

# Chapitre 2

## Écoulements potentiels

*O. Thual, 26 juin 2010*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Perte de charge . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1	Équation de Bernoulli . . . . .	3
1.2	Charge moyenne . . . . .	4
1.3	Loi de Darcy 1D . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Milieux poreux . . . . .</b>	<b>8</b>
2.1	Loi de Darcy 3D . . . . .	8
2.2	Écoulements confinés . . . . .	10
2.3	Écoulements non confinés . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Écoulements souterrains . . . . .</b>	<b>13</b>
3.1	Puits artésien . . . . .	13
3.2	Approximation de Dupuit . . . . .	14
3.3	Applications et limitations . . . . .	16

---

## Introduction

Le sous-sol est constitué d'un mélange de terre et de graviers à travers lequel l'eau s'infiltré et circule. Cette circulation est ici modélisée par des écoulements potentiels en milieu poreux. Ces écoulements, dont le champ de vitesse est le gradient d'un potentiel, se rencontrent en mécanique des fluides lorsque la vorticité (rotationnel de la vitesse) peut être négligée. C'est le cas des écoulements souterrains lents aux échelles grandes devant la taille des graviers.

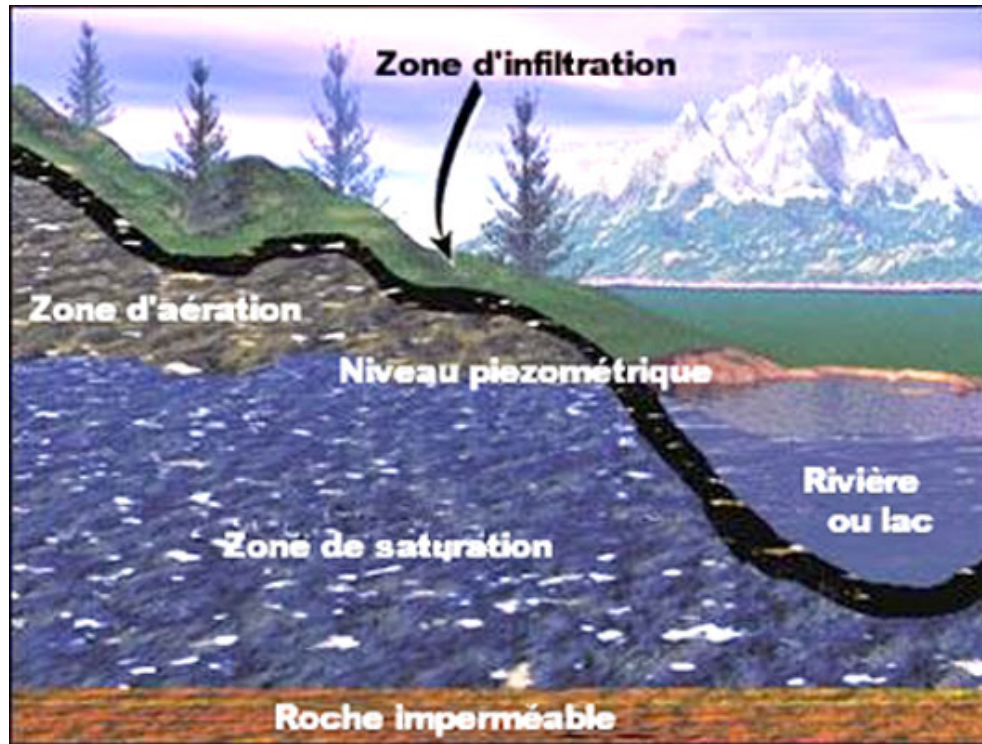


FIG. 2.1 – Nappe phréatique en contact avec une rivière ou un lac. Photo NASA GSFC.

Les notions de base de l'hydraulique souterraine sont présentées dans ce chapitre à l'aide d'exemples simples représentatifs de problèmes souterrains plus complexes. Seuls les écoulements lents, c'est-à-dire à faibles nombres de Reynolds, dans des milieux poreux isotropes et homogènes sont considérés.

La charge hydraulique des milieux poreux est présentée avec l'équation de

Bernoulli déduite des équations de Navier-Stokes laminaires. Comme la vitesse des écoulements est petite, la charge hydraulique est approximée par la hauteur piézométrique. La loi de Darcy, qui postule une relation linéaire entre le débit et la perte de charge, est présentée sur l'exemple simple d'un aquifère confiné coulant dans une seule direction. La généralisation de la loi de Darcy aux écoulements tri-dimensionnels dans des milieux poreux montre que la charge peut être vue comme le potentiel du champ de vitesse débitante. En appliquant la conservation de la masse, on montre que la perte de charge satisfait l'équation de Laplace.

La compréhension de la nature des conditions aux limites utilisées pour résoudre cette équation de Laplace est l'un des points clés de ce chapitre. Plusieurs exemples sont présentés.

## 1 Perte de charge

La loi de Darcy unidimensionnelle est présentée ici. Elle énonce que la vitesse débitante d'un écoulement dans un milieu poreux est proportionnelle à la perte de charge linéique.

### 1.1 Équation de Bernoulli

Nous prenons comme point de départ les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} \quad , \quad (2.1)$$

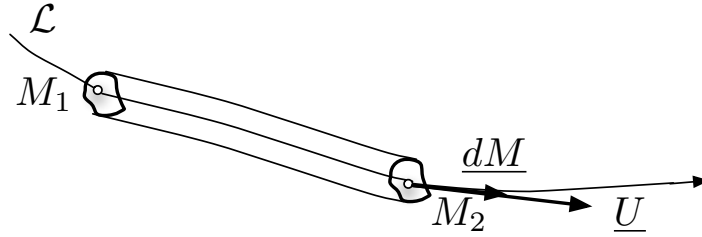
où les forces de volumes  $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\operatorname{grad} (gz)$  sont dues à la gravité.

Considérons une ligne de courant  $\mathcal{L}$  allant d'un point  $M_1$  à un point  $M_2$ . En utilisant la relation

$$\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2 + \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} \quad (2.2)$$

et la relation  $(\operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot d\underline{M} = \operatorname{rot} \underline{U} \cdot (\underline{U} \wedge d\underline{M}) = 0$ , on peut dériver "l'équation de Bernoulli"

$$\int_{\mathcal{L}} \operatorname{grad} H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left( -\frac{\partial U}{\partial t} + \nu \Delta U \right) \cdot d\underline{M} \quad , \quad (2.3)$$

FIG. 2.2 – Ligne de courant  $\mathcal{L}$  d'un écoulement laminaire.

où  $H$  est la “charge hydraulique” définie par la relation

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} U^2. \quad (2.4)$$

En intégrant le membre de gauche de l'équation de Bernoulli (2.3), on obtient

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M}, \quad \underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U}). \quad (2.5)$$

Le terme  $\underline{J}$  est la perte de charge linéique due aux frottements visqueux.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des écoulements tels que le terme d'accélération  $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$  est négligeable devant le terme des forces visqueuses  $\nu \Delta \underline{U}$  (écoulements à faibles nombres de Reynolds). C'est le cas des écoulements souterrains en milieu poreux. Pour de tels écoulements, on peut écrire

$$H \sim \frac{p}{\rho g} + z, \quad H(M_2) - H(M_1) \sim - \int_{\mathcal{L}} \underline{J} \cdot d\underline{M}. \quad (2.6)$$

## 1.2 Charge moyenne

Les particules fluides d'un écoulement souterrain dans un milieu poreux suivent des trajectoires complexes entre des graviers. Considérons une famille de trajectoires formant un tube de section  $\mathcal{A}(s)$  autour de la trajectoire moyenne  $\mathcal{L}$  paramétrisée par sa coordonnée curviligne  $s$  (figure 2.3).

