

Chapitre 2

Écoulements potentiels

(Potential flows)

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

| | | | |
|----------|--------------------------------|--|-----------|
| 1 | Perte de charge | Head loss | 3 |
| 1.1 | Équation de Bernoulli | Bernoulli equation | 3 |
| 1.2 | Charge moyenne | Averaged head | 5 |
| 1.3 | Loi de Darcy 1D | 1D Darcy law | 7 |
| 2 | Milieux poreux | Porous media | 8 |
| 2.1 | Loi de Darcy 3D | 3D Darcy law | 9 |
| 2.2 | Écoulements confinés | Confined flows | 11 |
| 2.3 | Écoulements non confinés | Unconfined flows | 13 |
| 3 | Écoulements souterrains | Subsurface flows | 14 |
| 3.1 | Puits artésien | Artesian well | 15 |
| 3.2 | Approximation de Dupuit | Dupuit approximation | 16 |
| 3.3 | Applications et limitations | Applications and limitations | 18 |

Introduction

Le sous-sol est constitué d'un mélange de terre et de graviers à travers lequel l'eau s'infiltré et circule. Cette circulation est ici modélisée par des écoulements potentiels en milieu poreux. Ces écoulements, dont le champ de vitesse est le gradient d'un potentiel, se rencontrent en mécanique des fluides lorsque la vorticité (rotationnel de la vitesse) peut être négligée. C'est le cas des écoulements souterrains lents aux échelles grandes devant la taille des graviers.

Introduction

The underground is made of a mix of earth and rock through which water infiltrates and circulates. This circulation is modelled by potential flows in a porous medium. These flows, which velocity field is the gradient of a potential, are encountered in fluid mechanics when the vorticity (curl of the velocity) can be neglected. This is the case of slow subsurface flows at scales which are large in front of the size of the gravels.

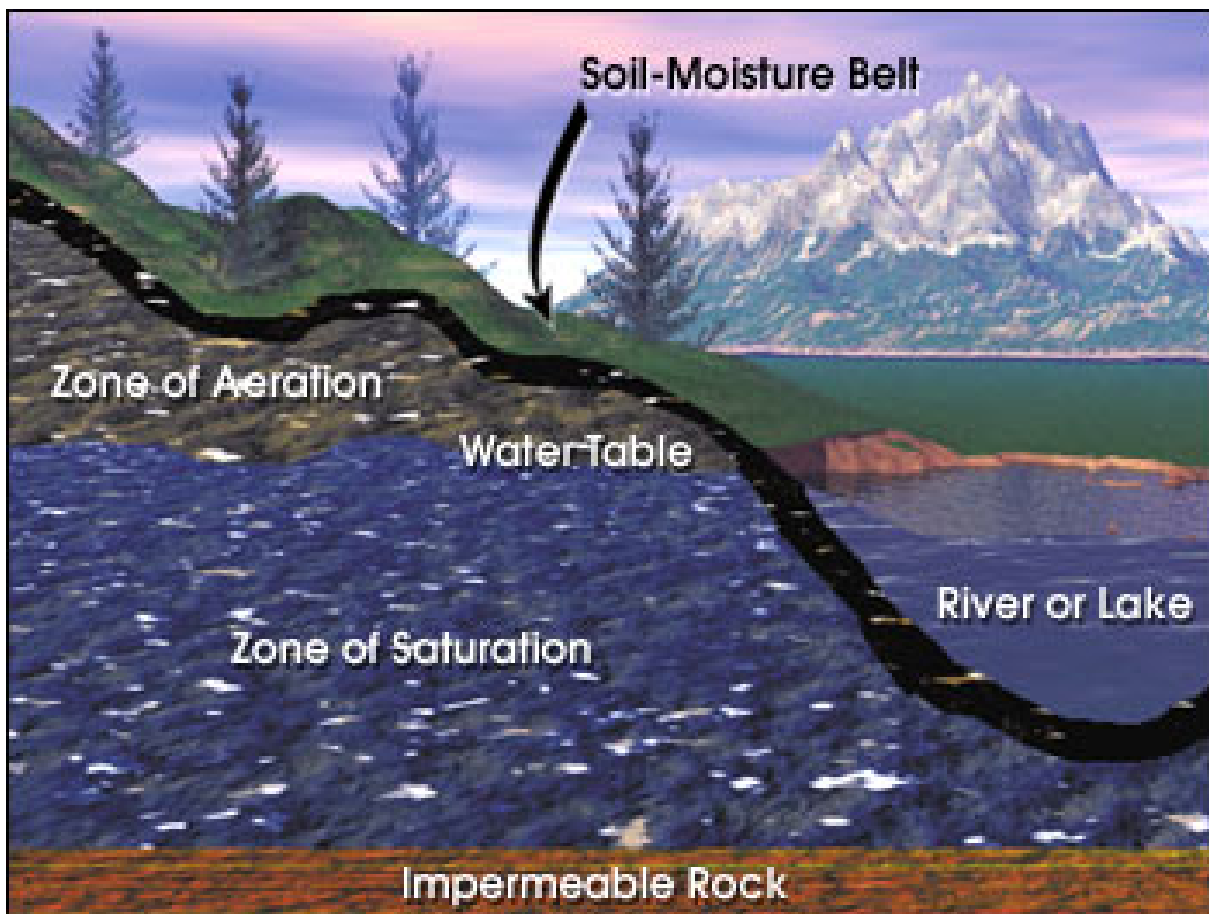


FIG. 2.1 – Nappe phréatique en contact avec une rivière ou un lac. Photo NASA GSFC.

FIG. 2.2 – Water table in contact with a river or a lake [NASA GSFC, by Hailey King].

Les notions de base de l'hydraulique souterraine sont présentées dans ce chapitre à l'aide d'exemples simples représentatifs de problèmes souterrains plus complexes. Seuls les écoulements lents, c'est-à-dire à faibles nombres de Reynolds, dans des milieux poreux isotropes et homogènes sont considérés.

La charge hydraulique des milieux poreux est présentée avec l'équation de Bernoulli déduite des équations de Navier-Stokes laminaires. Comme la vitesse des écoulements est petite, la charge hydraulique est approximée par la hauteur piézométrique. La loi de Darcy, qui postule une relation linéaire entre le débit et la perte de charge, est présentée sur l'exemple simple d'un aquifère confiné coulant dans une seule direction. La généralisation de la loi de Darcy aux écoulements tri-dimensionnels dans des milieux poreux montre que la charge peut être vue comme le potentiel du champ de vitesse débitante. En appliquant la conservation de la masse, on montre que la perte de charge satisfait l'équation de Laplace.

La compréhension de la nature des conditions aux limites utilisées pour résoudre cette équation de Laplace est l'un des points clés de ce chapitre. Plusieurs exemples sont présentés.

Basic notions of ground water hydraulics are presented in this chapter with the help of simple examples which are representative of more complex subsurface problems. Only slow flows, that is with low Reynolds numbers, in isotropic and homogeneous porous media are considered.

The hydraulic head of porous media is presented with the Bernoulli equation derived out the laminar Navier-Stokes equations. Since the velocity of flows in water media is small, the hydraulic head is approximated by the piezometric height. The Darcy law, which postulate a linear relation between the discharge velocity and the head loss, is presented on the simple example of the confined aquifer flowing in a single direction. The generalization of the Darcy law to three dimensional flows in homogeneous porous media shows that the head can be viewed as the potential of the discharge velocity. By applying the mass conservation, one shows that the head loss satisfies the Laplace equation.

Understanding the nature of the boundary conditions used to solve this Laplace equation is one of the key points of this chapter. Several examples are presented.

1 Perte de charge

La loi de Darcy unidimensionnelle est présentée ici. Elle énonce que la vitesse débitante d'un écoulement dans un milieu poreux est proportionnelle à la perte de charge linéique.

1.1 Équation de Bernoulli

Nous prenons comme point de départ les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \underline{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \underline{U} \quad , \quad (2.1)$$

où les forces de volumes $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\operatorname{grad} (gz)$ sont dues à la gravité.

Considérons une ligne de courant \mathcal{L} allant d'un point M_1 à un point M_2 . En utilisant la relation

Head loss

The one-dimensional Darcy law is presented here. It states that the discharge velocity of a flow in a porous media is proportional to the lineic head loss.

Bernoulli equation

We take as starting point the laminar incompressible Navier-Stokes equations

where the volume forces $\underline{F} = -g \underline{e}_z = -\operatorname{grad} (gz)$ are due to gravity.

Let us consider a stream line \mathcal{L} going from a point M_1 to a point M_2 . By using the relation

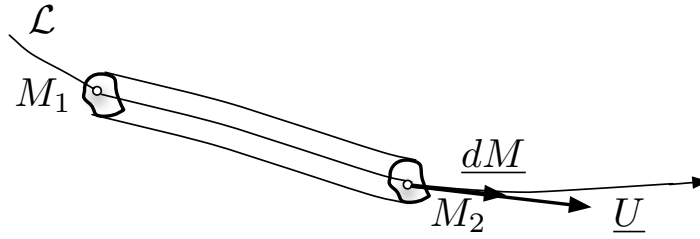


FIG. 2.3 – Ligne de courant \mathcal{L} d'un écoulement laminaire.

