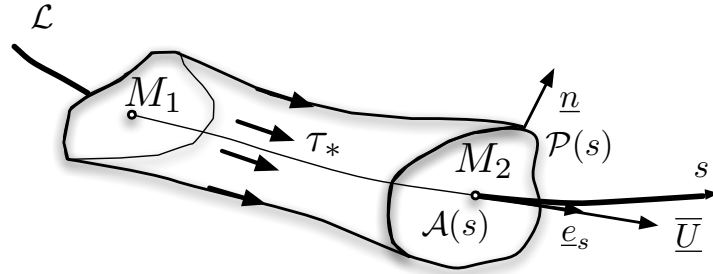


FIG. 3.10 – Écoulement dans une conduite.

Flow in a pipe.

L'utilisation des diagrammes de Moody est très répandue pour modéliser les écoulements en charge dans des conduites. On écrit tout d'abord les équations de Navier-Stokes incompressibles et turbulentes sous la forme

The use of the Moody diagram is very common to model the flows confined in pipes. One first writes the incompressible and turbulent Navier-Stokes equations under the form

$$\operatorname{div} \underline{\bar{U}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{\bar{U}}}{\partial t} + \underline{\bar{U}} \cdot \operatorname{grad} \underline{\bar{U}} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \bar{p} - \operatorname{grad} (gz) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\bar{\tau}} \quad , \quad (3.35)$$

où $\underline{\bar{\tau}} = \rho(2\nu \underline{\bar{d}} - \underline{R})$ et $\underline{\bar{d}}$ sont respectivement les moyennes de Reynolds du tenseur des contraintes visqueuses et turbulentes et du tenseur de taux de déformations. On considère une ligne de courant \mathcal{L} qui va d'un point M_1 vers un point M_2 . En utilisant l'identité $\underline{\bar{U}} \cdot \operatorname{grad} \underline{\bar{U}} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \underline{\bar{U}}^2 + \operatorname{rot} \underline{\bar{U}} \wedge \underline{\bar{U}}$, on montre "la relation de Bernoulli"

where $\underline{\bar{\tau}} = \rho(2\nu \underline{\bar{d}} - \underline{R})$ and $\underline{\bar{d}}$ are respectively the Reynolds averages of the viscous and turbulent stress tensor and of the deformation rate tensor. One considers a current line \mathcal{L} going from the point M_1 toward the point M_2 . Using the identity $\underline{\bar{U}} \cdot \operatorname{grad} \underline{\bar{U}} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \underline{\bar{U}}^2 + \operatorname{rot} \underline{\bar{U}} \wedge \underline{\bar{U}}$, one shows the "Bernoulli relation"

$$H(M_2) - H(M_1) = \int_{\mathcal{L}} \operatorname{grad} H \cdot d\underline{M} = - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{\bar{U}}}{\partial t} + \underline{\bar{J}} \right) \cdot d\underline{M} \quad , \quad (3.36)$$

où $\underline{\bar{J}} = -\frac{1}{\rho g} \operatorname{div} (\underline{\bar{\tau}})$ et où H est la "charge hydraulique" définie par la relation

where $\underline{\bar{J}} = -\frac{1}{\rho g} \operatorname{div} (\underline{\bar{\tau}})$ and where H is the "hydraulic head" defined by the relation

$$U(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \overline{U} \cdot \underline{e}_s dS \quad , \quad \alpha(s) = \frac{1}{U^2(s)} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \overline{U}^2 dS \quad . \quad (3.39)$$

On définit la perte de charge linéique moyenne $J(s)$ due aux frottements par la relation

One defines the averaged lineic head loss $J(s)$ due to the friction by the relation

$$J(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \overline{J} \cdot \underline{e}_s dS = -\frac{1}{\rho g} \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}(s)} \underline{\text{div}} \overline{\underline{\tau}} \cdot \underline{e}_s dS \quad . \quad (3.40)$$

On définit ensuite la contrainte de cisaillement moyenne $\tau_*(s)$ exercée par le fluide sur la paroi par la relation

One then defines the averaged mean shear constraint $\tau_*(s)$ applied by the fluid on the wall by the relation

$$\tau_*(s) = -\frac{1}{P(s)} \int_{\mathcal{P}(s)} \underline{e}_s \cdot \overline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dl \quad , \quad (3.41)$$

où \underline{n} est le vecteur unitaire normal à la paroi de la conduite dirigé vers l'extérieur.

where \underline{n} is the unit vector normal to the wall of the pipe pointing towards the exterior.