Puisque le milieu est “poreux”, le fluide ne traverse qu'une section  $\mathcal{A}'(s)$  plus petite que  $\mathcal{A}(s)$ . Si  $\mathcal{A}'(s)$  et  $\mathcal{A}(s)$  sont, respectivement, les aires de ces deux sections, on note  $m = \mathcal{A}'/\mathcal{A} \leq 1$  la “porosité” du milieu.

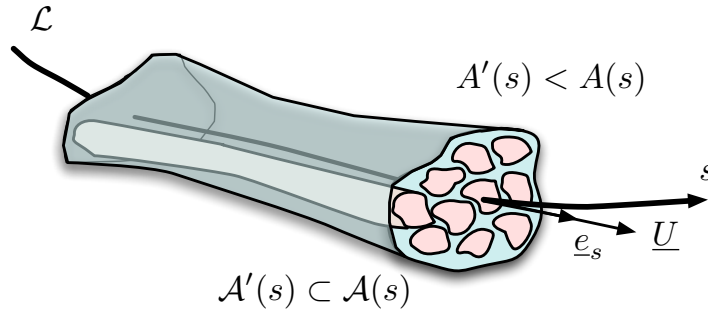


FIG. 2.3 – Tube de trajectoires dans un milieu poreux.

On note  $Q(s)$  le débit volumique dans la direction  $\underline{e}_s$ , où  $\underline{e}_s$  est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire  $\mathcal{L}$  et on le définit par

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (2.7)$$

La vitesse débitante  $U$  est alors définie par la relation

$$U(s) = \frac{Q(s)}{A(s)} = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (2.8)$$

On remarque que la vitesse réelle du fluide est, en moyenne, plus grande que cette vitesse débitante puisque  $A'(s) < A(s)$ .

La charge hydraulique moyenne de la section  $A(s)$  est définie par

$$H(s) \sim \frac{1}{A'} \iint_{\mathcal{A}'} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) dS = \frac{P_*(s)}{\rho g} = h_* , \quad (2.9)$$

où  $P_*(s)$  est la “pression piézométrique” et  $h_*(s)$  la “hauteur piézométrique”.

Cette hauteur piézométrique est l’altitude qu’atteindrait l’eau dans un puits ouvert à la pression atmosphérique, relativement à un plan situé à une distance  $p_a/(\rho g)$  en-dessous du zéro géographique  $z = 0$  (arbitraire) (voir figure 2.4). Dans certains ouvrages traitant de l’hydraulique, une jauge est choisie sur la pression de manière à avoir  $p_a = 0$ . Nous ne faisons pas ce choix dans cette présentation.

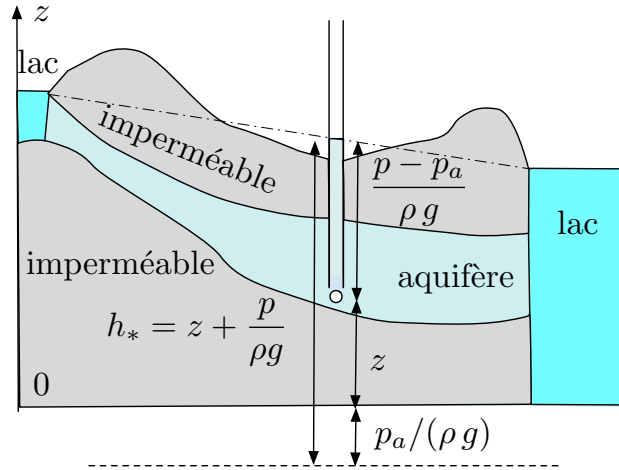


FIG. 2.4 – Hauteur piézométrique  $h_* = \frac{p}{\rho g} + z$  dans un aquifère.

On définit la “perte de charge linéique moyenne”  $J$  par la relation

$$J(s) = \frac{1}{A'} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{J} \cdot \underline{e}_s \, dS, \quad (2.10)$$

qui vérifie donc, pour un écoulement stationnaire, la relation

$$\frac{dH}{ds}(s) = -J(s). \quad (2.11)$$

### 1.3 Loi de Darcy 1D

On considère un écoulement lent quasi-1D obtenu en suivant un tube de trajectoires dans un milieu poreux. Si la section de ce tube est grande devant la taille des graviers ou fissures du milieu poreux, on peut, à partir d’observations expérimentales, modéliser la perte de charge de cet écoulement par la loi de Darcy unidimensionnelle qui s’écrit

$$J(s) = \frac{U(s)}{K_p(s)} \implies U(s) = -K_p(s) \frac{dH}{ds}(s), \quad (2.12)$$

où  $K_p$  est la “conductivité hydraulique” du milieu. Cette quantité a la dimension d’une vitesse. Par exemple, on peut choisir  $K_p = 20$  m/jour pour de l’eau

coulant dans du sable fin et  $K_p = 2$  km/jour pour de l'eau coulant entre des graviers. Le coefficient de "perméabilité intrinsèque"  $K_0 = K_p \nu / g$  est souvent considéré pour caractériser un milieu poreux dans la mesure où il ne dépend que de ses propriétés géométriques. Le milieu poreux est homogène si  $K_p$  est indépendant de l'espace.

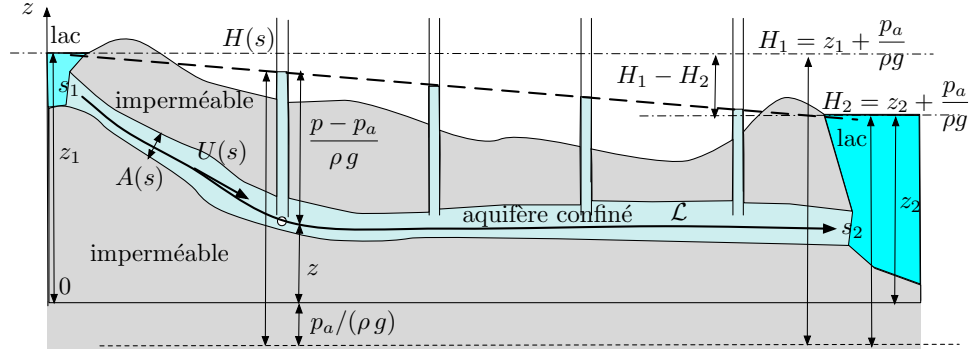


FIG. 2.5 – Profil de charge  $H(s)$ .

Comme premier exemple d'application de la loi de Darcy, nous considérons l'écoulement stationnaire dans un aquifère confiné par un milieu imperméable (par exemple de la roche) et coulant entre deux lacs (figure 2.5) d'altitudes respectives  $z_1 > z_2$ . On note  $A(s)$  l'aire de la section de la galerie dans laquelle coule le fluide. La conservation de la masse implique que le débit  $Q = A(s)U(s)$  est constant. La modélisation conduit alors au système d'équations

$$\frac{d}{ds}(AU) = 0 \quad , \quad U = -K_p \frac{dH}{ds} . \quad (2.13)$$

Pour résoudre ces équations, on doit considérer deux conditions aux limites qui sont

$$H(s_1) = H_1 \quad , \quad H(s_2) = H_2 , \quad (2.14)$$

où  $s_1$  et  $s_2$  sont les coordonnées curvilignes aux deux lacs.