Stream \mathcal{L} of a laminar flow.

$$\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } U^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} \quad (2.2)$$

et la relation $(\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot d\underline{M} = \text{rot } \underline{U} \cdot (\underline{U} \wedge d\underline{M}) = 0$, on peut dériver “l'équation de Bernoulli”

and the relation $(\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot d\underline{M} = \text{rot } \underline{U} \cdot (\underline{U} \wedge d\underline{M}) = 0$, one can derive the “Bernoulli equation”

$$\int_{\mathcal{L}} \text{grad } H \cdot d\underline{M} = \frac{1}{g} \int_{\mathcal{L}} \left(-\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \nu \Delta \underline{U} \right) \cdot d\underline{M}, \quad (2.3)$$

où H est la “charge hydraulique” définie par la relation

where H is the “hydraulic head” defined by the relation

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} U^2. \quad (2.4)$$

En intégrant le membre de gauche de l'équation de Bernoulli (2.3), on obtient

By integrating from the left hand side of the Bernoulli equation (2.3), one gets

$$H(M_2) = H(M_1) - \int_{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{J} \right) \cdot d\underline{M}, \quad \underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U}). \quad (2.5)$$

Le terme \underline{J} est la perte de charge linéique due aux frottements visqueux.

The term \underline{J} is the lineic head loss due to viscous friction.

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des écoulements tels que le terme d'accélération $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ est négligeable devant le terme des forces visqueuses $\nu \Delta \underline{U}$ (écoulements à faibles nombres de Reynolds). C'est le cas des écoulements souterrains en milieu poreux. Pour de tels écoulements, on peut écrire

In this chapter, we only consider flows such that the acceleration term $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ is neglectable in front of the viscous force term $\nu \Delta \underline{U}$ (low Reynolds numbers flows). This is the case for subsurface flow in porous media. For such flow, one can write

$$H \sim \frac{p}{\rho g} + z, \quad H(M_2) - H(M_1) \sim - \int_{\mathcal{L}} \underline{J} \cdot d\underline{M}. \quad (2.6)$$

1.2 Charge moyenne

Averaged head

Les particules fluides d'un écoulement souterrain dans un milieu poreux suivent des trajectoires complexes entre des graviers. Considérons une famille de trajectoires formant un tube de section $\mathcal{A}(s)$ autour de la trajectoire moyenne \mathcal{L} paramétrisée par sa coordonnée curviligne s (figure 2.4).

The fluid particles of an undergroundwater in a porous medium follow complex trajectories between gravels. Let us consider a family of trajectories forming a tube of sections $\mathcal{A}(s)$ around a mean trajectory \mathcal{L} parametrized by its curvilinear coordinate s (Figure 2.4).

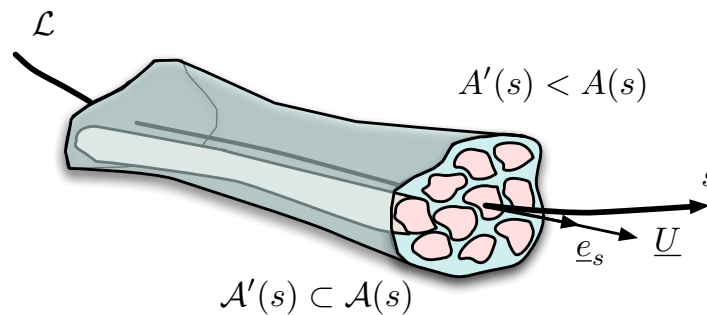


FIG. 2.4 – Tube de trajectoires dans un milieu poreux.

Tube of trajectories in a porous medium.

Puisque le milieu est “poreux”, le fluide ne traverse qu’une section $\mathcal{A}'(s)$ plus petite que $\mathcal{A}(s)$. Si $\mathcal{A}'(s)$ et $\mathcal{A}(s)$ sont, respectivement, les aires de ces deux sections, on note $m = \mathcal{A}'/\mathcal{A} \leq 1$ la “porosité” du milieu.

Since the medium is “porous”, the fluid only crosses a section $\mathcal{A}'(s)$ smaller than $\mathcal{A}(s)$. If $\mathcal{A}'(s)$ and $\mathcal{A}(s)$ are, respectively, the area of these two sections, we denote by $m = \mathcal{A}'/\mathcal{A} \leq 1$ the “porosity” of the medium.

On note $Q(s)$ le débit volumique dans la direction \underline{e}_s , où \underline{e}_s est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire \mathcal{L} et on le définit par

One denotes by $Q(s)$ the volumetric flow, or “seeping discharge”, in the direction \underline{e}_s , where \underline{e}_s is the unit vector tangent to the trajectory \mathcal{L} , and one defines it by

$$Q(s) = \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (2.7)$$

La vitesse débitante U est alors définie par la relation

The “discharge velocity” U is then defined by the relation

$$U(s) = \frac{Q(s)}{A(s)} = \frac{1}{A(s)} \iint_{\mathcal{A}'} \underline{U} \cdot \underline{e}_s dS . \quad (2.8)$$

On remarque que la vitesse réelle du fluide est, en moyenne, plus grande que cette vitesse débitante puisque $\mathcal{A}'(s) < \mathcal{A}(s)$.

We note that the real velocity of the fluid is, in average, greater than this discharge velocity since $\mathcal{A}'(s) < \mathcal{A}(s)$.

La charge hydraulique moyenne de la section $\mathcal{A}(s)$ est définie par

The averaged hydraulic head of the section $\mathcal{A}(s)$ is defined by

$$H(s) \sim \frac{1}{A'} \iint_{A'} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) dS = \frac{P_*(s)}{\rho g} = h_* , \quad (2.9)$$

où $P_*(s)$ est la “pression piézométrique” et $h_*(s)$ la “hauteur piézométrique”.

where $P_*(s)$ is the “piezometric pressure” and $h_*(s)$ the “piezometric height”.

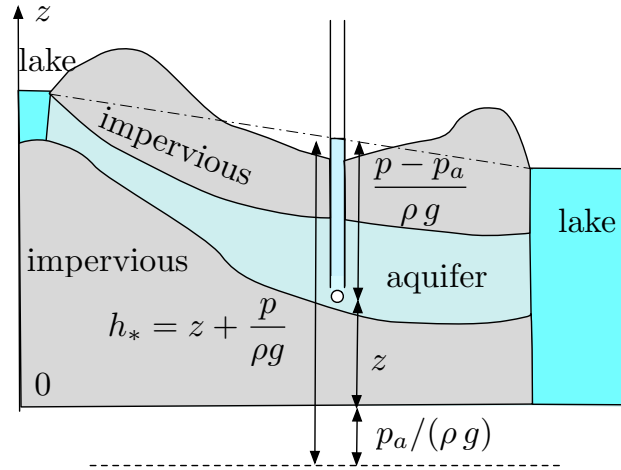


FIG. 2.5 – Hauteur piézométrique $h_* = \frac{p}{\rho g} + z$ dans un aquifère.

Piezometric height $h_* = \frac{p}{\rho g} + z$ in an aquifer.

Cette hauteur piézométrique est l’altitude qu’atteindrait l’eau dans un puits ouvert à la pression atmosphérique, relativement à un plan situé à une distance $p_a/(\rho g)$ en-dessous du zéro géographique $z = 0$ (arbitraire) (voir figure 2.5). Dans certains ouvrages traitant de l’hydraulique, une jauge est choisie sur la pression de manière à avoir $p_a = 0$. Nous ne faisons pas ce choix dans cette présentation.

This piezometric height is the altitude that would reach the water in a well, open to the atmospheric pressure, relatively to a plane located at the distance $p_a/(\rho g)$ below the (arbitrary) geographic zero $z = 0$ (see Figure 2.5). In some books dealing with hydraulics, a gage is taken on the pressure scale in order to have $p_a = 0$. We do not make this choice in this presentation.

On définit la “perte de charge linéique moyenne” J par la relation

On One defines the “averaged lineic head loss” J by the relation

$$J(s) = \frac{1}{A'} \iint_{A'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_s dS , \quad (2.10)$$

qui vérifie donc, pour un écoulement stationnaire, la relation

which thus satisfies, for a stationary flow, the relation

$$\frac{dH}{ds}(s) = -J(s) . \quad (2.11)$$

1.3 Loi de Darcy 1D

On considère un écoulement lent quasi-1D obtenu en suivant un tube de trajectoires dans un milieu poreux. Si la section de ce tube est grande devant la taille des graviers ou fissures du milieu poreux, on peut, à partir d'observations expérimentales, modéliser la perte de charge de cet écoulement par la loi de Darcy unidimensionnelle qui s'écrit

$$J(s) = \frac{U(s)}{K_p(s)} \implies U(s) = -K_p(s) \frac{dH}{ds}(s), \quad (2.12)$$

où K_p est la "conductivité hydraulique" du milieu. Cette quantité a la dimension d'une vitesse. Par exemple, on peut choisir $K_p = 20$ m/jour pour de l'eau coulant dans du sable fin et $K_p = 2$ km/jour pour de l'eau coulant entre des graviers. Le coefficient de "perméabilité intrinsèque" $K_0 = K_p \nu / g$ est souvent considéré pour caractériser un milieu poreux dans la mesure où il ne dépend que de ses propriétés géométriques. Le milieu poreux est homogène si K_p est indépendant de l'espace.

One considers a slow quasi-1D flow obtained by following a tube of trajectories in a porous media. If the section of this tube is large compared to the size of the porous medium gravels or cracks, one can, from experimental observations, model the head loss of this by the one dimensional Darcy which reads

where K_p is the "hydraulic conductivity" of the medium. This quantity has the dimension of a velocity. For instance, one can choose $K_p = 20$ m/day for water seeping in fine sand and $K_p = 2$ km/day for water flowing between gravels. The "intrinsic permeability" coefficient $K_0 = K_p \nu / g$ is often considered to characterize a porous medium since it only depends of its geometric properties. The porous media is homogeneous if K_p is independent of space.