On suppose maintenant que la turbulence de l'écoulement est stationnaire et pleinement développée et que la forme de la conduite change lentement en fonction de s (écoulement graduellement varié).

One now assumes that the turbulence of the flow is stationary and fully developed and that the shape of the pipe varies slowly as a function of s (gradually varied flow).

On constate alors que le profil de vitesse \overline{U} est presque plat, si bien que le coefficient $\alpha(s)$ est proche de la valeur $\alpha = 1$ et que le vecteur unitaire \underline{e}_s est presque constant sur une section $\mathcal{A}(s)$. L'hypothèse "d'écoulement graduellement varié" entraîne, en particulier, que $\frac{\partial}{\partial s}(\underline{e}_s \cdot \overline{\underline{\tau}} \cdot \underline{e}_s)$ est négligeable. L'application du théorème de la divergence sur une petite portion de conduite entraîne alors à l'importante relation

One then notices that the velocity profile \overline{U} is nearly flat, such that the coefficient $\alpha(s)$ is close to the value $\alpha = 1$ and that the unit vector \underline{e}_s is nearly constant on a section $\mathcal{A}(s)$. The "gradually varying flow" hypothesis implies, in particular, that $\frac{\partial}{\partial s}(\underline{e}_s \cdot \overline{\underline{\tau}} \cdot \underline{e}_s)$ is neglectable. The application of the divergence theorem on a small portion of the pipe the leads to the important relation

$$\tau_*(s) = \rho g R_H(s) J(s) \quad . \quad (3.42)$$

La paramétrisation du frottement moyen $\tau_*(s)$ en fonction de $U(s)$, $D_H(s)$, $Re(s) = U(s)D_H(s)/\nu$ et $Ru(s) = k_s/D_H(s)$ équivaut donc à la paramétrisation de la perte de charge linéique moyenne $J(s)$.

The parametrization of the mean friction $\tau_*(s)$ as a function of $U(s)$, $D_H(s)$, $Re(s) = U(s)D_H(s)/\nu$ et $Ru(s) = k_s/D_H(s)$ is equivalent to the parametrization of the averaged lineic head loss $J(s)$, which is summed up by the relations

Pour des écoulements stationnaires ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulents ($\alpha \sim 1$) et graduellement varié ($\tau_s = \rho g R_H J$) on peut donc écrire

For stationary ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), turbulent ($\alpha \sim 1$) and gradually varying ($\tau_s = \rho g R_H J$) flows, one can then write

$$H = \frac{p_f}{\rho g} + Z_f + \frac{U^2}{2g} \quad , \quad \frac{dH}{ds} = -J \quad , \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H} \quad . \quad (3.43)$$

Ces relations, où λ est issu du diagramme de Moody, constituent le premier pas pour un calcul de pertes de charges dans un réseau en charge.

These relations, where λ is coming out the Moody diagram is a first step in the computation of a pipe network.

3.3 Pertes de charge singulières

Singular head loss

Pour calculer les pertes de charges dans un réseau, il faut aussi prendre en compte, en plus des portions de conduites lentement variables en espace, des singularités comme les élargissements brusques, les coudes ou encore les jonctions. La charge y subit une diminution brusque que l'on modélise par une perte de charge singulière et que l'on doit paramétrer pour chaque géométrie. On exprime souvent la perte de charge singulière sous la forme

To compute the head losses in a pipe network, one must also take into account, in addition to the slowly variable in space duct parts, singularities such as the sharp widenings, the bends and other singularities of the network. The head then undergoes a sharp decrease that one models by a singular head loss that must be parametrized for each geometries. One often expresses the singular head loss under form

$$\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g} = K_g \frac{Q^2}{2g A^2}, \quad (3.44)$$

où U et A sont respectivement la vitesse et la section en amont de la singularité, K_g le coefficient de perte de charge singulière et $Q = U A$ le débit.

where U and A are respectively the velocity and the section upstream of the singularity, K_g the singular head loss coefficient and $Q = U A$ the flow discharge.