Si le milieu poreux est homogène ( $K_p$  constant) et la section  $A(s)$  est constante, la solution est

$$H(s) = H_1 + \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2} (s - s_2) \quad , \quad U = -K_p \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2} . \quad (2.15)$$

## 2 Milieux poreux

Dans un milieu poreux, on peut définir une vitesse débitante en chaque point  $\underline{x} = (x, y, z)$  de l'espace à condition de se placer à des échelles plus grandes que celle des graviers ou fissures. En se plaçant à ces grandes échelles, nous notons désormais  $\underline{U}$  la “vitesse débitante” et nous ignorons la “vitesse réelle”. Contrairement à la vitesse réelle, le rotationnel de la vitesse débitante est nul, les termes de vorticité, associés aux couches limites de parois, étant relégués dans la modélisation des pertes de charge. L'écoulement est donc potentiel aux grandes échelles, ce que traduit la loi de Darcy.

### 2.1 Loi de Darcy 3D

Nous considérons uniquement des écoulements à faibles nombres de Reynolds, c'est-à-dire tels que le terme d'accélération  $\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$  peut être négligé dans les équations de Navier-Stokes qui s'écrivent alors

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \text{grad } \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) = \frac{1}{g} (\nu \Delta \underline{U}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{grad } H = -\underline{J}, \quad (2.16)$$

où  $H = \frac{p}{\rho g} + z$  est la charge hydraulique et  $\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U})$  le vecteur perte de charge linéique d  aux frottements visqueux.

Nous nous plaçons maintenant à une échelle spatiale “macroscopique”, grande devant la taille des graviers ou fissures du milieu poreux qui définit l'échelle “microscopique”. Nous utiliserons désormais la notation  $\underline{U}$  pour désigner la “vitesse débitante” obtenue en moyennant spatialement, à l'échelle macroscopique, la “vitesse réelle” que nous ignorons désormais, si ce n'est pour signaler qu'elle est localement plus intense à l'échelle microscopique.

La vitesse débitante vérifie également  $\text{div } \underline{U} = 0$ . En revanche, le vecteur perte de charge linéique moyenné à l'échelle macroscopique, que nous noterons désormais  $\underline{J}$  en ignorant le vecteur perte de charge linéique réel, n'est pas relié à la vitesse  $\underline{U}$  par un Laplacien comme c'était le cas à son échelle microscopique. Les observations expérimentales permettent de l'exprimer à l'aide de la loi de Darcy tridimensionnelle (3D) qui s'écrit

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)} \underline{U}(\underline{x}, t), \quad (2.17)$$



où  $K_p$  est la conductivité hydraulique du milieu poreux. La modélisation d'un milieu anisotrope peut être obtenue en remplaçant  $1/K_p$  par un tenseur d'ordre deux (une matrice). Nous ne considérons pas ce cas dans cette présentation.

Nous noterons désormais  $H$  la “charge hydraulique moyenne” définie par

$$H = \frac{p}{\rho g} + z, \quad (2.18)$$

où  $p$  désigne désormais la pression moyenne à l'échelle macroscopique. À l'échelle macroscopique, la moyenne des équations (2.16) combinée à la loi de Darcy (2.17) conduit à

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \underline{U} = -K_p \operatorname{grad} H. \quad (2.19)$$

Quand le milieu poreux est homogène ( $K_p$  constant), ce que nous supposons désormais, l'élimination de la vitesse  $\underline{U}$  entre ces deux relations conduit à l'équation de Laplace

$$\Delta H = 0 \quad , \quad H = \frac{p}{\rho g} + z. \quad (2.20)$$

Comme l'équation de Laplace est elliptique, on doit spécifier des conditions aux limites sur toute la frontière du domaine étudié.

Les trajectoires sont perpendiculaires aux surfaces iso- $H$  (figure 2.6). On démontre que si l'on peut inscrire un cercle dans un “carreau” délimité par deux iso- $H$  et deux trajectoires, on peut inscrire un cercle dans chacun des autres “carreaux”. Cette propriété permet de résoudre graphiquement l'équation de Laplace par la “méthode des cercles”.

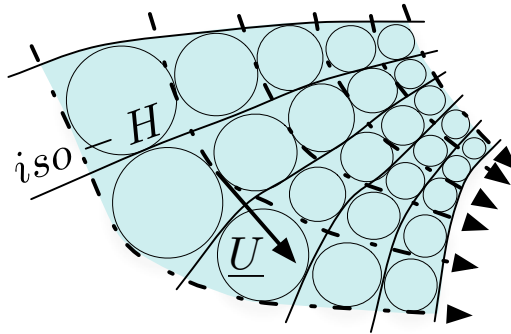


FIG. 2.6 – Orthogonalité entre les  $H$  et les trajectoires et méthode des cercles.

## 2.2 Écoulements confinés

On considère un écoulement stationnaire dans un milieu homogène et isotrope et on suppose ici que l'écoulement souterrain est confiné entre des frontières imperméables ou des couches d'eau de surface telles qu'un lac ou une rivière.

À l'interface entre l'aquifère et les frontières imperméables, la vitesse normale s'annule. Les conditions aux limites sur l'interface sont donc

$$\text{grad } H \cdot \underline{n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad / \text{ interface} . \quad (2.21)$$

Ce sont des conditions aux limites de "Neumann" pour le problème elliptique  $\Delta H = 0$ .

Comme les trajectoires traversent l'interface entre la couche d'eau de surface et l'aquifère, la charge doit être continue. Les conditions aux limites sur cette interface sont donc

$$H = H_i \quad / \text{ interface} , \quad (2.22)$$

où  $H_i$  est la charge de la couche d'eau de surface à l'interface. Ce sont des conditions aux limites de "Dirichlet" pour le problème elliptique  $\Delta H = 0$ .

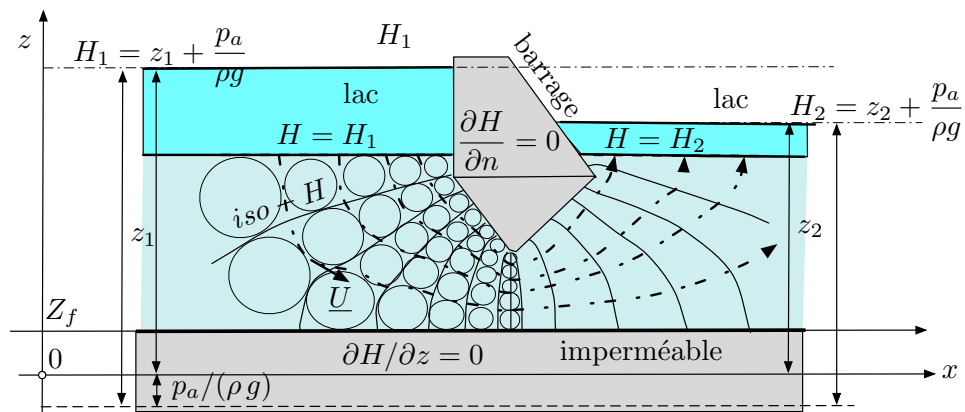


FIG. 2.7 – Iso- $H$  (traits pleins) et trajectoires (traits pointillées) d'un écoulement souterrain sous un barrage.