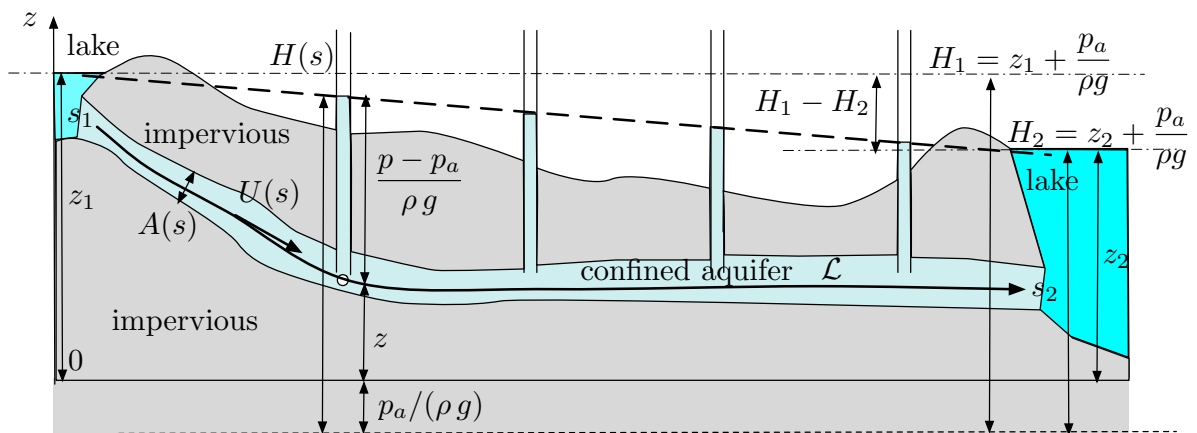


FIG. 2.6 – Profil de charge $H(s)$.

FIG. 2.7 – Head profile $H(s)$.

Comme premier exemple d'application de la loi de Darcy, nous considérons l'écoulement stationnaire dans un aquifère confiné par un milieu imperméable (par exemple de la roche) et coulant entre deux lacs (figure 2.6) d'altitudes respectives $z_1 > z_2$. On note $A(s)$ l'aire de la section de la galerie dans laquelle coule le fluide. La conservation de la masse implique que le débit $Q = A(s)U(s)$ est constant. La modélisation conduit alors au système d'équations

$$\frac{d}{ds}(AU) = 0 \quad , \quad U = -K_p \frac{dH}{ds} . \quad (2.13)$$

Pour résoudre ces équations, on doit considérer deux conditions aux limites qui sont

$$H(s_1) = H_1 \quad , \quad H(s_2) = H_2 , \quad (2.14)$$

où s_1 et s_2 sont les coordonnées curvilignes aux deux lacs.

Si le milieu poreux est homogène (K_p constant) et la section $A(s)$ est constante, la solution est

$$H(s) = H_1 + \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2} (s - s_2) \quad , \quad U = -K_p \frac{H_1 - H_2}{s_1 - s_2} . \quad (2.15)$$

2 Milieux poreux

Dans un milieu poreux, on peut définir une vitesse débitante en chaque point $\underline{x} = (x, y, z)$ de l'espace à condition de se placer à des échelles plus grandes que celle des graviers ou fissures. En se plaçant à ces grandes échelles, nous notons désormais \underline{U} la "vitesse débitante" et nous ignorons la "vitesse réelle". Contrairement à la vitesse réelle, le rotationnel de la vitesse débitante est nul, les termes de vortacité, associés aux couches limites de parois, étant relégués dans la modélisation des pertes de charge. L'écoulement est donc potentiel aux grandes échelles, ce que traduit la loi de Darcy.

As a first application example of the Darcy law, we consider the stationary flow by an aquifer confined in an impervious medium (for instance rock) and flowing between two lakes (Figure 2.6) of respective altitudes $z_1 > z_2$. One denotes $A(s)$ the section of the gallery in which the fluid is flowing. The mass conservation implies that the discharge $Q = A(s)U(s)$ is constant. The model leads to the system of equations

In order to solve these equations, one must consider two boundary conditions which are here

where s_1 and s_2 are the curvilinear coordinates at the two lakes.

If the porous medium is homogeneous (constant K_p) and the section $A(s)$ is constant, the solution is

Porous media

In a general porous media, one can define the "discharge velocity" in every point $\underline{x} = (x, y, z)$ in space, provided one looks at a scales larger than the one of gravels or cracks. Staying at these large scales, we denote, from now on, by \underline{U} the "discharge velocity" and we ignore the "actual velocity". Contrarily to the actual velocity, the curl of the discharge velocity vanishes, the vorticity terms, associated with the walls boundary layers, being relegated in the modeling of the head losses. The flow is thus potential at large scales, which is traced back by the Darcy law.

2.1 Loi de Darcy 3D

Nous considérons uniquement des écoulements à faibles nombres de Reynolds, c'est-à-dire tels que le terme d'accélération $\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ peut être négligé dans les équations de Navier-Stokes qui s'écrivent alors

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \text{grad } \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = \frac{1}{g} (\nu \Delta \underline{U}) \quad \iff \quad \text{grad } H = -\underline{J}, \quad (2.16)$$

où $H = \frac{p}{\rho g} + z$ est la charge hydraulique et $\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U})$ le vecteur perte de charge linéique dû aux frottements visqueux.

Nous nous plaçons maintenant à une échelle spatiale “macroscopique”, grande devant la taille des graviers ou fissures du milieu poreux qui définit l'échelle “microscopique”. Nous utiliserons désormais la notation \underline{U} pour désigner la “vitesse débitante” obtenue en moyennant spatialement, à l'échelle macroscopique, la “vitesse réelle” que nous ignorons désormais, si ce n'est pour signaler qu'elle est localement plus intense à l'échelle microscopique.

La vitesse débitante vérifie également $\text{div } \underline{U} = 0$. En revanche, le vecteur perte de charge linéique moyenné à l'échelle macroscopique, que nous noterons désormais \underline{J} en ignorant le vecteur perte de charge linéique réel, n'est pas relié à la vitesse \underline{U} par un Laplacien comme c'était le cas à son échelle microscopique. Les observations expérimentales permettent de l'exprimer à l'aide de la loi de Darcy tridimensionnelle (3D) qui s'écrit

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)} \underline{U}(\underline{x}, t), \quad (2.17)$$

où K_p est la conductivité hydraulique du milieu poreux. La modélisation d'un milieu anisotrope peut être obtenue en remplaçant $1/K_p$ par un tenseur d'ordre deux (une matrice). Nous ne considérons pas ce cas dans cette présentation.

Nous noterons désormais H la “charge hydraulique moyenne” définie par

$$H = \frac{p}{\rho g} + z, \quad (2.18)$$

3D Darcy law

We only consider low Reynolds flows, that is such that the acceleration term $\frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ can be neglected in the Navier-Stokes equations which then read

where $H = \frac{p}{\rho g} + z$ is the hydraulic head and $\underline{J} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U})$ the lineic head loss vector due to the viscous friction.

We now settle at a “macroscopical” spatial scale, large in front of the porous medium gravels and the cracks size which defines the “microscopic” scale. henceforth, we denote by \underline{U} the “discharge velocity” obtained by spatially averaging, at the macroscopic scale, the “real velocity” which we ignore from now on, excepted for saying that it is locally more intense at the microscopic scale.

The discharge velocity also satisfies $\text{div } \underline{U} = 0$. On the other hand, the lineic head loss vector averaged at the macroscopic scale, that we henceforth denote by \underline{J} while ignoring the lineic head loss vector at the microscopic scale, is not linked to the velocity \underline{U} by a Laplacian as it was the cas for its microscopic scale. Experimental observations allow to express it with the help of the tridimensional (3D) Darcy law which reads

where K_p is the hydraulic conductivity of the porous medium. The modelling of anisotropic medium can be obtained by replacing $1/K_p$ by an order two tensor (a matrix). This case will not be considered in this presentation.

We henceforth denote by H the “averaged hydraulic head” defined by

où p désigne désormais la pression moyenne à l'échelle macroscopique. À l'échelle macroscopique, la moyenne des équations (2.16) combinée à la loi de Darcy (2.17) conduit à

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \underline{U} = -K_p \operatorname{grad} H . \quad (2.19)$$

Quand le milieu poreux est homogène (K_p constant), ce que nous supposons désormais, l'élimination de la vitesse \underline{U} entre ces deux relations conduit à l'équation de Laplace

$$\Delta H = 0 \quad , \quad H = \frac{p}{\rho g} + z . \quad (2.20)$$

Comme l'équation de Laplace est elliptique, on doit spécifier des conditions aux limites sur toute la frontière du domaine étudié.

Les trajectoires sont perpendiculaires aux surfaces iso- H (figure 2.8). On démontre que si l'on peut inscrire un cercle dans un "carreau" délimité par deux iso- H et deux trajectoires, on peut inscrire un cercle dans chacun des autres "carreaux". Cette propriété permet de résoudre graphiquement l'équation de Laplace par la "méthode des cercles".

where p henceforth denotes the averaged pressure at the macroscopic scale.

When the porous medium is homogeneous (constant K_p), which we assume from now on, the elimination of the velocity \underline{U} between the two relations $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ and $\underline{U} = -K_p \operatorname{grad} H$ leads to the Laplace equation

Since the Laplace equation is elliptic, one needs to specify boundary conditions on the whole border of the studied domain.

Trajectories are thus orthogonal to the iso- H surfaces (Figure 2.8). One shows that if one can draw a circle in a "case" bounded by two iso- H and two trajectories, one can draw a circle in each of the others "cases". This property leads to a graphical solution of the Laplace equation with the "circle method".

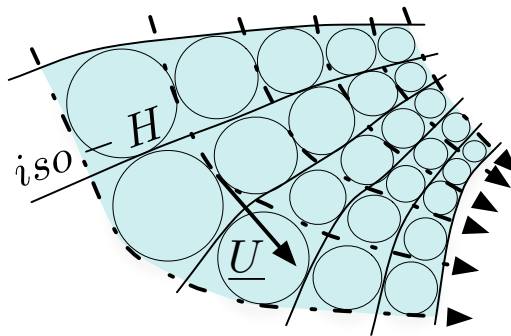


FIG. 2.8 – Orthogonalité entre les H et les trajectoires et méthode des cercles.