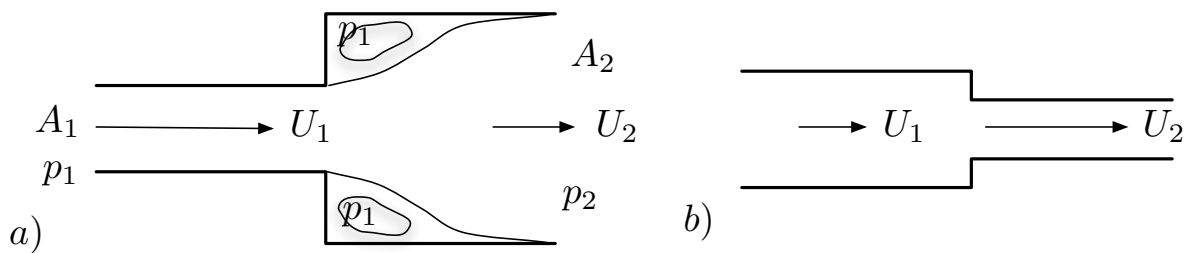


FIG. 3.12 – a) Perte de charge singulière dans un élargissement brusque. b) Pas de perte de charge singulière dans un rétrécissement.

a) Singular head loss un a sharp widening. b) No singular head loss in a sharp narrowing.

Dans le cas d'un élargissement brusque, on peut donner une estimation de la perte de charge singulière en supposant que la pression du fluide dans la zone de recirculation est approximativement égale à la pression d'entrée p_1 . Dans ce cas, un bilan global de quantité de mouvement (théorème d'Euler) sur un domaine englobant la singularité conduit à

In the case of a sharp widening, one can give an estimation of the singular head loss by assuming that the fluid pressure in the recirculation zone is approximatively equal to the entrance pressure p_1 . In this cas, a global momentum budget (Euler theorem) on a domain including the singularity leads to

$$\rho U_1^2 A_1 + p_1 A_2 = \rho U_2^2 A_2 + p_2 A_2 . \quad (3.45)$$

On en déduit la perte de charge singulière | One deduces of this the singular head loss

$$\Delta H = \frac{(U_2 - U_1)^2}{2g} = K_g \frac{U_1^2}{2g} \quad \text{avec} \quad K_g = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 . \quad (3.46)$$

Dans le cas d'un rétrécissement de section, on peut considérer que la perte de charge singulière est négligeable. | In the case of a section sharpening, one can consider that the singular head loss is not neglectable.

Dans le cas d'un coude de rayon de courbure ρ_c et de déviation φ , on peut utiliser la formule $K_g = \frac{\varphi}{\pi/2} \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{2\rho_c}{D_H}\right)^{-3.5}\right]$ pour le coefficient de perte de charge singulière. | In the case of a bend of radius of curvature ρ_c and of deviation φ , one can use the formula $K_g = \frac{\varphi}{\pi/2} \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{2\rho_c}{D_H}\right)^{-3.5}\right]$ for the singular head loss coefficient.

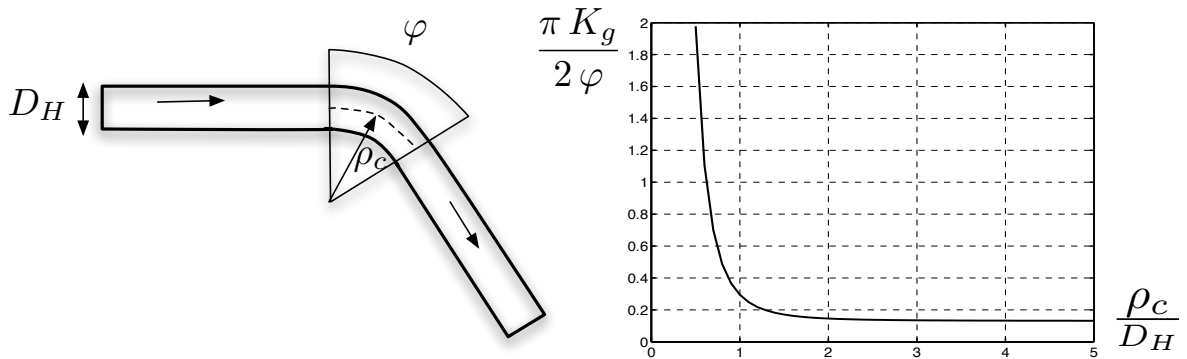


FIG. 3.13 – Perte de charge singulière dans un coude.

Singular head loss in a bend.