À titre d'exemple, considérons l'écoulement souterrain sous un barrage imperméable entouré de deux lacs dont les surfaces libres sont aux altitudes respectives  $z_1$  et  $z_2$  (voir figure 2.7). On suppose que les lacs sont au repos de

sorte que leurs pressions sont hydrostatiques et leurs charges constantes. On suppose qu'un fond imperméable est situé à la cote  $z = Z_f$  avec  $Z_f$  constant.

On suppose que l'aquifère est borné au fond par un milieu imperméable et que le problème est invariant par translation dans la direction  $y$  (écoulement 2D). L'écoulement va du premier lac, avec une charge égale à  $H_1 = z_1 + p_a/(\rho g)$ , vers un second lac à une charge égale à  $H_2 = z_2 + p_a/(\rho g) < H_1$ .

Nous devons résoudre  $\Delta H = 0$  avec la condition de Dirichlet  $H = H_1$  ou  $H = H_2$ , au fond des lacs, et avec la condition de Neumann  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$  sur toutes les surfaces imperméables.

Des solutions précises de ce problème sont obtenues par des simulations numériques, la littérature sur la résolution des problèmes elliptiques étant vaste. Mais les méthodes graphiques, développées à l'époque où il n'y avait pas d'ordinateurs, permettent de se faire une première idée de la solution. C'est le cas de la "méthode des cercles" qui peut être appliquée pour des géométries bi-dimensionnelles (voir figure 2.7).

### 2.3 Écoulements non confinés

On considère maintenant un aquifère dont la partie supérieure n'est pas confinée et dont la partie inférieure est délimitée par une frontière imperméable d'équation  $z = Z_f$ . La surface libre, située à l'intérieur du milieu poreux, est appelée la "nappe phréatique" et l'aquifère est qualifié de "phréatique". Nous ignorons ici la couche capillaire qui sépare le fluide et le milieu poreux sec et nous supposons que la nappe phréatique est une surface à la pression  $p_a$ . Nous considérons, dans cette présentation, que  $Z_f$  est constant.

L'existence d'une surface libre de nappe phréatique conduit à de nouvelles conditions aux limites. En effet, la position de cette surface, que nous notons à l'aide de l'équation  $z = Z_f + h(x, y)$ , est inconnue. Pour trouver cette nouvelle fonction, deux conditions aux limites au lieu d'une sont imposées à cette interface, qui s'écrivent

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad , \quad H = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} \quad / \quad \text{interface } z = Z_f + h(x, y), \quad (2.23)$$

puisque aucun écoulement ne traverse la surface libre stationnaire de la nappe phréatique et que la pression est égale à la pression atmosphérique. Nous

voions donc que la surface libre de la nappe phréatique est formée de trajectoires.

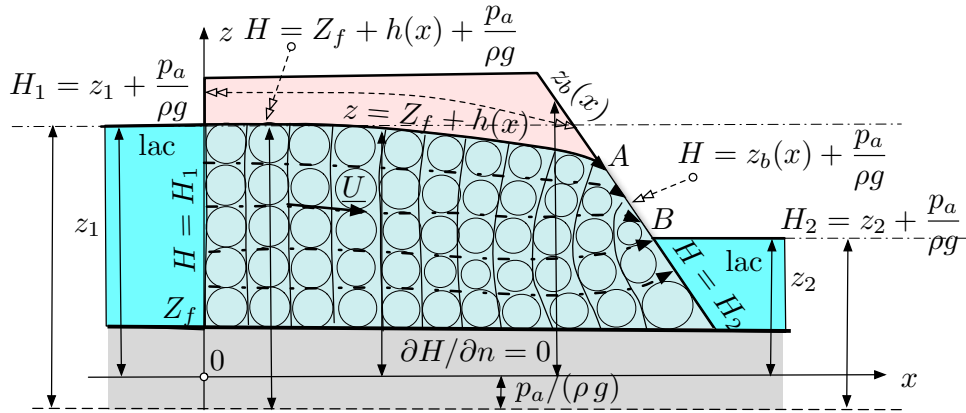


FIG. 2.8 – Iso- $H$  (traits pleins) et trajectoires (traits pointillés) dans un aquifère phréatique entre deux lacs.

À titre d'exemple, nous considérons un aquifère phréatique compris entre deux lacs au repos dont les surfaces libres sont aux altitudes respectives  $z_1$  et  $z_2$ . L'eau traverse un barrage poreux compris entre les plans  $x = 0$  et  $x = z_b(x)$  (voir figure 2.8). Les conditions aux limites  $\frac{\partial H}{\partial n}$  sur les interfaces imperméables et les conditions aux limites  $H = H_1$  et  $H = H_2$  aux interfaces avec les lacs sont aisées à comprendre. La position de la surface de la nappe phréatique  $z = Z_f + h(x)$  est obtenue en résolvant toute la famille de trajectoires issues de la condition  $H = H_1$  sur l'axe  $Oz$  et en choisissant celle qui débute en  $z = z_1$ .

La particularité de ce problème est le fait qu'il doit y avoir une "face de résurgence" représentée par le segment  $AB$  dans la figure 2.8. Cette face est en contact avec l'atmosphère et le fluide en émerge et y ruisselle vers le bas. En effet, il n'y a aucune raison pour que la trajectoire issue de  $z = z_1$  sur l'axe  $Oz$  coupe la surface oblique du barrage en un point  $A$  confondu avec le point  $B$ , sauf pour une valeur très particulière de  $z_1$ . Le long du segment  $AB$ , la condition aux limites est  $H = z_b(x) + \frac{p_a}{\rho g}$  puisque la pression est égale à la pression atmosphérique  $p_a$ .

### 3 Écoulements souterrains

Nous appliquons la loi de Darcy au cas des aquifères et des puits artésiens. Pour les nappes phréatiques, l'approximation de Dupuit permet la modélisation des surfaces libres à pentes faibles.

#### 3.1 Puits artésien

On appelle “aquifère artésien” un aquifère confiné entre deux milieux imperméables. Nous considérons ici un aquifère artésien alimenté par son contact avec un lac de charge  $H_0$ . Nous supposons que le fluide est initialement au repos et que sa charge est aussi partout égale à  $H_0$ .

Nous creusons alors un puits en un point éloigné du lac. Si la charge dans l'aquifère est suffisamment grande, le fluide montera naturellement le long du puits jusqu'à la surface du sol ou au-delà. Dans ce cas, on dit que le puits est “artésien”. Il n'est pas nécessaire de pomper pour obtenir de l'eau d'un tel puits.