Orthogonality between the iso- H and the trajectories.

2.2 Écoulements confinés

Confined flows

On considère un écoulement stationnaire dans un milieu homogène et isotrope et on suppose ici que l'écoulement souterrain est confiné entre des frontières imperméables ou des couches d'eau de surface telles qu'un lac ou une rivière.

We consider a stationary flow in an isotropic and homogeneous medium and we suppose here that the subsurface flow is confined between impervious boundaries or surface water layer such as a lake or a river.

À l'interface entre l'aquifère et les frontières imperméables, la vitesse normale s'annule. Les conditions aux limites sur l'interface sont donc

At the interface between the aquifer and the impervious boundaries, the normal velocity vanished. The boundary conditions on the interface are thus

$$\underline{\text{grad}} H \cdot \underline{n} = \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad / \text{ interface} . \quad (2.21)$$

Ce sont des conditions aux limites de "Neumann" pour le problème elliptique $\Delta H = 0$.

These are "Neumann" boundary conditions for the elliptic problem $\Delta H = 0$.

Comme les trajectoires traversent l'interface entre la couche d'eau de surface et l'aquifère, la charge doit être continue. Les conditions aux limites sur cette interface sont donc

Since trajectories are crossing the interface between the surface water layer and the aquifer, the head must be continuous. The boundary conditions on this interface are thus

$$H = H_i \quad / \text{ interface} , \quad (2.22)$$

où H_i est la charge de la couche d'eau de surface à l'interface. Ce sont des conditions aux limites de "Dirichlet" pour le problème elliptique $\Delta H = 0$.

where H_i is the head of the surface water layer at the interface. These are "Dirichlet" boundary conditions for the elliptic problem $\Delta H = 0$.

À titre d'exemple, considérons l'écoulement souterrain sous un barrage imperméable entouré de deux lacs dont les surfaces libres sont aux altitudes respectives z_1 et z_2 (voir figure 2.9). On suppose que les lacs sont au repos de sorte que leurs pressions sont hydrostatiques et leurs charges constantes. On suppose qu'un fond imperméable est situé à la cote $z = Z_f$ avec Z_f constant.

As an example, let's consider the groundwater flow under an impervious dam surrounded by two lakes which free surfaces are at the respective altitudes z_1 and z_2 (see Figure 2.9). We suppose that the lakes are at rest so that their pressure are hydrostatic and their head constant. We assume that an impervious bottom is located at the altitude $z = Z_f$ with Z_f constant.

On suppose que l'aquifère est borné au fond par un milieu imperméable et que le problème est invariant par translation dans la direction y (écoulement 2D). L'écoulement va du premier lac, avec une charge égale à $H_1 = z_1 + p_a/(\rho g)$, vers un second lac à une charge égale à $H_2 = z_2 + p_a/(\rho g) < H_1$.

We suppose that the aquifer is bounded at the bottom by a horizontal impervious medium and that the problem is invariant by a translation in the y direction (2D flow). The flow is seeping from the first lake, with a head equal to $H_1 = z_1 + p_a/(\rho g)$, to the second lake at a head equal to $H_2 = z_2 + p_a/(\rho g) < H_1$.

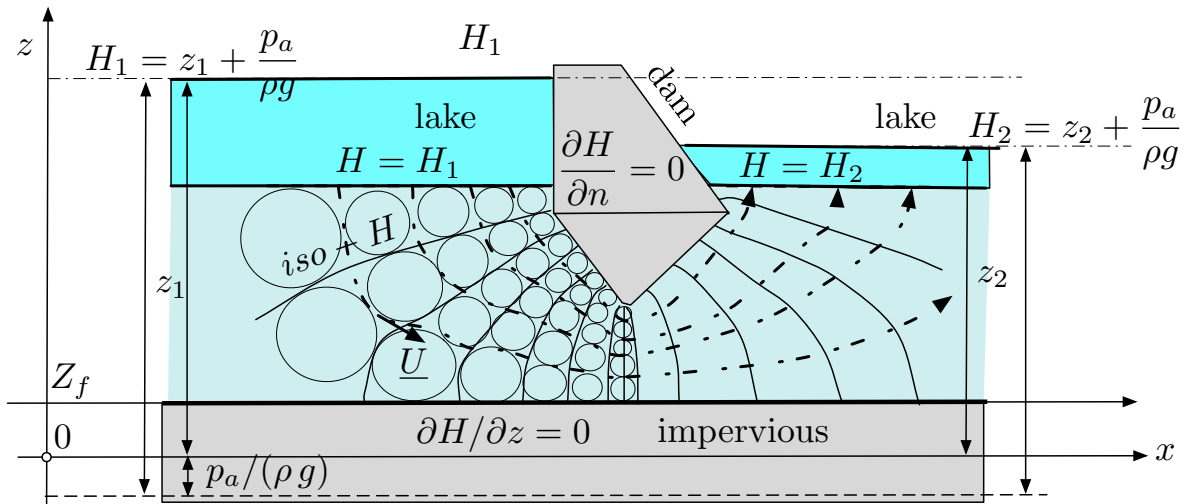


FIG. 2.9 – Iso- H (traits pleins) et trajectoires (traits pointillés) d'un écoulement souterrain sous un barrage.

Iso- H (solid lines) and trajectories (dot-dashed lines) of a groundwater flow under a dam.

Nous devons résoudre $\Delta H = 0$ avec la condition de Dirichlet $H = H_1$ ou $H = H_2$, au fond des lacs, et avec la condition de Neumann $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ sur toutes les surfaces imperméables.

We must thus solve $\Delta H = 0$ with the Dirichlet condition $H = H_1$ or $H = H_2$, at the bottom of the lakes, and with the Neuman conditions $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ on all the impervious interfaces.

Des solutions précises de ce problème sont obtenues par des simulations numériques, la littérature sur la résolution des problèmes elliptiques étant vaste. Mais les méthodes graphiques, développées à l'époque où il n'y avait pas d'ordinateurs, permettent de se faire une première idée de la solution. C'est le cas de la "méthode des cercles" qui peut être appliquée pour des géométries bi-dimensionnelles (voir figure 2.9).

Accurate solutions of this problem are obtained through numerical simulations, the literature on solving elliptic problem being very large. But graphical methods, developed at the time when computers were not available, are helpful to get a first hint of the solution. This is the case of the "circle method" that can be applied for two-dimensional geometries (see Figure 2.9).

2.3 Écoulements non confinés

Unconfined flows

On considère maintenant un aquifère dont la partie supérieure n'est pas confinée et dont la partie inférieure est délimitée par une frontière imperméable d'équation $z = Z_f$. La surface libre, située à l'intérieur du milieu poreux, est appelée la "nappe phréatique" et l'aquifère est qualifié de "phréatique". Nous ignorons ici la couche capillaire qui sépare le fluide et le milieu poreux sec et nous supposons que la nappe phréatique est une surface à la pression p_a . Nous considérons, dans cette présentation, que Z_f est constant.

We now consider that an aquifer whose upper part is unconfined and whose lower part is delimited by an impervious boundary of equation $z = Z_f$. The free surface, located inside the porous medium, is called the "water-table" and the aquifer is said to be "phreatic". We ignore here the capillarity layer which separates the fluid and the dry porous media and we suppose that the water-table is a surface on which the pressure is the atmospheric pressure p_a . We consider, in this presentation, that Z_f is constant.

L'existence d'une surface libre de nappe phréatique conduit à de nouvelles conditions aux limites. En effet, la position de cette surface, que nous notons à l'aide de l'équation $z = Z_f + h(x, y)$, est inconnue. Pour trouver cette nouvelle fonction, deux conditions aux limites au lieu d'une sont imposées à cette interface, qui s'écrivent

The existence of this water-table leads to a new boundary conditions. Indeed, the location of this surface, which we denote by the equation $z = Z_f + h(x, y)$, is unknown. In order to find this new function, two boundary conditions instead of one are imposed at this interface, which read

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad , \quad H = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} \quad / \quad \text{interface } z = Z_f + h(x, y), \quad (2.23)$$

puisque aucun écoulement ne traverse la surface libre stationnaire de la nappe phréatique et que la pression est égale à la pression atmosphérique. Nous voyons donc que la surface libre de la nappe phréatique est formée de trajectoires.

since no flow is crossing the stationary water-table and the pressure is equal to the atmospheric pressure. We thus see that the water-table is made of trajectories.

À titre d'exemple, nous considérons un aquifère phréatique compris entre deux lacs au repos dont les surfaces libres sont aux altitudes respectives z_1 et z_2 . L'eau traverse un barrage poreux compris entre les plans $x = 0$ et $z = z_b(x)$ (voir figure 2.10). Les conditions aux limites $\frac{\partial H}{\partial n}$ sur les interfaces imperméables et les conditions aux limites $H = H_1$ et $H = H_2$ aux interfaces avec les lacs sont aisées à comprendre. La position de la surface de la nappe phréatique $z = Z_f + h(x)$ est obtenue en résolvant toute la famille de trajectoires issues de la condition $H = H_1$ sur l'axe Oz et en choisissant celle qui débute en $z = z_1$.

As an example, we consider the flow in a phreatic aquifer between two lakes at rest which free surface are at the respective altitudes z_1 and z_2 . The water flows in a porous dam bounded by the planes $x = 0$ and $z = z_b(x)$. (see Figure 2.10). The boundary conditions $\frac{\partial H}{\partial n}$ on the impervious interface and the boundary conditions $H = H_1$ and $H = H_2$ at the interfaces with the lakes are easy to understand. The location of the water-table $z = Z_f + h(x)$ is obtained by solving the whole family of trajectories starting from the condition $H = H_1$ on the Oz axis and choosing the one which starts at $z = z_1$.