FORMULAIRE

FORMULAS

Modélisation turbulente

Turbulence modelling

Moyenne et fluctuations :

Mean and fluctuations :

$$B = \bar{B} + B' , \quad \underline{U} = \bar{\underline{U}} + \underline{U}' .$$

Diffusion turbulente :

Turbulent diffusion :

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \bar{\underline{U}} \cdot \text{grad } \bar{B} = k_B \Delta \bar{B} - \text{div} (\bar{\underline{U}' B'}) , \quad \underline{E}_{Bt} = \overline{\underline{U}' B'} = -k_{Bt} \text{grad } \bar{B} .$$

22 CHAPITRE 3. TURBULENCE ET FROTTEMENT (TURBULENCE AND FRICTION)

Tenseur de Reynolds : | Reynolds tensor :

$$\operatorname{div} \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{U} + \bar{U} \cdot \operatorname{grad} \bar{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \bar{p} - \operatorname{grad} (gz) + \nu \Delta \bar{U} - \operatorname{div} \underline{R}.$$

Viscosité turbulente : | Turbulent viscosity :

$$R_{ij} = \overline{U'_i U'_j} = -2\nu_t \bar{d}_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad k = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{R} = \frac{1}{2} (\overline{U_1'^2} + \overline{U_2'^2} + \overline{U_3'^2}).$$

Profils de vitesses

Velocity profiles

Longueur de mélange : | Mixing length :

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2 \bar{d} : \bar{d}}.$$

Écoulement parallèle : | Parallel flow :

$$\overline{u'w'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|.$$

Loi de Von Karman : | Von Karman law :

$$l_m = \kappa z, \quad \kappa = 0.41.$$

Fond plat : | Flat bottom :

$$\tau(z) = \rho \left(\nu + \kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \tau_* - Gz \sim \tau_*, \quad \tau_* = \rho u_*^2.$$

Lisse ou rugueux : | Smooth or rough :

$$\frac{u_* k_s}{\nu} < 5, \quad z_{vis} = 11 \frac{\nu}{u_*}, \quad \frac{u_* k_s}{\nu} > 70, \quad z_0 = k_s/33.$$

$$\frac{\bar{u}_{sth}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5.2, \quad \frac{\bar{u}_{rgh}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8.5.$$

Diagramme de Moody

Moody diagram

Coefficients de frottement : | Friction coefficients :

$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f \rho U^2 = \frac{1}{8} \lambda \rho U^2.$$

Fond lisse : | Smooth bottom :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{sth}}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}} \right) , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} .$$

Fond rugueux : | Rough bottom :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{rgh}}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{Ru}{\alpha_f} \right) , \quad Ru = \frac{k_s}{D_H} .$$

Formule de Colebrook : | Colebrook formula :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log_{10} \left(\frac{Ru}{\alpha_f} + \frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}} \right) .$$

Hydraulique en charge

Confined hydraulics

Charge hydraulique moyenne : | Averaged hydraulic load :

$$H(s) = \frac{p_f(s)}{\rho g} + Z_f(s) + \alpha(s) \frac{U^2(s)}{2g} .$$

Écoulement stationnaire : | Stationary flow :

$$\frac{dH}{ds} = -J \quad \text{avec} \quad H = \frac{p_f}{\rho g} + Z_f + \frac{U^2}{2g} , \quad J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2g D_H} .$$

Écoulement graduellement varié : | Gradually varying flow :

$$\tau_*(s) = \rho g R_H(s) J(s) .$$

Perte de charge singulière : | Singular head loss :

$$\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g} = K_g \frac{Q^2}{2g A^2} .$$

EXERCICES

EXERCISES

EXERCICE 3.1 | Dégazage en mer

Un pétrolier largue en mer $M = 10$ tonnes de résidus d'hydrocarbures. Il maintient sa vitesse de croisière dans la direction x et déverse cette pollution sur une longueur $L = 1$ km (voir figure 3.14).

Le polluant, plus léger que l'eau de la mer, reste en surface, et l'on suppose donc qu'il est advecté par un champ 2D turbulent $\underline{U}(x, y, t) = \overline{U} + \underline{U}'$ de moyenne \overline{U} et de divergence $\text{div } \underline{U}$ nulles. On note $C = \overline{C} + C'$ la décomposition en moyenne et fluctuations turbulentes de la concentration surfacique $C(x, y, t)$. On modélise l'advection du scalaire passif par cette turbulence à l'aide d'un coefficient de diffusivité turbulente k_{Ct} que l'on suppose constant et égal à $k_{Ct} = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. On note $k = k_C + k_{Ct}$ et on suppose que la diffusivité moléculaire k_C du polluant est très petite devant k_{Ct} .