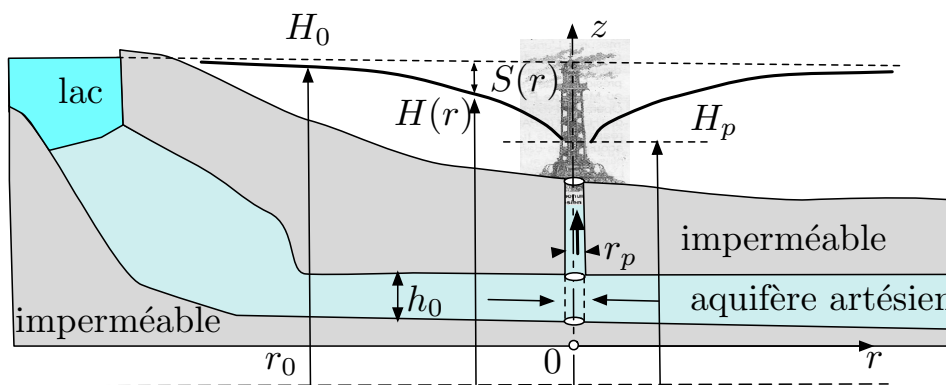


FIG. 2.9 – Courbe de rabattement  $S(r)$  pour un puits artésien.

On suppose que l'aquifère artésien est confiné entre deux plans horizontaux imperméables séparés par une distance  $h_0$  (voir figure 2.9). On suppose que le puits est un cylindre vertical de rayon  $r_p$  qui peut absorber l'eau sur toute l'épaisseur  $h_0$  de la couche.

Lorsque le débit  $Q$  n'est pas nul dans le puits, la charge n'est plus constante

et nous en supposons une distribution radiale  $H(r)$  où  $r$  est la distance à l'axe du puits. La condition aux limites  $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$  est donc satisfaite sur les interfaces imperméables.

On doit donc résoudre l'équation de Laplace

$$\Delta H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.24)$$

qui conduit à  $\frac{\partial H}{\partial r} = C/r$  où la constante d'intégration  $C$  doit être exprimée en fonction de  $Q$ . En utilisant la loi de Darcy  $\underline{U} = -K_p \text{grad } H = -K_p \frac{\partial H}{\partial r} \underline{e}_r$  et en intégrant le débit sur un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h_0$ , on trouve  $C = Q/(2\pi K_p h_0)$ .

On déduit alors la "courbe de rabattement"  $S(r)$  définie par "l'équation de Thiem"

$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad , \quad T = K_p h_0 \quad , \quad (2.25)$$

où  $r_0$  est la distance entre le puits et le lac. On déduit aussi une relation entre le débit du puits et la charge  $H_p$  au centre du puits qui s'écrit

$$S_p = H_0 - H_p = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left( \frac{r_0}{r_p} \right) \quad . \quad (2.26)$$

### 3.2 Approximation de Dupuit

On considère un aquifère phréatique compris entre un plan imperméable horizontal d'équation  $z = Z_f$  et sa surface libre d'équation  $z = Z_f + h(x, y)$ . Sur la surface libre de la nappe, la pression est égale à la pression atmosphérique  $p_a$ , ce qui équivaut à dire que la charge  $H(x, y, z) = z + p/(\rho g)$  est égale à  $H = Z_f + h(x, y) + p_a/(\rho g)$  pour  $z = Z_f + h(x, y)$ . Entre ces deux surfaces, la vitesse débitante est donnée par la loi de Darcy  $\underline{U}(x, y, z) = -K_p \text{grad } H(x, y, z)$ .

L'"approximation de Dupuit" s'applique à des configurations où la pente de la surface de la nappe phréatique est suffisamment petite pour considérer que les iso- $H$  sont presque verticales (figure 2.10). Dans ce cas, nous avons

$$H(x, y, z) \sim H(x, y) = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} \quad , \quad (2.27)$$

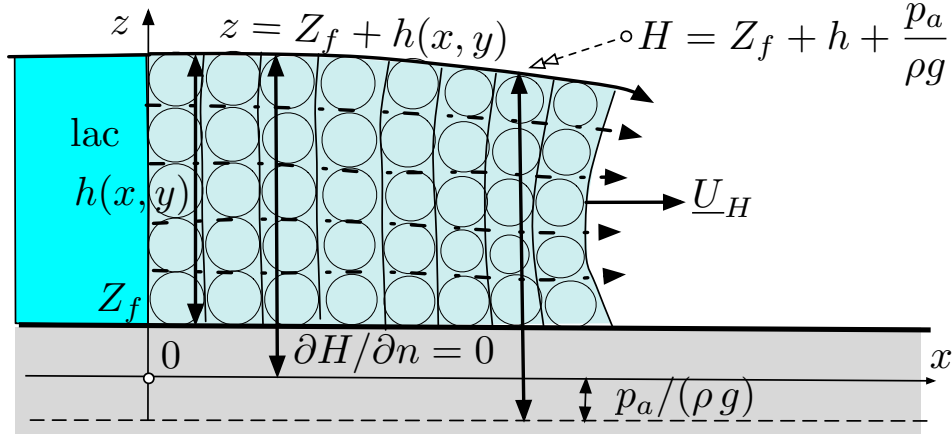


FIG. 2.10 – Approximation de Dupuit valide pour des iso- $H$  presque verticaux.

en appliquant les conditions aux limites à la surface. La vitesse débitante  $\underline{U} = -K_p \underline{\text{grad}} H$  est alors approximativement égale à la vitesse horizontale  $\underline{U}_H = -K_p \underline{\text{grad}} h$ .

Le vecteur débit linéique, intégré du fond d'équation  $z = Z_f$ , à la surface d'équation  $z = Z_f + h$ , est alors approximativement égal à  $\underline{q} = h \underline{U}_H$ . En intégrant l'équation  $\text{div } \underline{U} = 0$  de  $z = Z_f$  à  $z = Z_f + h$  et en écrivant que la vitesse normale à ces frontières est nulle, on montre que l'on a  $\text{div } \underline{q} = 0$ .

En notant  $U$  et  $V$  les deux composantes de  $\underline{U}_H$ , les équations d'un écoulement stationnaire obtenues sous l'approximation de Dupuit sont les deux équations  $\text{div } \underline{q} = 0$  et  $\underline{U}_H = -K_p \underline{\text{grad}} h$ , ce qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial}{\partial y} (h V) = 0, \quad U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.28)$$

Si le milieu poreux est homogène ( $K_p$  constant), ce que nous supposons ici, le carré de la hauteur  $h$  est solution de l'équation de Laplace horizontale

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h^2 = 0. \quad (2.29)$$

### 3.3 Applications et limitations

Comme exemple d'application de l'approximation de Dupuit, on considère d'abord un aquifère phréatique coulant d'un lac vers un **fossé prismatique** (figure 2.11). Nous supposons que l'interface imperméable du fond est le plan horizontal  $z = Z_f$  avec  $Z_f$  constant.

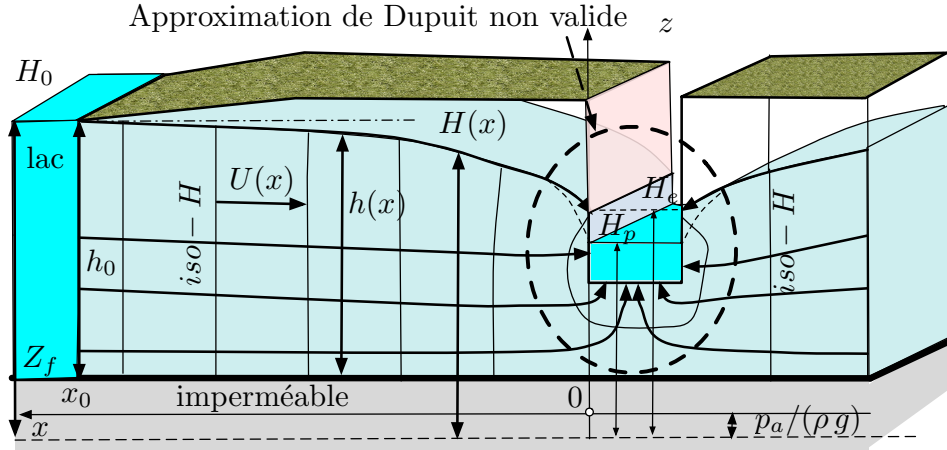


FIG. 2.11 – Écoulement vers un **fossé prismatique** dans un aquifère phréatique.