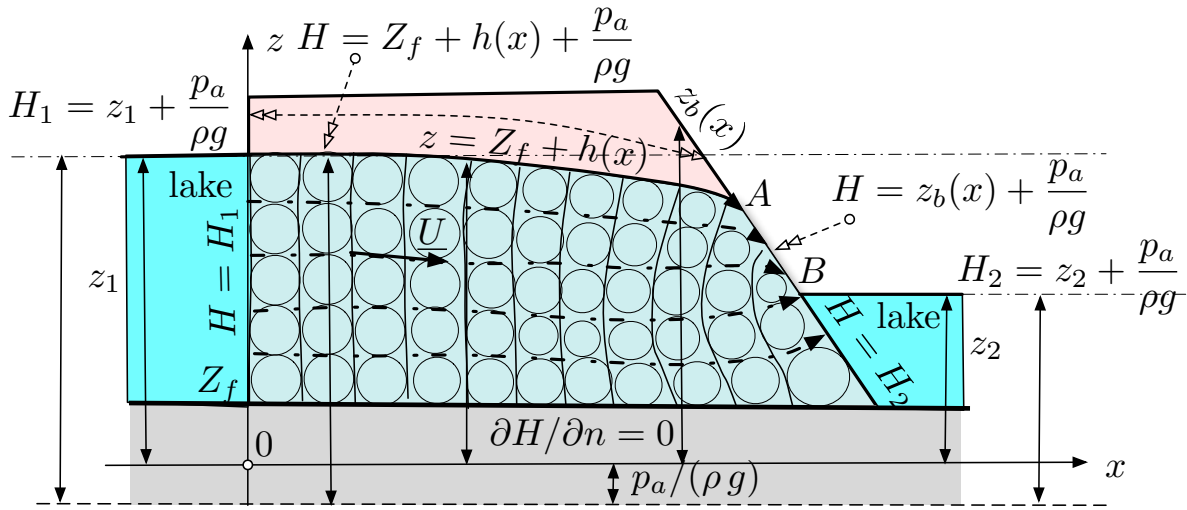


FIG. 2.10 – Iso- H (traits pleins) et trajectoires (traits pointillés) dans un aquifère phréatique entre deux lacs.

Iso- H (solid lines) and trajectories (dot-dashed lines) of in a phreatic aquifer between two lakes.

La particularité de ce problème est le fait qu’il doit y avoir une “face de résurgence” représentée par le segment AB dans la figure 2.10. Cette face est en contact avec l’atmosphère et le fluide émerge et y ruisselle vers le bas. En effet, il n’y a aucune raison pour que la trajectoire issue de $z = z_1$ sur l’axe Oz coupe la surface oblique du barrage en un point A confondu avec le point B , sauf pour une valeur très particulière de z_1 . Le long du segment AB , la condition aux limites est $H = z_b(x) + p_a/(\rho g)$ puisque la pression est égale à la pression atmosphérique p_a .

The peculiarity of this problem is the fact that there must be a “seeping face”, represented by the non zero line AB in Figure 2.10. This face is in contact with the atmosphere and fluid is emerging out of it and trickling down along it. Indeed, there is no reason that the trajectory coming from $z = z_1$ on the Oz axis cut the oblique dam surface in a point A equal to the point B , excepted for a very particular value of z_1 . Along the AB line, the boundary condition is $H = z_b(x) + p_a/(\rho g)$ since the pressure is equal to the atmospheric pressure p_a .

3 Écoulements souterrains

Subsurface flows

Nous appliquons la loi de Darcy au cas des aquifères et des puits artésiens. Pour les nappes phréatiques, l’approximation de Dupuit permet la modélisation des surfaces libres à pentes faibles.

We apply the Darcy law to the case of artesian aquifers and wells. For phreatic water tables, the Dupuit approximation enables the modelling of free surfaces with small slopes.

3.1 Puits artésien

On appelle “aquifère artésien” un aquifère confiné entre deux milieux imperméables. Nous considérons ici un aquifère artésien alimenté par son contact avec un lac de charge H_0 . Nous supposons que le fluide est initialement au repos et que sa charge est aussi partout égale à H_0 .

Nous creusons alors un puits en un point éloigné du lac. Si la charge dans l’aquifère est suffisamment grande, le fluide montera naturellement le long du puits jusqu’à la surface du sol ou au-delà. Dans ce cas, on dit que le puits est “artésien”. Il n’est pas nécessaire de pomper pour obtenir de l’eau d’un tel puits.

Artesian well

On denote by “artesian aquifer” and aquifer confined between two impervious media. We consider here an artesian aquifer is fed by its contact with a lake at head H_0 . We suppose that the fluid is initially at rest so that its head is also equal to H_0 every where.

We then dig a well at some point far from the lake. If the head in the aquifer is strong enough, the fluid will go up naturally along the well up to the land surface or beyond. In that case, one says that the well is “artesian”. There is no need pumping to get the water out of such a well.

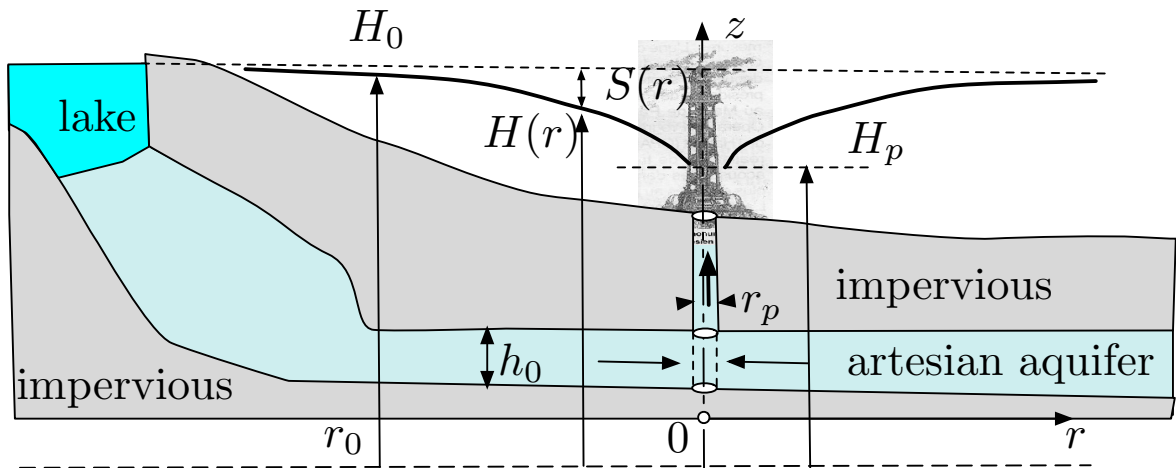


FIG. 2.11 – Courbe de rabattement $S(r)$ pour un puits artésien.

Depression curve $S(r)$ for an artesian well.

On suppose que l’aquifère artésien est confiné entre deux plans horizontaux imperméables séparés par une distance h_0 (voir figure 2.11). On suppose que le puits est un cylindre vertical de rayon r_p qui peut absorber l’eau sur toute l’épaisseur h_0 de la couche.

We suppose that the artesian aquifer is confined between two horizontal impervious plane separated by a distance h_0 (see Figure 2.11). We suppose that the well is a vertical cylinder of radius r_p which can absorb the water out of the whole thickness h_0 of the layer.

Lorsque le débit Q n’est pas nul dans le puits, la charge n’est plus constante et nous en supposons une distribution radiale $H(r)$ où r est la distance à l’axe du puits. La condition aux limites $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ est donc satisfaite sur les interfaces imperméables.

When a discharge flux Q is allowed in the well, the head is no longer constant and we assume a radial distribution $H(r)$ where r is the distance to the well axis. The boundary condition $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ is thus satisfied on the impervious interfaces.

On doit donc résoudre l'équation de Laplace

One must then solve the Laplace equation

$$\Delta H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.24)$$

qui conduit à $\frac{\partial H}{\partial r} = C/r$ où la constante d'intégration C doit être exprimée en fonction de Q . En utilisant la loi de Darcy $\underline{U} = -K_p \text{grad } H = -K_p \frac{\partial H}{\partial r} \underline{e}_r$ et en intégrant le débit sur un cylindre de rayon r et de hauteur h_0 , on trouve $C = Q/(2\pi K_p h_0)$.

which leads to $\frac{\partial H}{\partial r} = C/r$ where the integration constant C must be expressed in function of Q . Using the Darcy law $\underline{U} = -K_p \text{grad } H = -K_p \frac{\partial H}{\partial r} \underline{e}_r$ and integrating the flow discharge on a cylinder of radius r and of height h_0 , one finds $C = Q/(2\pi K_p h_0)$.

On déduit alors la “courbe de rabattement” $S(r)$ définie par “l'équation de Thiem”

One then deduces the “depression curve” $S(r)$ defined by the “Thiem equation”

$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right) \quad , \quad T = K_p h_0 \quad , \quad (2.25)$$

où r_0 est la distance entre le puits et le lac. On déduit aussi une relation entre le débit du puits et la charge H_p au centre du puits qui s'écrit

where r_0 is the distance between the well and the lake. One also deduces a relation between the flow discharge of the well and the head H_p at the center of the well which reads

$$S_p = H_0 - H_p = \frac{Q}{2\pi T} \text{Ln} \left(\frac{r_0}{r_p} \right) \quad . \quad (2.26)$$

3.2 Approximation de Dupuit

Dupuit approximation

On considère un aquifère phréatique compris entre un plan imperméable horizontal d'équation $z = Z_f$ et sa surface libre d'équation $z = Z_f + h(x, y)$. Sur la surface libre de la nappe, la pression est égale à la pression atmosphérique p_a , ce qui équivaut à dire que la charge $H(x, y, z) = z + p/(\rho g)$ est égale à $H = Z_f + h(x, y) + p_a/(\rho g)$ pour $z = Z_f + h(x, y)$. Entre ces deux surfaces, la vitesse débitante est donnée par la loi de Darcy $\underline{U}(x, y, z) = -K_p \text{grad } H(x, y, z)$.