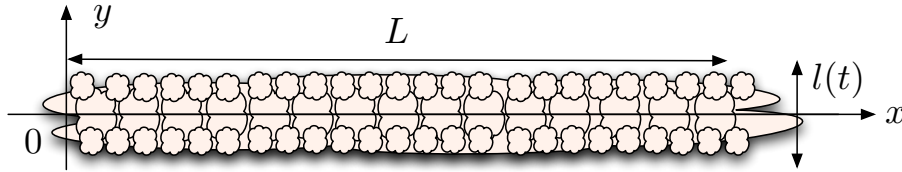


FIG. 3.14 – Croissance d'une panache de pollution 1D

À $t = t_0$, on suppose que la concentration surfacique (kg/m^2) moyenne du polluant peut être modélisée par le profil $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$ avec $\overline{C}_0(y) = C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right)$ et $l_0 = 1 \text{ m}$. Cette modélisation 1D est justifiée par le fait que l_0 est petit devant L . On souhaite calculer l'évolution de la concentration moyenne $\overline{C}(y, t)$ que l'on suppose donc indépendante de x sur le domaine d'étude considéré.

- 1) Exprimer C_m en fonction de M et l_0 et indiquer sa valeur numérique. Écrire l'équation d'advection-diffusion de C . Moyenner cette équation. En déduire l'équation de diffusion turbulente qui régit $\overline{C}(y, t)$.

On doit avoir $M = L \int_{-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right) dy = \sqrt{2\pi} C_m L l_0$ d'où $C_m = M/(\sqrt{2\pi} L l_0) \sim 4 \text{ kg}/\text{m}^2$. La moyenne de l'équation $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\underline{U} C) = k_C \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$ s'écrit $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u' C'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v' C'}) = k_C \left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}\right)$. Comme $\underline{C}(y, t)$ ne dépend pas de x , la modélisation du flux turbulent $\underline{F}_{Ct} = \overline{U' C'} = -k_{Ct} \text{grad } \underline{C}$ conduit à $\overline{u' C'} = 0$ et $\overline{v' C'} = -k_{Ct} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y}$. L'équation de diffusion turbulente s'écrit donc $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = (k_C + k_{Ct}) \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} = k \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$.

- 2) Montrer que $\overline{C}(y, t) = C_m \frac{l_0}{l(t)} \exp\left[-\frac{y^2}{2l^2(t)}\right]$ est solution de l'équation de diffusion turbulente lorsque $l^2(t) = 2kt$. On pourra poser $\overline{C} = A(t) \exp[-\varphi(y, t)]$. Comment choisir l'origine des temps, à travers la valeur de t_0 , pour que cette solution vérifie la condition initiale $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$. En déduire le temps T au bout duquel le maximum de concentration $\overline{C}(y, T)$ est en-dessous du seuil de détection $C_d = 0.2 \text{ kg}/\text{m}^2$ du polluant par les satellites, valable uniquement de jour. Est-il possible de dégazer de nuit, sans être détecté de jour ?

En reportant dans l'équation $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$, on obtient $A'(t) - A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y, t) = k A(t) \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right]$. Si $A(t) = C_m \frac{l_0}{\sqrt{2kt}}$ et $\varphi(y, t) = \frac{y^2}{4kt}$, l'équation s'écrit $-\frac{l_0}{2t\sqrt{2kt}} + \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \frac{y^2}{4kt^2} = k \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \left(-\frac{1}{2kt} + \frac{y^2}{4k^2 t^2}\right)$ et se trouve donc bien vérifiée. Comme $l^2(t) = 2kt$, on choisit t_0 tel que $l(t_0) = l_0$, c'est-à-dire $t_0 = l_0^2/(2k) = 50 \text{ s}$. La concentration maximale $\overline{C}(0, t) = C_m l_0/l(t)$ atteint le seuil C_d lorsque $l(t)/l_0 = C_m/C_d$. Ce seuil est atteint au temps $t = t_0 + T$ tel que $l(t_0 + T) = \sqrt{2k(t_0 + T)} = l_0 C_m/C_d$. On a donc $T = [l_0^2/(2k)] [(C_m/C_d)^2 - 1] \sim 2 \cdot 10^4 \text{ s} \sim 5\text{h}30$. Ce temps est inférieur à la durée de la nuit. Il faut augmenter la capacité de détection des satellites.

EXERCICE 3.2 Dimensionnement d'un émissaire en mer

On cherche à dimensionner un émissaire en mer servant à évacuer une cuve d'eaux usées dont la surface libre est située à la cote $Z_{cuv} = 20$ m, la surface libre de la mer étant située à la cote $Z_{mer} = 0$ m. On note D le diamètre de l'émissaire et d la distance de son exutoire à la côte. On suppose que l'émissaire est posé sur une bathymétrie en pente douce.

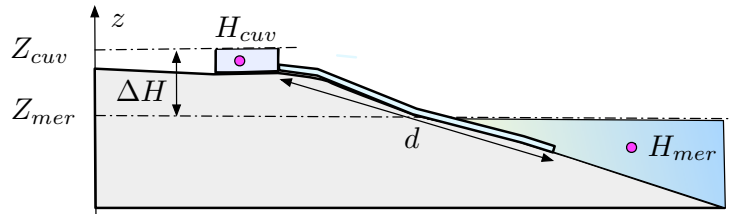


FIG. 3.15 – Émissaire reliant une cuve à la mer.

- 1) En supposant que la pression atmosphérique p_a est constante, exprimer les charges H_{cuv} et H_{mer} aux cotes respectives Z_{cuv} et Z_{mer} . On suppose que, loin des extrémités du tuyau, la cuve et la mer sont au repos. En déduire que la perte de charge ΔH dans l'émissaire est indépendante de son débit.

On a $H_{cuv} = Z_{cuv} + p_a/(\rho g)$ et $H_{mer} = Z_{mer} + p_a/(\rho g)$. On a donc $\Delta H = (H_{cuv} - H_{mer}) = 20$ m.

- 2) On suppose que $D = 20$ cm, $d = 1$ km et que la taille moyenne des rugosités de la canalisation, en fer galvanisé, est $k_s = 0.2$ mm. Déterminer le débit de l'émissaire ainsi que le nombre de Reynolds de l'écoulement en utilisant le Diagramme de Moody (figure 3.16) ainsi que la limite rugueuse de la formule de Colebrook de l'hydraulique en charge. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

L'équilibre s'écrit $\Delta H/d = J$ avec $\Delta H/d = 0.02$ et $J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H}$. La rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.001$ puisque $D_H = D$. On doit donc résoudre $\Delta H/d = \lambda(U, D) \frac{U^2}{2gD_H}$ où la dépendance de λ en fonction de U et de D est donnée par le diagramme de Moody ou la formule de Colebrook avec $Re = UD/\nu$ et $Ru = k_s/D$.

Cette équation implicite en U se résout explicitement si l'on suppose que le Re est grand. Dans ce cas, le diagramme de Moody conduit à la valeur $\lambda = 0.02$, ce qui implique la valeur $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 2$ m/s. On en déduit $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 4 \cdot 10^5$. On vérifie sur le Diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.02$ est valide pour cette valeur du nombre de Reynolds et l'on voit que le rapport entre $\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}$ et Ru/α_f est d'environ 0.17 dans la formule de Colebrook avec $\alpha_f = 3.7$ et $\beta_f = 2.51$. On peut donc négliger le premier terme et calculer $\lambda = [-2 \log_{10}(Ru/\alpha_f)]^{-1/2} \sim 0.02$. La formule de Haaland conduit au même résultat à quelque pourcents près. Le débit est $Q = \pi D^2 U/4 \sim 0.06$ m³/s.

- 3) Reprendre le calcul avec une canalisation de diamètre $D = 1$ m, en béton grossier, avec $k_s = 1$ cm.

On a toujours $J = \Delta H/d = 0.02$ mais la rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.01$. Le diagramme de Moody indique alors la valeur $\lambda = 0.04$. On en déduit $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 3.2$ m/s et $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 2.2 \cdot 10^6$. On vérifie sur le diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.04$ est valide. Le débit devient $Q = \pi D^2 U/4 \sim 5$ m³/s.

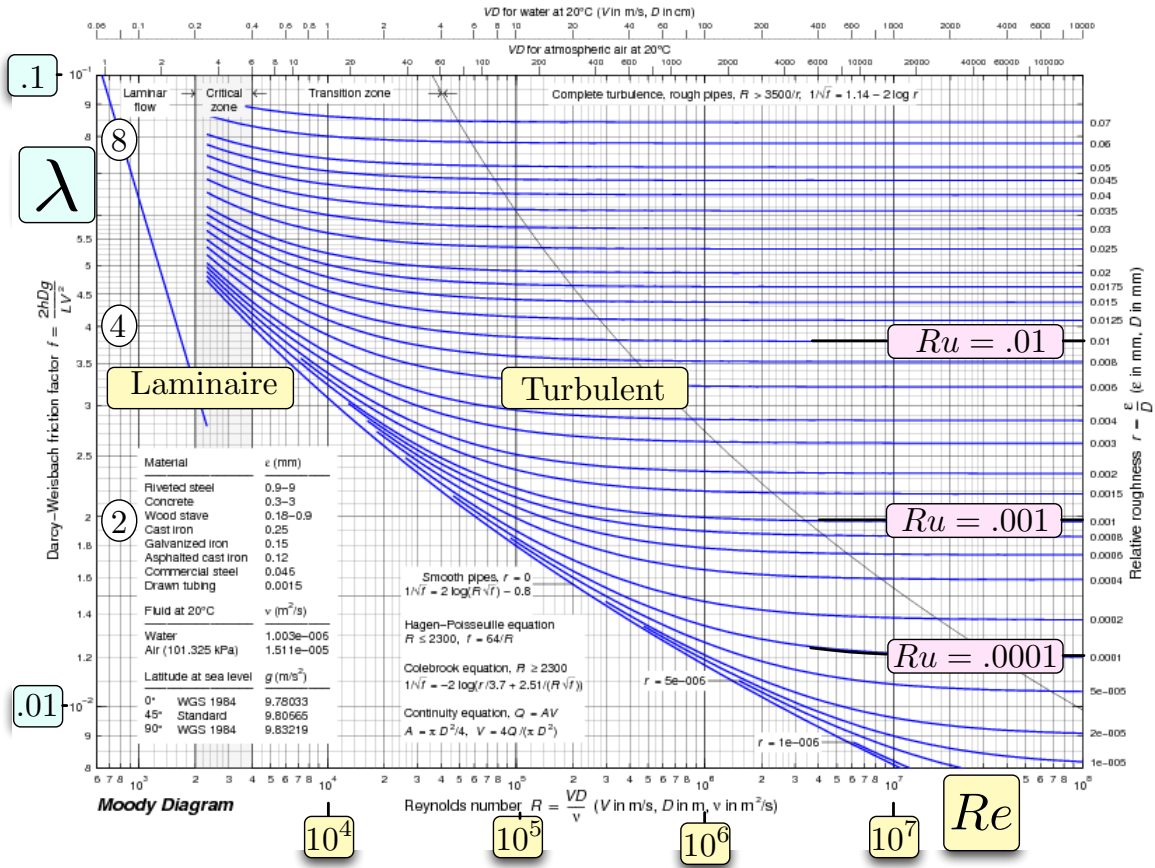


FIG. 3.16 – Diagramme de Moody. Coefficient de frottement λ en fonction de Re pour différentes valeurs de Ru . Diagramme de Tom Davis.

EXERCICE 3.3 Conduites d'une usine hydroélectrique

Une conduite en charge de longueur $d = 6$ km relie un lac situé à une cote $z = Z_l$ au-dessus d'une usine hydroélectrique située à un cote $z = Z_u$. On suppose que le dénivelé est $h = Z_l - Z_u = 300$ m. Le tuyau est en acier galvanisé avec $k_s = 1$ mm. Son diamètre est $D = 2$ m. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

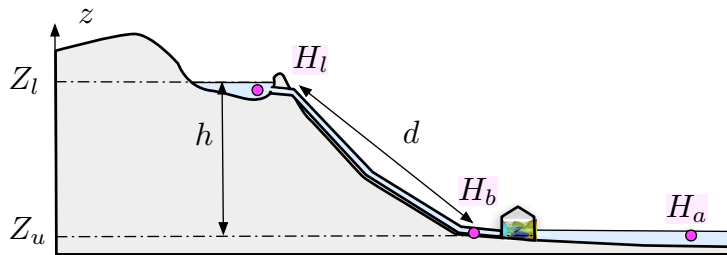


FIG. 3.17 – Lac, conduite forcée et usine hydroélectrique. Charges hydrauliques H_l, H_b et H_a en trois points.

- 1) On suppose que la vitesse dans la conduite est $U = 1$ cm/s. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Déterminer le coefficient de perte de charge λ . Calculer la perte de charge linéique.

Le nombre de Reynolds est $Re = UD/\nu = 2 \cdot 10^4$. Comme on a $Ru = 5 \cdot 10^{-4}$, on est en régime lisse. Le Diagramme de Moody conduit alors à la valeur $\lambda \sim 0.025$. On en déduit $J = \lambda \frac{U^2}{2gD} \sim 6 \cdot 10^{-8}$.

- 2) Exprimer la charge H_l du lac en notant p_a la pression atmosphérique. On note H_b la charge au bas de la conduite, juste avant l'usine. Exprimer H_b en fonction de H_l , de la vitesse U dans la conduite et de ses caractéristiques. Que vaut H_b si $U = 0$? Calculer la vitesse U_m lorsque $H_b = H_a$ où $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge du lac artificiel situé en aval de l'usine. Vérifier que le régime est rugueux. Comparer l'ordre de grandeur du terme $\frac{U^2}{2g}$ à la perte de charge totale.

On a $H_l = \frac{p_a}{\rho g} + Z_l$. La charge H_b vérifie $H_l = H_b + Jd$ avec $J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2gD}$. On a donc $H_b = H_l$ pour $U = 0$. Comme $Ru = 0.0005$, on lit, sur le diagramme de Moody, la valeur $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ en supposant que Re est grand. On a $-\frac{dH}{ds} = \frac{H_l - H_b}{d} = \frac{h}{d} \sim 0.05$. Comme la perte de charge due au frottement est $J = \lambda \frac{U_m^2}{2gD}$ et que $\frac{dH}{ds} = -J$ on en déduit $U_m = \sqrt{\frac{2gDh}{\lambda d}} \sim 11$ m/s. Comme $Re = U_m D/\nu = 22 \cdot 10^6$, on vérifie que l'on est bien en régime rugueux. Le terme $U_m^2/(2g) \sim 6$ m est petit devant la perte de charge $H_l - H_b = 300$ m.



FIG. 3.18 – Conduites forcées et centrale hydroélectrique.

- 3) La puissance récupérable par l'usine est $P = \beta \rho g (H_b - H_a) Q$ où H_b est la charge en bas de la conduite, $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge dans le lac artificiel situé en aval de l'usine, $\beta = 0.8$ est le rendement des turbines et Q le débit. Calculer le débit qui optimise la puissance produite par la centrale. Que vaut cette puissance? Vérifier que ce débit correspond à un régime rugueux.

La perte de charge dans la conduite est $H_l - H_b = Jd$. Comme $H_l = H_a + h$, on a donc $H_b - H_a = h - Jd$. La vitesse est liée à la perte de charge par la relation $J = \lambda \frac{U^2}{2gD}$. On suppose que le régime est rugueux et que donc $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ est indépendant de U . Le débit est $Q = \frac{\pi D^2}{4} U$. La puissance récupérable s'écrit donc $P = \beta \rho g \left(h - \frac{\lambda d}{2gD} U^2 \right) \frac{\pi D^2}{4} U$.

En dérivant cette expression par rapport à U , on voit que le maximum de puissance est atteint pour $Jd = h/3$, c'est-à-dire pour une perte de charge égale au tiers de la charge disponible. On en déduit que $\frac{\lambda d}{2gD} U^2 = h/3$ et donc $U = \sqrt{\frac{2ghD}{3d\lambda}} \sim 6.3$ m/s. Le débit est alors $Q \sim 20$ m³/s. La puissance maximale est alors $P_{max} = \beta \rho Q \frac{2h}{3} = \beta \rho g \frac{\pi D^2}{4} U \frac{2h}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} \beta \rho \sqrt{g^3 h^3 D^5 / (\lambda d)} \sim 3.2$ MW. Comme $Re = UD/\nu = 1.3 \cdot 10^7$, on est bien en régime rugueux, ce qui justifie l'hypothèse λ constant utilisée dans la dérivation de P par rapport à U .