On note  $q$  le débit linéique du fossé dans la direction  $y$ . Nous supposons que le lac est à la charge  $H_0$  et nous notons  $x_0$  sa distance au fossé. On note  $h_0$  la distance entre le plan imperméable et la surface libre du lac. Nous avons donc  $H_0 = Z_f + h_0 + \frac{p_a}{\rho g}$ .

En comparant avec les solutions des équations exactes, on peut montrer que l'approximation de Dupuit est valide partout excepté près du fossé où la vitesse  $\underline{U}$  ne peut plus être considérée comme horizontale.

Pour les points où l'hypothèse de Dupuit est valide, la charge est égale à  $H = Z_f + h + p_a/(\rho g)$  les équations (2.28) s'écrivent

$$\frac{d}{dx} [U(x) h(x)] = 0 \quad , \quad U(x) = -K_p \frac{dH}{dx}(x) = -K_p \frac{dh}{dx}(x) \quad (2.30)$$



et peuvent être intégrées, en imposant une symétrie  $x \rightarrow -x$ , en

$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p} |x_0 - x|. \quad (2.31)$$

On en déduit alors la charge  $H_p$  au fossé obtenue dans le cadre de l'approximation de Dupuit. Bien que cette approximation ne soit pas valide près du puits, cette valeur  $H_p$  peut être utilisée pour déterminer le niveau d'eau dans le fossé en disant que  $z = Z_f + h_p = H_p - p_a/(\rho g)$  est l'altitude de la surface libre. La solution obtenue sans l'approximation de Dupuit met en évidence l'existence d'une "face de résurgence" de sorte que la surface de la nappe ne coïncide pas avec la surface de l'eau du fossé.

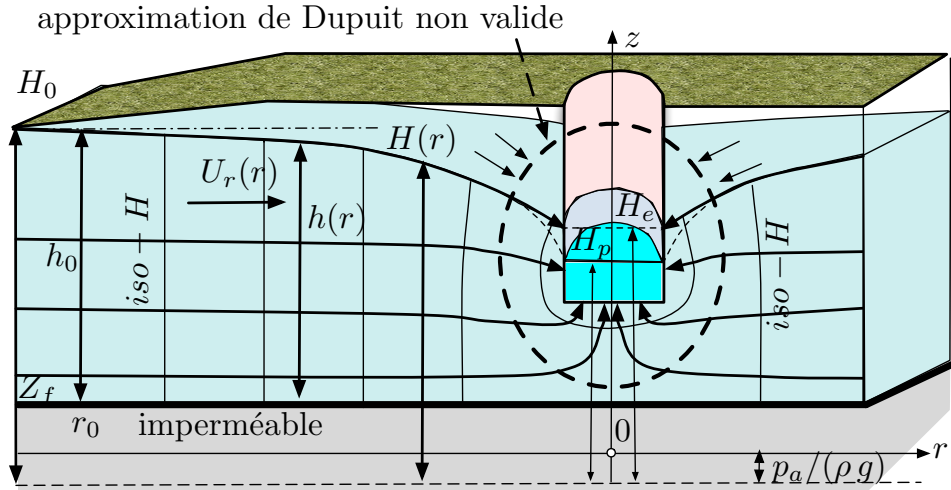


FIG. 2.12 – Vitesse  $\underline{U} = U_r \underline{e}_r$  d'un aquifère autour un puits vertical et cylindrique.

Si l'on remplace maintenant le fossé par un **puits vertical et cylindrique** (figure 2.12) dans lequel un débit  $Q$  est pompé, la vitesse radiale  $U_r(r)$  et la charge  $H(r)$  ne dépendent que du rayon  $r$ . Pour les points où l'approximation de Dupuit est valide, on a  $H = Z_f + h$  et les équations (2.28) s'écrivent

$$\frac{d}{dr} [r U_r(r) h(r)] = 0 \quad , \quad U_r(r) = -K_p \frac{dH}{dr}(r) = -K_p \frac{dh}{dr}(r). \quad (2.32)$$

En intégrant ces équations, on obtient

$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \text{Ln} \left( \frac{r_0}{r} \right). \quad (2.33)$$

## FORMULAIRE

### Perte de charge

Charge hydraulique :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2 \sim \frac{p}{\rho g} + z .$$

Équations de Navier-Stokes moyennées :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \operatorname{grad} H = -\underline{J} .$$

### Milieux poreux

Loi de Darcy :

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)} \underline{U}(\underline{x}, t) .$$

Écoulements lents :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \underline{U} = -K_p \operatorname{grad} H .$$

Milieu poreux homogène :

$$\Delta H = 0 \quad , \quad H = \frac{p}{\rho g} + z .$$

Conditions aux limites imperméables :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 .$$

Conditions aux limites de surface libre :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad , \quad H = Z_f + h + \frac{p_a}{\rho g} \quad / \text{ interface } z = Z_f + h(\underline{x}) .$$

## Écoulements souterrains

Puits artésien :

$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left( \frac{r_0}{r} \right) \quad , \quad T = K_p h_0 .$$

Approximation de Dupuit :

$$H(x, y, z) \sim H(x, y) = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} .$$

Dupuit et débit :

$$U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial}{\partial y} (h V) = 0 .$$

Dupuit homogène :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h^2 = 0 .$$

Fossé prismatique :

$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p} |x_0 - x| .$$

Puits cylindrique :

$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \text{Ln} \left( \frac{r_0}{r} \right) .$$

## EXERCICES

**EXERCICE 2.1** Aquifère artésien de section constante

On considère l'écoulement dans un aquifère confiné par des roches imperméables et s'écoulant dans un milieu poreux de section constante  $A$  (figure 2.13). L'aquifère est en contact avec un lac dont la surface libre est à la cote  $z_1$  en  $x = 0$ . Il en est de même en  $x = L$  avec un deuxième lac dont la surface libre est à la cote  $z_2$ . On suppose que le milieu poreux est homogène et que sa conductivité hydraulique est  $K_p$ .

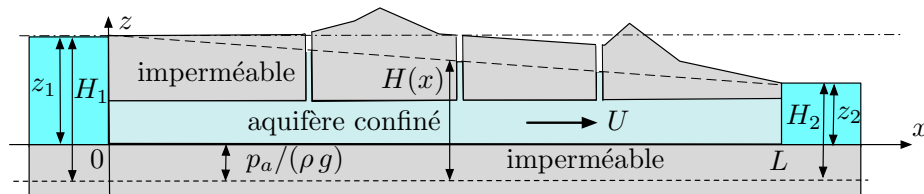


FIG. 2.13 – Aquifère confiné (artésien)

- 1) Calculer la charge hydraulique  $H(x)$  pour  $x \in [0, L]$  en supposant que l'écoulement est stationnaire. En déduire la vitesse débitante  $U$  de l'aquifère.