We consider a phreatic aquifer is contained between a horizontal impervious plane of equation $z = Z_f$ and its water-table surface of equation $z = Z_f + h(x, y)$. On this water-table surface the pressure is equal to the atmospheric pressure p_a , which is equivalent to say that the head $H(x, y, z) = z + p/(\rho g)$ is equal to $H = Z_f + h(x, y) + p_a/(\rho g)$ for $z = Z_f + h(x, y)$. Between these two surfaces, the discharge velocity is given by the Darcy law $\underline{U}(x, y, z) = -K_p \text{grad } H(x, y, z)$.

L'“approximation de Dupuit” s'applique à des configurations où la pente de la surface de la nappe phréatique est suffisamment petite pour considérer que les iso- H sont presque verticales (figure 2.12). Dans ce cas, nous avons

The “Dupuit approximation” applies to configurations where the slope of the water-table is small enough to consider that the iso- H are vertical (figure 2.12). In that case we have

$$H(x, y, z) \sim H(x, y) = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} \quad , \quad (2.27)$$

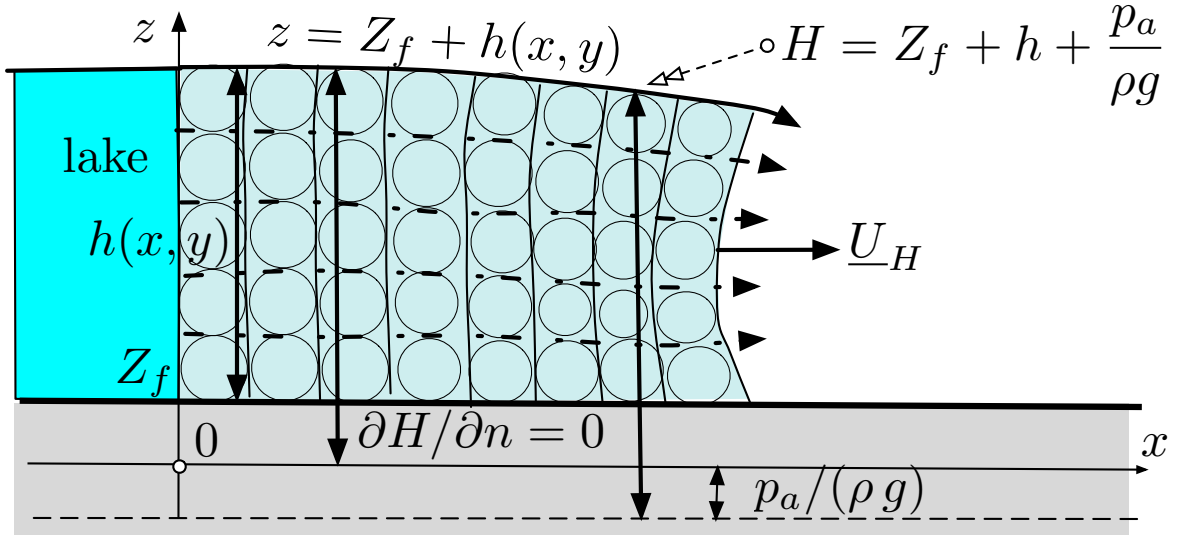


FIG. 2.12 – Approximation de Dupuit valide pour des iso- H presque verticaux.

Dupuit approximation valid for nearly vertical iso- H .

en appliquant les conditions aux limites à la surface. La vitesse débitante $\underline{U} = -K_p \text{grad } H$ est alors approximativement égale à la vitesse horizontale $\underline{U}_H = -K_p \text{grad } h$.

by applying the the boundary condition at the surface. The discharge velocity $\underline{U} = -K_p \text{grad } h$ is then equal approximatively to the horizontal velocity $\underline{U}_H = -K_p \text{grad } h$.

Le vecteur débit linéique, intégré du fond d'équation $z = Z_f$, à la surface d'équation $z = Z_f + h$, est alors approximativement égal à $\underline{q} = h \underline{U}_H$. En intégrant l'équation $\text{div } \underline{U} = 0$ de $z = Z_f$ à $z = Z_f + h$ et en écrivant que la vitesse normale à ces frontières est nulle, on montre que l'on a $\text{div } \underline{q} = 0$.

The lineic flow discharge vector, integrated from the bottom of equation $z = Z_f$, to the water-table of equation $z = Z_f + h$, is then approximatively equal to $\underline{q} = h \underline{U}_H$. By integrating the equation $\text{div } \underline{U} = 0$ from $z = Z_f$ to $z = Z_f + h$ and by writing that the velocity normal to these boundaries vanishes, one shows that $\text{div } \underline{q} = 0$.

En notant U et V les deux composantes de \underline{U}_H , les équations d'un écoulement stationnaire obtenues sous l'approximation de Dupuit sont les deux équations $\text{div } \underline{q} = 0$ et $\underline{U}_H = -K_p \text{grad } h$, ce qui s'écrit

By denoting U and V the two components of \underline{U}_H , the equations of a stationary flow obtained under the Dupuit approximation are the two equations $\text{div } \underline{q} = 0$ and $\underline{U}_H = -K_p \text{grad } h$, which reads

$$\frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial}{\partial y} (h V) = 0, \quad U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.28)$$

Si le milieu poreux est homogène (K_p constant), ce que nous supposons ici, le carré de la hauteur h est solution de l'équation de Laplace horizontale

If the porous medium is homogeneous (constant K_p), which we assume here, the square of the height h is solution of the horizontal Laplace equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h^2 = 0. \quad (2.29)$$

3.3 Applications et limitations

Applications and limitations

Comme exemple d'application de l'approximation de Dupuit, on considère d'abord un aquifère phréatique coulant d'un lac vers un **fossé prismatique** (figure 2.13). Nous supposons que l'interface imperméable du fond est le plan horizontal $z = Z_f$ avec Z_f constant.

As an example of the application for the Dupuit approximation, we first consider a phreatic aquifer flowing from a lake to a **prismatic ditch** (Figure 2.13). We assume that the bottom previous interface is the horizontal plane $z = Z_f$ with Z_f constant.

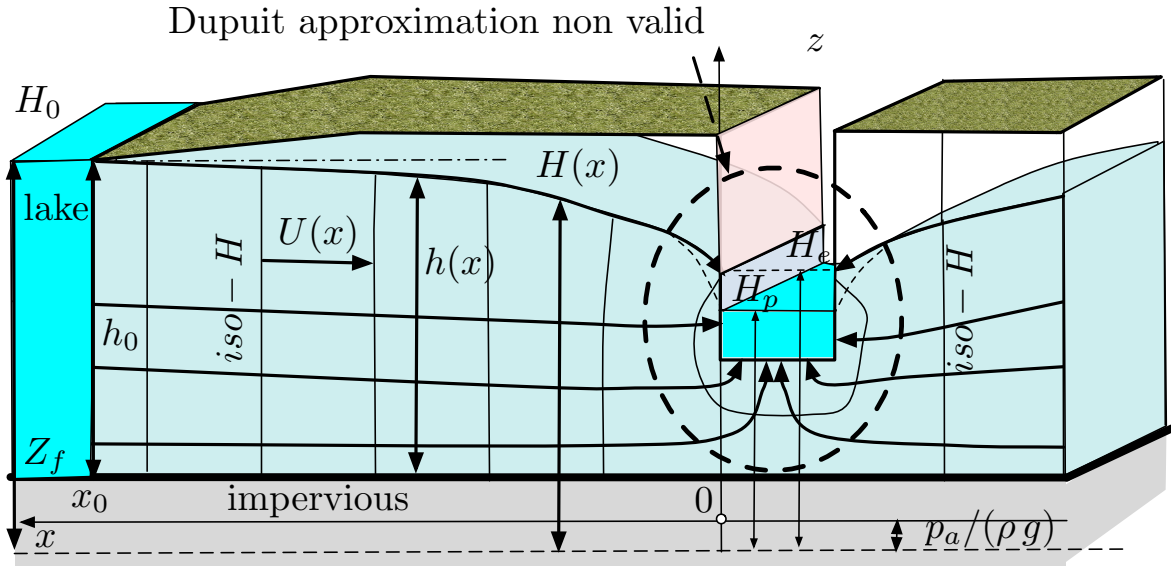


FIG. 2.13 – Écoulement vers un fossé prismatique dans un aquifère phréatique.

Flow towards a prismatic ditch in a phreatic aquifer.

On note q le débit linéique du fossé dans la direction y . Nous supposons que le lac est à la charge H_0 et nous notons x_0 sa distance au fossé. On note h_0 la distance entre le plan imperméable et la surface libre du lac. Nous avons donc $H_0 = Z_f + h_0 + \frac{p_a}{\rho g}$.

We denote by q the lineic flow discharge of the ditch in the y direction. We assume that the lake is at the load H_0 and we denote by x_0 its distance from the ditch. We denote by h_0 be the distance between the impervious plane and the free surface of the lake. We thus have $H_0 = Z_f + h_0 + \frac{p_a}{\rho g}$.

En comparant avec les solutions des équations exactes, on peut montrer que l'approximation de Dupuit est valide partout excepté près du fossé où la vitesse \underline{U} ne peut plus être considérée comme horizontale.

By comparing with the solutions of the the exact equations, it can be shown that the Dupuit approximation is everywhere valid excepted near the ditch where the discharge velocity \underline{U} can no longer be considered as horizontal.

Pour les points où l'hypothèse de Dupuit est valide, la charge est égale à $H = Z_f + h + \frac{p_a}{\rho g}$ les équations (2.28) s'écrivent

For the points where the Dupuit hypothesis is valid, the load is equal to $H = h + \frac{p_a}{\rho g}$ equations (2.28) read

$$\frac{d}{dx} [U(x) h(x)] = 0 \quad , \quad U(x) = -K_p \frac{dH}{dx}(x) = -K_p \frac{dh}{dx}(x) \quad (2.30)$$

et peuvent être intégrées, en imposant une symétrie $x \rightarrow -x$, en

$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p} |x_0 - x|. \quad (2.31)$$

On en déduit alors la charge H_p au fossé obtenue dans le cadre de l'approximation de Dupuit. Bien que cette approximation ne soit pas valide près du puits, cette valeur H_p peut être utilisée pour déterminer le niveau d'eau dans le fossé en disant que $z = Z_f + h_p = H_p - p_a/(\rho g)$ est l'altitude de la surface libre. La solution obtenue sans l'approximation de Dupuit met en évidence l'existence d'une "face de résurgence" de sorte que la surface de la nappe ne coïncide pas avec la surface de l'eau du fossé.

and can be integrated, imposing a symmetry $x \rightarrow -x$, into

One then deduces the head H_p at the ditch obtained in the framework of the Dupuit approximation. Even though this approximation is not valid close to the well, this value of H_p can be used to determine the level of the water in the ditch by saying that $z = Z_f + h_p = H_p - p_a/(\rho g)$ is the altitude of its free surface. The solution obtained with the Dupuit approximation put forwards the existence of a "seeping face" so that the water-table does not coincide with the free surface of the ditch water.

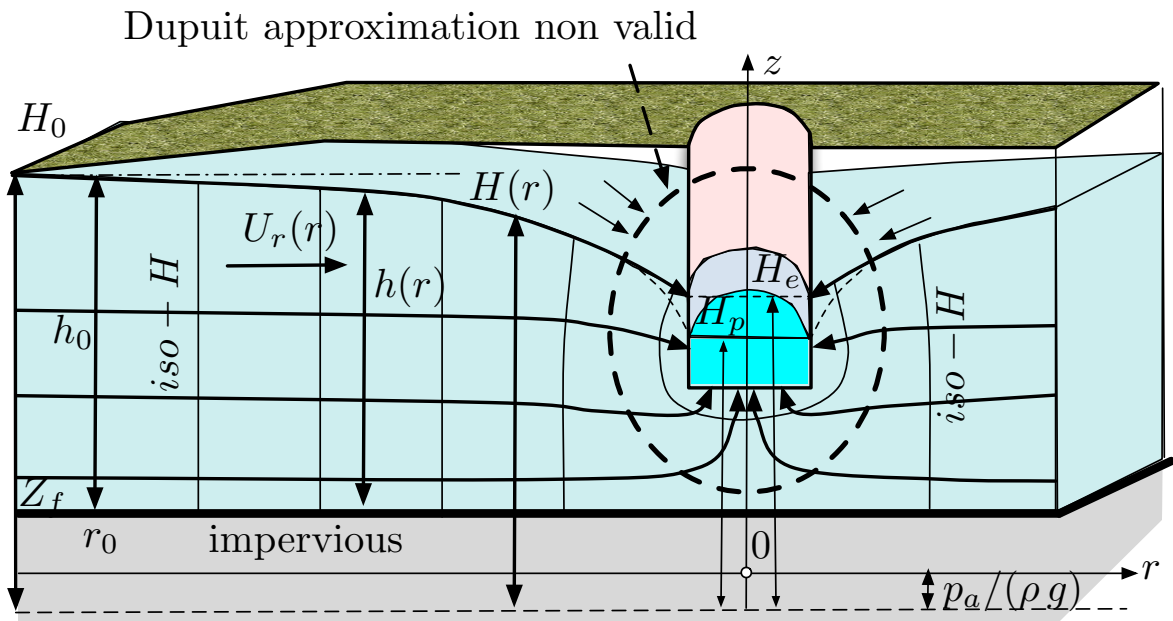


FIG. 2.14 – Vitesse $\underline{U} = U_r \underline{e}_r$ d'un aquifère autour un puits vertical et cylindrique.

Velocity $\underline{U} = U_r \underline{e}_r$ of a phreatic aquifer around vertical and cylindrical well.

Si l'on remplace maintenant le fossé par un puits vertical et cylindrique (figure 2.14) dans lequel un débit Q est pompé, la vitesse radiale $U_r(r)$ et la charge $H(r)$ ne dépendent que du rayon r . Pour les points où l'approximation de Dupuit est valide, on a $H = Z_f + h$ et les équations (2.28) s'écrivent

If we now replace the ditch by a **vertical and cylindrical well** (figure 2.14) in which a flow discharge Q is pumped out, the radial discharge velocity $U_r(r)$ and the head $H(r)$ only depend of the radius r . For the points where the Dupuit approximation is valid, one has $H = Z_f + h$ and the equations (2.28) read

$$\frac{d}{dr} [r U_r(r) h(r)] = 0 \quad , \quad U_r(r) = -K_p \frac{dH}{dr}(r) = -K_p \frac{dh}{dr}(r). \quad (2.32)$$

En intégrant ces équations, on obtient | By integrating these equations, one obtains

$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \text{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right). \quad (2.33)$$

FORMULAIRE

FORMULAS

Perte de charge

Head loss

Charge hydraulique : | Hydraulic head :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} U^2 \sim \frac{p}{\rho g} + z.$$

Équations de Navier-Stokes moyennées : | Averaged Navier-Stokes équations :

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \text{grad } H = -\underline{J}.$$

Milieux poreux

Porous media

Loi de Darcy : | Darcy law :

$$\underline{J}(\underline{x}, t) = \frac{1}{K_p(\underline{x}, t)} \underline{U}(\underline{x}, t).$$

Écoulements lents : | Slow flows :

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \underline{U} = -K_p \text{grad } H.$$

Milieu poreux homogène : | Homogeneous porous media :

$$\Delta H = 0, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z.$$

Conditions aux limites imperméables : | Impervious boundary conditions :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0.$$

Conditions aux limites de surface libre : | Free surface boundary conditions :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \quad H = Z_f + h + \frac{p_a}{\rho g} \quad / \quad \text{interface } z = Z_f + h(\underline{x}).$$

Écoulements souterrains

Subsurface flows

Puits artésien :

| Artesian well :

$$S(r) = H_0 - H(r) = \frac{Q}{2\pi T} \operatorname{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right) , \quad T = K_p h_0 .$$

Approximation de Dupuit :

| Dupuit approximation :

$$H(x, y, z) \sim H(x, y) = Z_f + h(x, y) + \frac{p_a}{\rho g} .$$

Dupuit et débit :

| Dupuit and discharge :

$$U = -K_p \frac{\partial h}{\partial x} , \quad V = -K_p \frac{\partial h}{\partial y} , \quad \frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial}{\partial y} (h V) = 0 .$$

Dupuit homogène :

| Homogeneous Dupuit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) h^2 = 0 .$$

Fossé prismatique :

| Prismatic ditch :

$$h_0^2 - h^2(x) = \frac{2q}{K_p} |x_0 - x| .$$

Puits cylindrique :

| Cylindrical well :

$$h_0^2 - h^2(r) = \frac{Q}{\pi K_p} \operatorname{Ln} \left(\frac{r_0}{r} \right) .$$

EXERCICES

EXERCISES

EXERCICE 2.1**Aquifère artésien de section constante**

On considère l'écoulement dans un aquifère confiné par des roches imperméables et s'écoulant dans un milieu poreux de section constante A (figure 2.15). L'aquifère est en contact avec un lac dont la surface libre est à la cote z_1 en $x = 0$. Il en est de même en $x = L$ avec un deuxième lac dont la surface libre est à la cote z_2 . On suppose que le milieu poreux est homogène et que sa conductivité hydraulique est K_p .

- 1) Calculer la charge hydraulique $H(x)$ pour $x \in [0, L]$ en supposant que l'écoulement est stationnaire. En déduire la vitesse débitante U de l'aquifère.

La charge en $x = 0$ est $H_1 = p_a/(\rho g) + z_1$. La charge en $x = L$ est $H_2 = p_a/(\rho g) + z_2$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{dH}{dx}$ et la conservation de la masse $\frac{d(UA)}{dx} = 0$ entraînent $H = H_1 - x(H_1 - H_2)/L$ et $U = K_p(H_1 - H_2)/L$.

EXERCICE 2.2 Percolation du café

On considère un percolateur cylindrique d'axe vertical et de section constante A . Il contient un milieu poreux de conductivité K_p et de porosité $m = 0.1$ sur une hauteur L (figure 2.16a). À $t = 0$, le milieu poreux est surmonté d'une lame d'eau dont la surface libre est à la cote $z = h_0$. Le fond du percolateur est constitué d'une grille à travers laquelle s'écoule l'eau qui est ainsi en contact avec la pression atmosphérique. On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la loi de Darcy soit valide comme dans le cas stationnaire.

- 1) Calculer le temps t_* au bout duquel la lame d'eau a disparu.

La charge en $z \in [L, L + h]$ est $H_1 = p_a/(\rho g) + h(t) + L$. La charge en $z = 0$ est $H_2 = p_a/(\rho g)$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{\partial H}{\partial z}$ et la conservation de la masse $\frac{\partial(UA)}{\partial z} = A \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ entraînent $U = -K_p h(t)/L$. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U = -K_p h/L$ pour $h \geq L$. On en déduit $h(t) = h_0 \exp(-K_p t/L)$. On a $h(t_*) = L$ pour $t_* = (L/K_p) \ln(h_0/L)$.

- 2) Au-delà de t_* , la cote $h(t)$ de la "nappe phréatique" dans le milieu poreux continue de décroître (figure 2.16b). Calculer le temps $t = T$ au bout duquel toute l'eau a percolé. On suppose que $L = 30$ cm, $h_0 = 33$ cm et $\tau = T - t_* = 10$ s. En déduire la conductivité K_p du milieu poreux.

Comme la différence de charge entre le niveau de la nappe phréatique et le fond est $h(t)$ la vitesse débitante du milieu poreux est $U = -K_p \frac{dh}{dz} = -K_p$. Cette vitesse débitante est égale à m fois la vitesse réelle. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse réelle des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U/m = -K_p/m$ pour $h \leq L$. La vitesse de l'aquifère est donc $\frac{dh}{dt} = K_p/m$. Comme $h(t_*) = L$, on a donc $h(t) = L - K_p(t - t_*)/m$. On a $h(T) = 0$ pour $T = t_* + Lm/K_p$. On a donc $K_p = Lm/\tau = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s.

- 3) On considère maintenant un percolateur 2D dont la section verticale est indiquée sur la figure 2.17. Indiquer l'équation permettant de résoudre la charge $H(x, z)$ et spécifier ses conditions aux limites. Donner l'allure des trajectoires en utilisant la "méthode des cercles".

La charge dans le milieu poreux est la solution de l'équation de Laplace $\Delta H = 0$ avec les conditions aux limites $H = H_1$ en haut, $H = H_2$ sur la grille et $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ sur les parois imperméables. Une solution "artistique" de la méthode des cercles est indiquée sur la figure 2.16 et comparée à la solution numérique.

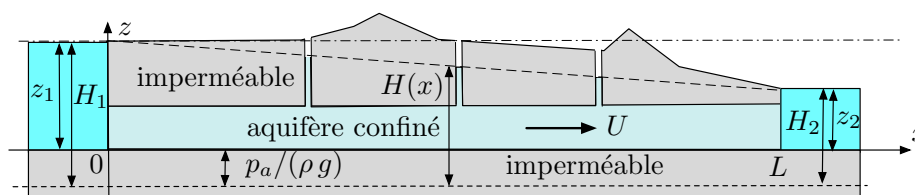


FIG. 2.15 – Aquifère confiné (artésien)

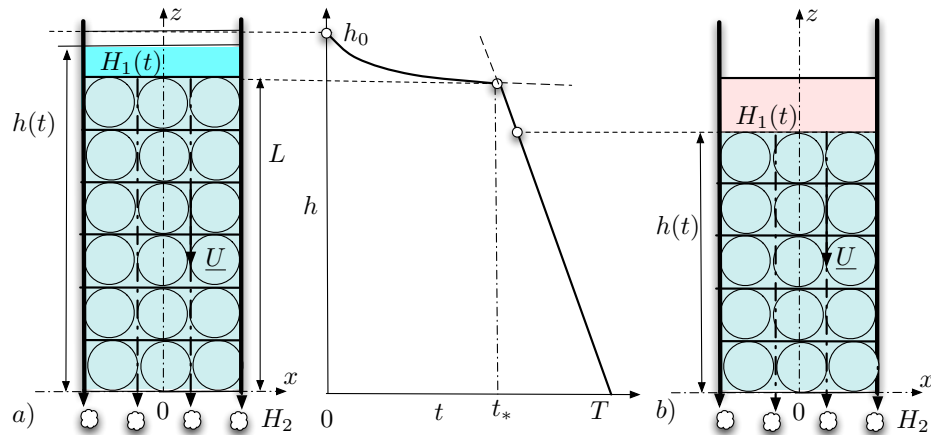


FIG. 2.16 – Percolation cylindrique : a) surmonté d’une couche d’eau, b) avec nappe phréatique.

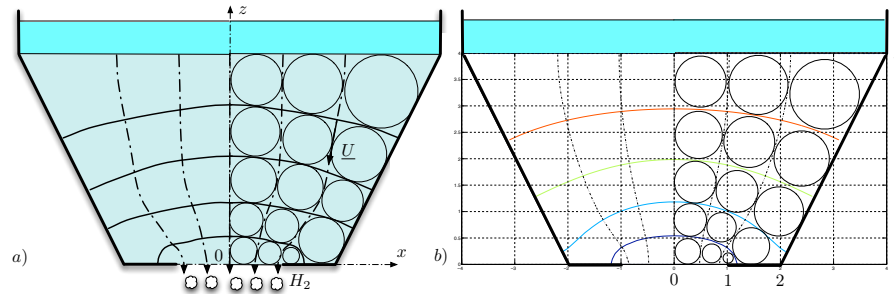


FIG. 2.17 – Percolateur 2D de forme complexe. a) Résolution “artistique” par la méthode des cercles. b) Solution numérique.

EXERCICE 2.3 Coin salé (*exercice élaboré avec Th. Dubos*)

Près d’une côte, le sous-sol poreux s’imprègne d’eau salée au contact de la mer. Il en résulte la présence d’une nappe d’eau salée sous la nappe d’eau douce alimentée depuis le continent. On cherche à déterminer la position de l’interface eau douce - eau salée qui détermine, en particulier, la profondeur admissible des captages d’eau douce.

On se place dans une géométrie à deux dimensions (figure 2.18). On note $z = Z_1(x)$ la cote de l’interface eau douce - sol sec et $z = Z_2(x)$ celle de l’interface eau salée - eau douce. On suppose que $Z_1(0) = Z_2(0) = L$ et que l’hypothèse de Dupuit est valide, sauf dans le voisinage de $x = 0$. La masse volumique ρ_2 de l’eau salée est plus grande que la masse volumique ρ_1 de l’eau douce. On note K_p la conductivité du sol.

- 1) Calculer la charge H_1 dans la nappe d’eau douce. Quelle grandeur physique est continue à l’interface eau douce - eau salée ? Calculer les champs de pression $p_1(x, z)$ et $p_2(x, z)$ dans les deux nappes. En déduire H_2 .

L’hypothèse de Dupuit permet d’écrire $H_1(x) = p_a/(\rho_1 g) + Z_1(x)$. La pression est continue à l’interface. On a donc $p_1(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - z)$ et $p_2(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - Z_2) + \rho_2 g (Z_2 - z)$. On en déduit, en utilisant de nouveau l’hypothèse de Dupuit, que $H_2(x) = p_a/(\rho_2 g) + \frac{\rho_1}{\rho_2} Z_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} Z_2$.

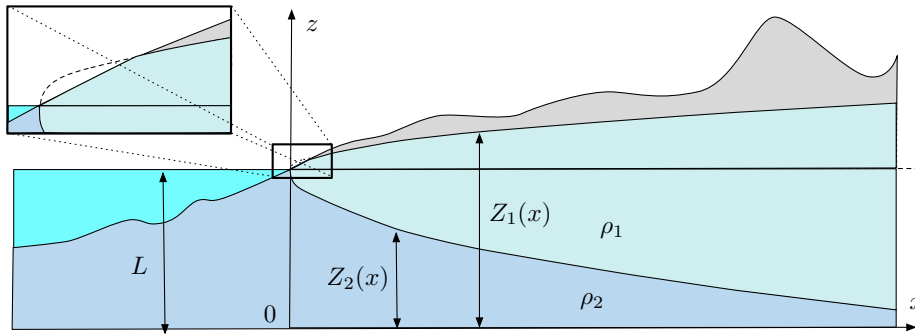


FIG. 2.18 – Nappe phréatique salée (ρ_2) en contact avec la nappe phréatique d'eau douce (ρ_1).

- 2) La nappe d'eau salée n'étant pas alimentée, montrer que H_2 est une constante dont on donnera la valeur. En déduire $L - Z_2(x)$ en fonction de $Z_1(x) - L$. Quel est le rapport des pentes des interfaces pour $\rho_1 = 1\,000\text{ kg/m}^3$ et $\rho_2 = 1\,035\text{ kg/m}^3$.

La loi de Darcy $U_2 = -K_p \frac{\partial H_2}{\partial x}$ entraîne que H_2 est constant puisque $U_2 = 0$. À partir de la valeur $Z_2(0) = L$, on déduit que $H_2 = p_a/(\rho_2 g) + L$. On en déduit $L - Z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L)$. Le rapport des pente est $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \sim 30$.

- 3) En revanche, la nappe d'eau douce est alimentée par un débit linéique q venant du continent. En déduire $Z_1(x) - L$ et $L - Z_2(x)$. Pourquoi doit-on supposer l'existence d'une surface de résurgence près de $x = 0$?

La vitesse débitante $U_1(x) = -K_p \frac{\partial H_1}{\partial x}$ vérifie $q = (Z_1 - Z_2) U_1$. On en déduit $q = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L) \frac{\partial (Z_1 - L)}{\partial x}$ et donc $Z_1 - L = \sqrt{2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{q}{K_p} x}$ et $L - Z_2 = \sqrt{2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)} \frac{q}{K_p} x}$. Dans le voisinage de $x = 0$, l'hypothèse de Dupuit n'est plus valable. Pour éviter une vitesse $U_1(0)$ infinie, il est nécessaire d'imposer l'existence d'une surface de résurgence de la nappe d'eau douce.

- 4) On creuse un puits dans la nappe phréatique. On suppose que le pompage crée une profondeur de rabattement $S_p = 3\text{ m}$ dans le puits. De quelle hauteur remonte l'eau salée dans le puits.

L'eau salée remonte d'une hauteur $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} S_p = 33\text{ m}$.