La charge en  $x = 0$  est  $H_1 = p_a/(\rho g) + z_1$ . La charge en  $x = L$  est  $H_2 = p_a/(\rho g) + z_2$ . La loi de Darcy  $U = -K_p \frac{dH}{dx}$  et la conservation de la masse  $\frac{d(UA)}{dx} = 0$  entraînent  $H = H_1 - x(H_1 - H_2)/L$  et  $U = K_p(H_1 - H_2)/L$ .

**EXERCICE 2.2** Percolation du café

On considère un percolateur cylindrique d'axe vertical et de section constante  $A$ . Il contient un milieu poreux de conductivité  $K_p$  et de porosité  $m = 0.1$  sur une hauteur  $L$  (figure 2.14a). À  $t = 0$ , le milieu poreux est surmonté d'une lame d'eau dont la surface libre est à la cote  $z = h_0$ . Le fond du percolateur est constitué d'une grille à travers laquelle s'écoule l'eau qui est ainsi en contact

avec la pression atmosphérique. On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la loi de Darcy soit valide comme dans le cas stationnaire.

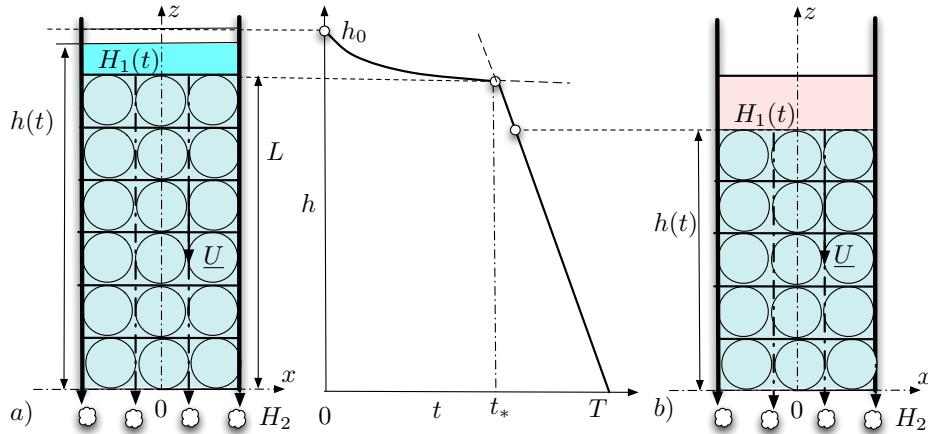


FIG. 2.14 – Percolation cylindrique : a) surmonté d'une couche d'eau, b) avec nappe phréatique.

- 1) Calculer le temps  $t_*$  au bout duquel la lame d'eau a disparu.

La charge en  $z \in [L, L + h]$  est  $H_1 = p_a/(\rho g) + h(t) + L$ . La charge en  $z = 0$  est  $H_2 = p_a/(\rho g)$ . La loi de Darcy  $U = -K_p \frac{\partial H}{\partial z}$  et la conservation de la masse  $\frac{\partial(UA)}{\partial z} = A \frac{\partial U}{\partial z} = 0$  entraînent  $U = -K_p h(t)/L$ . La hauteur  $h(t)$ , qui est gouvernée par la vitesse des particules de la surface libre, obéit à la loi  $\frac{dh}{dt} = U = -K_p h/L$  pour  $h \geq L$ . On en déduit  $h(t) = h_0 \exp(-K_p t/L)$ . On a  $h(t_*) = L$  pour  $t_* = (L/K_p) \ln(h_0/L)$ .

- 2) Au-delà de  $t_*$ , la cote  $h(t)$  de la "nappe phréatique" dans le milieu poreux continue de décroître (figure 2.14b). Calculer le temps  $t = T$  au bout duquel toute l'eau a percolé. On suppose que  $L = 30$  cm,  $h_0 = 33$  cm et  $\tau = T - t_* = 10$  s. En déduire la conductivité  $K_p$  du milieu poreux.

Comme la différence de charge entre le niveau de la nappe phréatique et le fond est  $h(t)$  la vitesse débitante du le milieu poreux est  $U = -K_p \frac{dh}{dz} = -K_p$ . Cette vitesse débitante est égale à  $m$  fois la vitesse réelle. La hauteur  $h(t)$ , qui est gouvernée par la vitesse réelle des particules de la surface libre, obéit à la loi  $\frac{dh}{dt} = U/m = -K_p/m$  pour  $h \leq L$ . La vitesse de l'aquifère est donc  $\frac{dh}{dt} = K_p/m$ . Comme  $h(t_*) = L$ , on a donc  $h(t) = L - K_p(t - t_*)/m$ . On a  $h(T) = 0$  pour  $T = t_* + L m/K_p$ . On a donc  $K_p = L m/\tau = 3 \cdot 10^{-3}$  m/s.

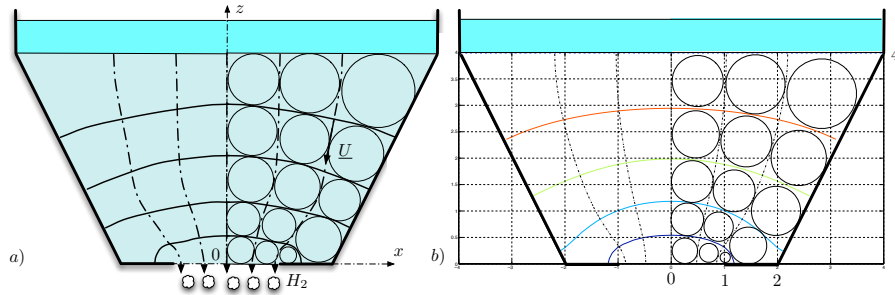


FIG. 2.15 – Percolateur 2D de forme complexe. a) Résolution “artistique” par la méthode des cercles. b) Solution numérique.

- 3) On considère maintenant un percolateur 2D dont la section verticale est indiquée sur la figure 2.15. Indiquer l'équation permettant de résoudre la charge  $H(x, z)$  et spécifier ses conditions aux limites. Donner l'allure des trajectoires en utilisant la “méthode des cercles”.

La charge dans le milieu poreux est la solution de l'équation de Laplace  $\Delta H = 0$  avec les conditions aux limites  $H = H_1$  en haut,  $H = H_2$  sur la grille et  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$  sur les parois imperméables. Une solution “artistique” de la méthode des cercles est indiquée sur la figure 2.14 et comparée à la solution numérique.

### EXERCICE 2.3 Ccoin salé (exercice élaboré avec Th. Dubos)

Près d'une côte, le sous-sol poreux s'imprègne d'eau salée au contact de la mer. Il en résulte la présence d'une nappe d'eau salée sous la nappe d'eau douce alimentée depuis le continent. On cherche à déterminer la position de l'interface eau douce - eau salée qui détermine, en particulier, la profondeur admissible des captages d'eau douce.

On se place dans une géométrie à deux dimensions (figure 2.16). On note  $z = Z_1(x)$  la cote de l'interface eau douce - sol sec et  $z = Z_2(x)$  celle de l'interface eau salée - eau douce. On suppose que  $Z_1(0) = Z_2(0) = L$  et que l'hypothèse de Dupuit est valide, sauf dans le voisinage de  $x = 0$ . La masse volumique  $\rho_2$  de l'eau salée est plus grande que la masse volumique  $\rho_1$  de l'eau douce. On note  $K_p$  la conductivité du sol.

- 1) Calculer la charge  $H_1$  dans la nappe d'eau douce. Quelle grandeur phy-

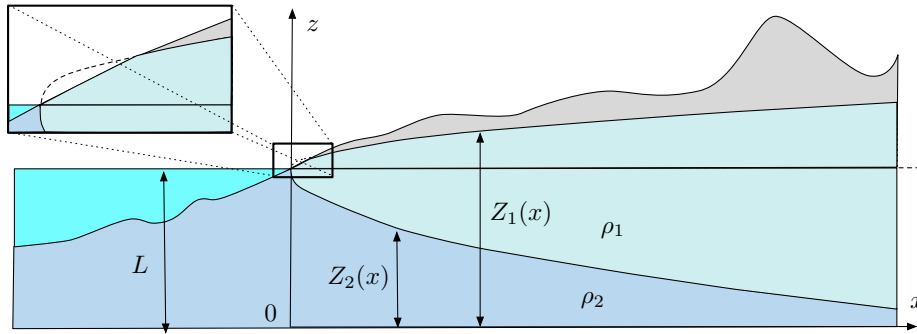


FIG. 2.16 – Nappe phréatique salée ( $\rho_2$ ) en contact avec la nappe phréatique d'eau douce ( $\rho_1$ ).

sique est continue à l'interface eau douce - eau salée? Calculer les champs de pression  $p_1(x, z)$  et  $p_2(x, z)$  dans les deux nappes. En déduire  $H_2$ .

L'hypothèse de Dupuit permet d'écrire  $H_1(x) = p_a/(\rho_1 g) + Z_1(x)$ . La pression est continue à l'interface. On a donc  $p_1(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - z)$  et  $p_2(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - Z_2) + \rho_2 g (Z_2 - z)$ . On en déduit, en utilisant de nouveau l'hypothèse de Dupuit, que  $H_2(x) = p_a/(\rho_2 g) + \frac{\rho_1}{\rho_2} Z_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} Z_2$ .

- 2) La nappe d'eau salée n'étant pas alimentée, montrer que  $H_2$  est une constante dont on donnera la valeur. En déduire  $L - Z_2(x)$  en fonction de  $Z_1(x) - L$ . Quel est le rapport des pentes des interfaces pour  $\rho_1 = 1\,000\text{ kg/m}^3$  et  $\rho_2 = 1\,035\text{ kg/m}^3$ .

La loi de Darcy  $U_2 = -K_p \frac{\partial H_2}{\partial x}$  entraîne que  $H_2$  est constant puisque  $U_2 = 0$ . À partir de la valeur  $Z_2(0) = L$ , on déduit que  $H_2 = p_a/(\rho_2 g) + L$ . On en déduit  $L - Z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L)$ . Le rapport des pente est  $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \sim 30$ .

- 3) En revanche, la nappe d'eau douce est alimentée par un débit linéique  $q$  venant du continent. En déduire  $Z_1(x) - L$  et  $L - Z_2(x)$ . Pourquoi doit-on supposer l'existence d'une surface de résurgence près de  $x = 0$ ?

La vitesse débitante  $U_1(x) = -K_p \frac{\partial H_1}{\partial x}$  vérifie  $q = (Z_1 - Z_2) U_1$ . On en déduit  $q = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L) \frac{\partial (Z_1 - L)}{\partial x}$  et donc  $Z_1 - L = \sqrt{2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{q}{K_p} x}$  et  $L - Z_2 = \sqrt{2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)} \frac{q}{K_p} x}$ . Dans le voisinage de  $x = 0$ , l'hypothèse de Dupuit n'est plus valable. Pour éviter une vitesse  $U_1(0)$  infinie, il est nécessaire d'imposer l'existence d'une surface de résurgence de la nappe d'eau douce.

- 4) On creuse un puit dans la nappe phréatique. On suppose que le pompage crée une profondeur de rabattement  $S_p = 3$  m dans le puits. De quelle hauteur remonte l'eau salée dans le puits.

| L'eau salée remonte d'une hauteur  $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} S_p = 33$  m.

## NOTATIONS

$\mathcal{A}$	Section d'un tube ()
$\mathcal{A}'$	Section $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ où passe le fluide ()
$A, A'$	Aires des sections $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (m <sup>2</sup> )
$C$	Constante d'intégration ()
div	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs (m <sup>-1</sup> )
$d\mathbf{M}$	Élément d'intégration vectoriel (m)
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$\mathbf{e}_s$	Vecteur unitaire associé à la coordonnée $s$ ()
$\underline{F}$	Densité massique des forces extérieures de volume (N kg <sup>-1</sup> )
grad	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m <sup>-1</sup> )
$g$	Gravité (m s <sup>-2</sup> )
$H$	Charge hydraulique (m)
$H(s)$	Charge hydraulique moyenne (m)
$H_e$	Charge exacte dans le puits ou le fossé (m)
$H_p$	Charge calculée dans le puits ou le fossé (m)
$h$	Épaisseur d'un aquifère (m)
$h_0$	Distance verticale constante (m)
$h_*$	Hauteur piézométrique (m)
$\underline{J}$	Vecteur perte de charge linéique (m <sup>-1</sup> )
$J$	Perte de charge linéique (m <sup>-1</sup> )
$K_p$	Conductivité hydraulique (m s <sup>-1</sup> )
$\mathcal{L}$	Ligne de courant ()
Ln	Logarithme népérien ()
$M_1, M_2$	Deux points de l'espace ()
$\underline{n}$	Vecteur normal pointant vers l'extérieur ()
$p$	Champ de pression (Pa)
$p_a$	Pression atmosphérique (Pa)
$P_*$	Pression piézométrique (Pa)



---

$Q$	Débit volumique ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ )
$\underline{q}$	Vecteur débit linéique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$q$	Débit linéique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\text{rot}$	Opérateur rotationnel d'un champ vectoriel ( $\text{m}^{-1}$ )
$r$	Coordonnée polaire radiale (m)
$r_0$	Valeur particulière de $r$ (m)
$r_p$	Rayon du puits (m)
$s$	Coordonnée curviligne (m)
$S(x)$	Courbe de rabattement dans le cas prismatique (m)
$S_p$	Valeur de $S(r)$ dans le puits ou le fossé (m)
$T$	Transmitivité $T = K_p B$ ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse réelle ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{U} = (u, v, w)$	Champ de vitesse débitante ( $\text{m s}^{-1}$ )
$\underline{U}_H = (U, V)$	Champ de vitesse débitante horizontale ( $\text{m s}^{-1}$ )
$U$	Vitesse débitante dans la direction $\underline{e}_x$ ou $\underline{e}_s$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$V$	Vitesse débitante dans la direction $\underline{e}_y$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
$x, y, z$	Coordonnées spatiales (m)
$x_0$	Valeur particulière de $x$ (m)
$z_1, z_2$	Valeurs constantes de $z$ (m)
$z_b(x)$	Cote d'une face d'un barrage poreux (m)
$Z_f$	Cote du fond imperméable (m)
$\alpha$	Moyenne du carré de $\underline{U}$ sur le carré de sa moyenne ( )
$\Delta$	Opérateur Laplacien ( $\text{m}^{-2}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique moléculaire ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )