

# Chapitre 1

## Écoulements incompressibles

*O. Thual, 26 juin 2010*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Cinématique</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1	Eulérien ou lagrangien . . . . .	4
1.2	Dérivée particulaire . . . . .	7
1.3	Taux de déformation . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Lois de conservation</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	Théorèmes de transport . . . . .	11
2.2	Flux et bilan local . . . . .	12
2.3	Quantité de mouvement . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Fluides newtoniens</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	15
3.2	Poiseuille circulaire en charge . . . . .	17
3.3	Poiseuille plan à surface libre . . . . .	19

---

## Introduction

Ce chapitre résume les étapes essentielles de la mécanique des milieux continus nécessaires pour établir les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \underline{F} + \nu \Delta \underline{U} . \quad (1.1)$$

Ces équations proviennent des ingrédients suivants :

- les axiomes de la mécanique : conservation de la masse et de la quantité de mouvement,
- la contrainte d'incompressibilité,
- la loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens.

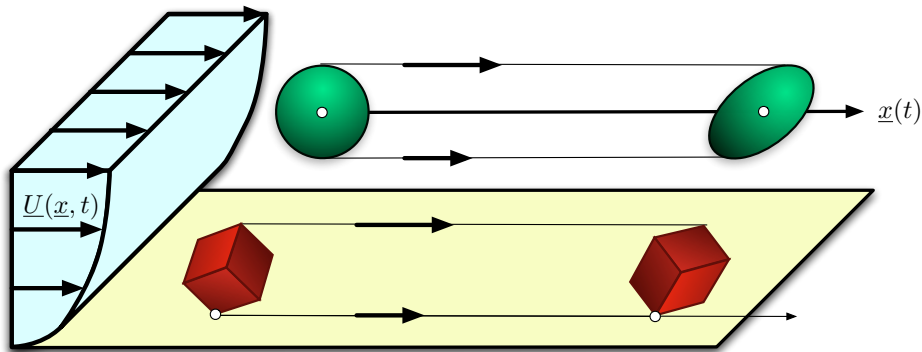


FIG. 1.1 – Mouvements de particules dans un écoulement parallèle cisailé.

Les *axiomes de la mécanique* s'énoncent en disant que la masse de tout volume de particules transportées par le mouvement est constante et que la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement est égale à la résultante des forces appliquées. Pour obtenir des équations aux dérivées partielles à partir de ces principes macroscopiques, on doit dériver des intégrales triples sur des domaines qui varient avec le temps en étant transportés par le mouvement. Il est alors nécessaire d'explorer la "représentation lagrangienne" des champs considérés pour transformer les intégrales sur des domaines mobiles en intégrales sur des domaines fixes qui décrivent les positions initiales des particules mobiles.

La *contrainte d'incompressibilité* dit que l'on peut considérer le volume de tout domaine transporté par l'écoulement comme étant constant. C'est une

approximation qui est valide lorsque la vitesse de l'écoulement est petite devant la vitesse du son dans le fluide. Pour exprimer cette contrainte, qui dit que la divergence du champ de vitesse est nulle, il est nécessaire d'exprimer le taux de variation des volumes en fonction des dérivées partielles de ce champ.

La *loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens* est basée sur le fait que les forces de contact dépendent de la pression et des dérivées spatiales de la vitesse constituant le tenseur des "taux de déformations". Il est nécessaire de définir le "tenseur des contraintes" pour décrire ces forces de contact. Sa dépendance linéaire avec la normale à une surface élémentaire vient d'une propriété générale des forces de surface impliquées dans la loi de conservation de la quantité de mouvement. La démonstration est classiquement obtenue à l'aide de la "construction des tétraèdres" qui conduit à l'important concept de vecteur flux de champs scalaires ou de flux tensoriel de champs vectoriels.

Dans le présent chapitre, nous cherchons à expliciter les concepts ci-dessus de la manière la plus simple possible. Les lecteurs qui connaissent déjà la "mécanique des milieux continus" n'auront qu'à prendre connaissance du jeu de notations avant d'étudier les exemples développés à la fin du chapitre.

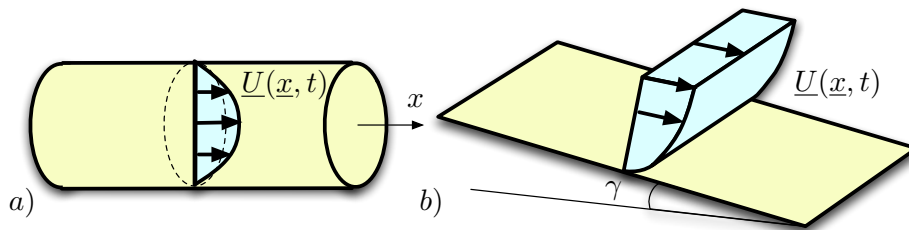


FIG. 1.2 – a) Écoulement de Poiseuille circulaire en charge. b) Écoulement de Poiseuille à surface libre sur un plan incliné.

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre, deux exemples d'écoulements sont présentés. Au-delà de leur intérêt comme exemples d'application des équations de Navier-Stokes, ces écoulements sont utilisés ici pour introduire l'hydraulique en charge dans les conduites et l'hydraulique des écoulements à surface libre dans les canaux. Dans les deux exemples, l'important concept de "charge hydraulique" est introduit. La relation entre la "perte de charge linéique" et la "contrainte de cisaillement" due aux frottements sur les frontières est mise en avant.

Le premier exemple, qui introduit les écoulements en charge, est l'écoulement de Poiseuille circulaire dans un tube (figure 1.2a), forcé par un gradient de pression. Quand l'écoulement est suffisamment lent, il est laminaire et sa vitesse moyenne est proportionnelle à la perte de charge linéique. Cette importante propriété est à la base de la loi de Darcy valable pour les écoulements en milieu poreux comme, par exemple, les écoulements souterrains.

Le deuxième exemple, qui introduit les écoulements à surface libre, est l'écoulement de Poiseuille plan sur un canal incliné (figure 1.2b). On introduit le coefficient de frottement qui provient d'une analyse dimensionnelle sur la perte de charge. Quand l'écoulement devient turbulent, ce qui est le cas pour les écoulements à surface libre réalistes, la paramétrisation de ce coefficient de frottement est au centre de la modélisation de ces écoulements.

## 1 Cinématique

Le mouvement d'un milieu continu est défini par un champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  ou par une famille de déformations  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  paramétrées par le temps. Un premier point de vue, eulérien, consiste à exprimer tous les champs en fonction des points  $\underline{x}$  de la configuration déformée. Le point de vue lagrangien consiste à les exprimer en fonction des positions  $\underline{a}$  des particules dans la configuration de référence qui est ici la position initiale du mouvement. Nous exprimons ici la loi de conservation de la masse dans les deux représentations.

### 1.1 Eulérien ou lagrangien

La représentation eulérienne d'un champ scalaire  $B$  est, tout simplement, une fonction  $(\underline{x}, t) \mapsto B(\underline{x}, t)$  qui associe le scalaire  $B(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}$  à tout point  $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$  et tout temps  $t \in \mathbb{R}$ .

La représentation eulérienne  $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$  du champ de vitesse d'un écoulement est, similairement, une fonction de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On note aussi  $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$  et  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$  les composantes  $(u, v, w)$  et  $(x, y, z)$  lorsque nécessaire.

Les trajectoires associées à l'écoulement  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  sont des courbes paramétrées par le temps  $t \mapsto \underline{x}(t)$  solutions de l'équation  $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ . En notant  $\underline{x}(0) = \underline{a}$  les conditions initiales de toutes les trajectoires, on peut construire la

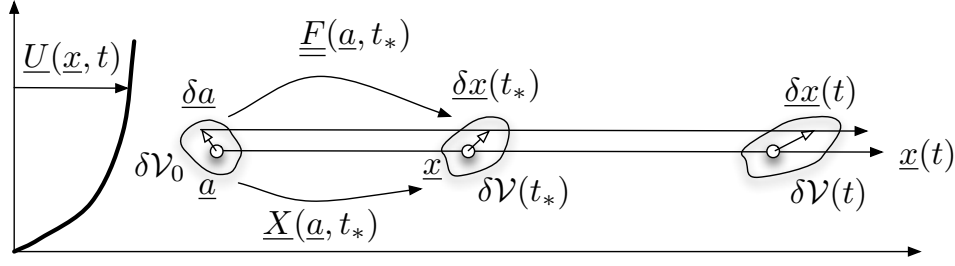


FIG. 1.3 – Trajectoires  $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$  associées à la vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$ . Petit vecteur  $\underline{\delta x}(t)$  transporté par le mouvement avec  $\underline{\delta x}(0) = \underline{\delta a}$  et petit volume  $\delta\mathcal{V}(t)$  transporté par le mouvement avec  $\delta\mathcal{V}(0) = \delta\mathcal{V}_0$ .

“description lagrangienne” de l’écoulement  $(\underline{a}, t) \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$  où  $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t)$  est la trajectoire issue de la condition initiale  $\underline{x}(0) = \underline{a}$  (figure 1.3).

Pour tout temps  $t$ , on peut considérer la matrice Jacobienne  $\underline{F}(\underline{a}, t)$  de la fonction  $\underline{a} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$  dont les composantes sont  $F_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t)$ . On peut alors écrire

$$\underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}, t) = \underline{X}(\underline{a}) + \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta a} + \mathcal{O}(\|\underline{\delta a}\|^2), \quad (1.2)$$

où  $\underline{\delta a}$  est un petit vecteur et  $\mathcal{O}(\|\underline{\delta a}\|^2)$  une erreur d’ordre deux. En notant  $\underline{\delta x}(t) = \underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}, t) - \underline{X}(\underline{a})$  l’image au temps  $t$  du petit vecteur  $\underline{\delta a}$ , on peut écrire

$$\underline{\delta x}(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta a} + \mathcal{O}(\|\underline{\delta a}\|^2) \iff \delta x_i(t) = F_{ij}(\underline{a}, t) \delta a_j + \mathcal{O}(\|\underline{\delta a}\|^2), \quad (1.3)$$

où nous avons utilisé la “convention de sommation d’Einstein” pour laquelle le symbole  $\sum_{j=1}^3$  est omis lorsque l’indice de sommation  $j$  est répété. On confond ici le “tenseur d’ordre deux”  $\underline{F}$  et la matrice  $3 \times 3$  de ses composantes.

La variation des volumes peut être calculée en considérant trois petits vecteurs  $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ ,  $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}(t)$  et  $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}(t)$  transportés par le mouvement (figure 1.4), ce qui signifie que  $\underline{x}(t')$ ,  $\underline{x}''(t)$  et  $\underline{x}'''(t)$  sont des trajectoires proches de la trajectoire  $\underline{x}(t)$ . Elles forment un parallélépipède dont le volume  $\delta\mathcal{V}$  est le “produit mixte” de ces trois vecteurs défini par

$$\delta\mathcal{V}(t) = \left( \underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t) \right) = \begin{vmatrix} \delta x_1 & \delta x_1' & \delta x_1'' \\ \delta x_2 & \delta x_2' & \delta x_2'' \\ \delta x_3 & \delta x_3' & \delta x_3'' \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

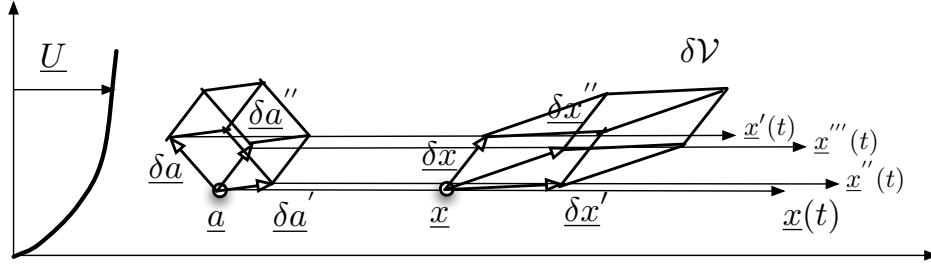


FIG. 1.4 – Déformation d'un petit cube par l'écoulement.

qui est le déterminant de la matrice constituée des composantes des trois petits vecteurs. Si  $\underline{\delta x}(0) = \delta a \underline{e}_x$ ,  $\underline{\delta x}'(0) = \delta a \underline{e}_y$  et  $\underline{\delta x}''(0) = \delta a \underline{e}_z$  à  $t = 0$ , où  $\delta a$  est une petite longueur, le parallélépipède est un cube à  $t = 0$  dont le volume est  $\delta\mathcal{V}(0) = (\delta a)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta a)^3$ . Comme  $\underline{\delta x}(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta x}(0)$ ,  $\underline{\delta x}'(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta x}'(0)$  et  $\underline{\delta x}''(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta x}''(0)$ , avec une erreur de seulement  $O[(\delta a)^2]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V}(t) &= \left( \underline{F} \cdot \underline{\delta x}(0), \underline{F} \cdot \underline{\delta x}'(0), \underline{F} \cdot \underline{\delta x}''(0) \right) = (\delta a)^3 \left( \underline{F} \cdot \underline{e}_x, \underline{F} \cdot \underline{e}_y, \underline{F} \cdot \underline{e}_z \right) \\ &= (\delta a)^3 \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = (\delta a)^3 \det \underline{F} = \delta\mathcal{V}(0) J(\underline{a}, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où  $J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t)$  est le “Jacobien” de l'application  $\underline{x} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$  au temps  $t$  pour laquelle on suppose  $\det \underline{F}(\underline{a}, t) > 0$ .

La relation  $\delta\mathcal{V}(t) = \delta\mathcal{V}_0 J(\underline{a}, t)$ , démontrée dans le cas d'un petit cube, peut être aisément généralisée au cas de petits volumes de formes quelconques en les découpant en cubes encore plus petits.

Pour des écoulements réalistes, on a  $J(\underline{a}, t) > 0$ , ce qui implique que l'inverse  $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$  de  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  au temps  $t$  existe pour déterminer la condition initiale  $\underline{a}$  d'une trajectoire dont la position  $\underline{x}$  est connue au temps  $t$ . Avec cette famille de trajectoires associées au champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$ , on peut définir la représentation Lagrangienne  $B^{(L)}(\underline{a}, t)$  du champ  $B$  à travers la relation

$$B(\underline{x}, t) = B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] \iff B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t), \quad (1.6)$$

ce qui revient à dire que  $B(\underline{x}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, t)$  quand  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  ou, de manière équivalente,  $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ .

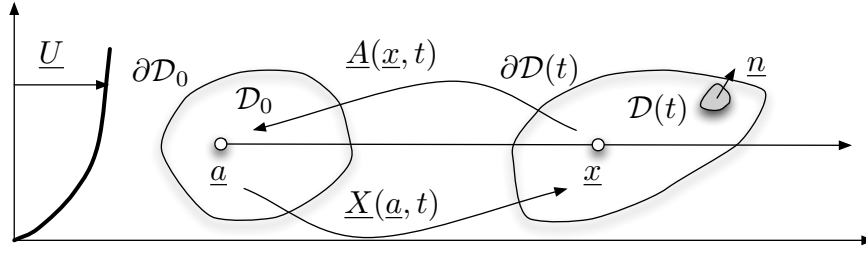


FIG. 1.5 – Domaine  $\mathcal{D}(t)$  transporté par l'écoulement avec  $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$ .

Étant donné un ensemble  $\mathcal{D}_0$  de particules  $\underline{a}$  observées au temps  $t = 0$ , on note  $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$  l'ensemble de leurs images  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  au temps  $t$  (figure 1.5). Le changement de variable  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  pour une intégrale triple sur un domaine mobile  $\mathcal{D}(t)$  s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} B(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} B^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (1.7)$$

où  $d^3x = J(\underline{a}, t) d^3a$  est le volume d'intégration dans  $\mathcal{D}(t)$  qui peut être vu comme l'image du volume d'intégration  $d^3a$  dans  $\mathcal{D}_0$ .

La conservation de la masse d'un fluide de champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  énonce que la quantité

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (1.8)$$

où  $\rho$  est la masse volumique, est indépendante du temps. Si  $\rho[\underline{X}(\underline{a}, t), 0] = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$  est uniforme au temps  $t = 0$ , le principe de conservation de la masse impose que la masse volumique satisfait la relation

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 \quad (1.9)$$

pour tout temps  $t$ . Cette formulation lagrangienne du principe de conservation de la masse sera complétée par une formulation eulérienne plus loin.

## 1.2 Dérivée particulière

Étant donné un champ scalaire  $B(\underline{x}, t)$  et une trajectoire  $\underline{x}(t)$  associée au champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  avec  $\underline{x}(0) = \underline{a}$ , on peut considérer la fonction

$$b(t) = B^{(L)}(\underline{a}, t) = B[\underline{x}(t), t] \quad (1.10)$$

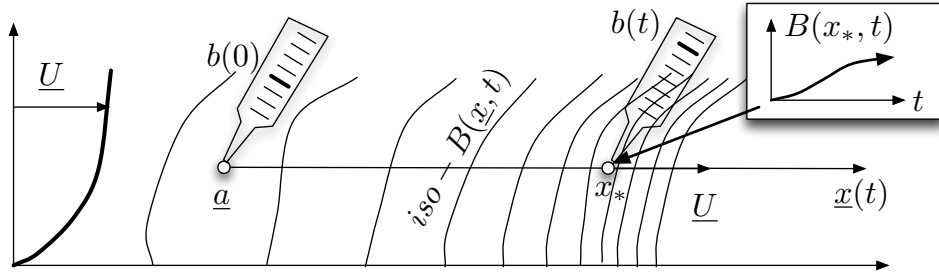


FIG. 1.6 – Fonction  $b(t)$  obtenue en mesurant  $B$  le long de la trajectoire  $\underline{x}(t)$ .

qui décrit l'évolution temporelle de la quantité  $B$  vue par une particule qui suit la trajectoire  $\underline{x}(t)$  (figure 1.6). Puisque  $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ , on peut écrire

$$\frac{db}{dt}(t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \left( \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} B \right) [\underline{x}(t), t]. \quad (1.11)$$

On peut alors définir la “dérivée particulaire”  $\frac{dB}{dt}$  d'un champ  $B$  par sa représentation lagrangienne  $\left( \frac{dB}{dt} \right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$  ou, de manière équivalente, par sa représentation eulérienne

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} B(\underline{x}, t). \quad (1.12)$$

De manière similaire, la dérivée particulaire d'un champ de vecteur  $\underline{V}(\underline{x}, t)$  est définie par ses composantes

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} V_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

qui s'écrit aussi, en utilisant l'opérateur différentiel  $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  :

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{V} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V}. \quad (1.14)$$

Le champ d'accélération  $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$  est défini comme étant la dérivée particulaire du champ de vitesse  $\underline{U}$ . À l'aide d'un peu d'algèbre, on peut montrer la relation utile

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}. \quad (1.15)$$

où  $\underline{\text{rot}} \underline{U}$  est le champ de vorticité.



### 1.3 Taux de déformation

Le gradient du champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  est la matrice Jacobienne  $\underline{K} = \underline{\text{grad}} \underline{U}$  de l'application  $\underline{x} \mapsto \underline{U}(\underline{x}, t)$  au temps  $t$ . Ses composantes sont  $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  et on peut écrire

$$\underline{U}(\underline{x} + \delta \underline{x}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{K}(\underline{x}, t) \cdot \delta \underline{x} + \underline{O}(\|\delta \underline{x}\|^2), \quad (1.16)$$

où  $\delta \underline{x}$  est un petit vecteur et  $\underline{O}(\|\delta \underline{x}\|^2)$  une erreur d'ordre 2. Si on considère deux trajectoires  $\underline{x}(t)$  et  $\underline{x}'(t)$  telles que  $\delta \underline{x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$  est un petit vecteur (figure 1.7), on peut écrire

$$\frac{d}{dt} [\delta \underline{x}(t)] = \underline{U}[\underline{x}'(t), t] - \underline{U}[\underline{x}(t), t] = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \delta \underline{x}(t) + \underline{O}(\|\delta \underline{x}(t)\|^2). \quad (1.17)$$

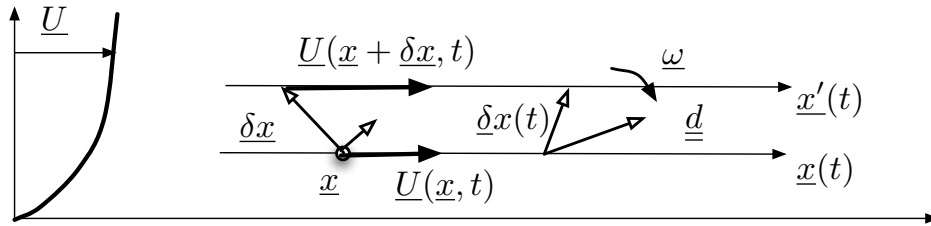


FIG. 1.7 – Comparaison des vitesses de deux trajectoires proches.

La décomposition  $\underline{K} = \underline{\omega} + \underline{d}$  en une partie antisymétrique  $\underline{\omega}$  et sa partie symétrique  $\underline{d}$  entraîne

$$\underline{U}(\underline{x}', t) - \underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\omega}(\underline{x}, t) \cdot \delta \underline{x} + \underline{d} \cdot \delta \underline{x} + \underline{O}(\|\delta \underline{x}\|^2) \quad (1.18)$$

si  $\underline{x}'$  et  $\underline{x}$  sont séparés par un petit vecteur  $\delta \underline{x} = \underline{x}' - \underline{x}$ .

Pour toute matrice antisymétrique  $\underline{\omega}$ , il existe un unique vecteur  $\underline{\omega}$  tel que  $\underline{\omega} \cdot \delta \underline{x} = \underline{\omega} \wedge \delta \underline{x}$  pour tout vecteur  $\delta \underline{x}$ . Ses composantes satisfont  $\omega_i + \omega_{jk} = 0$  si le triplet  $(i, j, k)$  est une permutation directe de  $(1, 2, 3)$ . Pour le cas présent  $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ , on montre que  $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$ . En écrivant

$$\underline{U}(\underline{x}', t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge (\underline{x}' - \underline{x}) + \underline{d} \cdot \delta \underline{x} + \underline{O}(\|\delta \underline{x}\|^2), \quad (1.19)$$

on voit que  $\underline{\omega}$ , appelé le “tenseur des taux de rotation”, décrit un mouvement de rotation solide dans le voisinage de  $\underline{x}$  dont le vecteur rotation est, par définition,  $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$ .

La partie symétrique  $\underline{d}$ , dont les composantes sont  $d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ , est appelée le “tenseur des taux de déformation”. Il est tel que

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 \underline{\delta x}(t) \cdot \underline{d}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) = 2 \delta x_i(t) d_{ij}[\underline{x}(t), t] \delta x'_j(t), \quad (1.20)$$

où  $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$  et  $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$  sont des petits vecteurs décrivant la séparation entre les trois trajectoires  $\underline{x}(t)$ ,  $\underline{x}'(t)$  et  $\underline{x}''(t)$ . Par conséquent, le tenseur des taux de déformation décrit le taux de variation des distances et des angles des petits vecteurs transportés par le mouvement.

En considérant les trois petits vecteurs  $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ ,  $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$  et  $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}''(t)$  transportés par le mouvement (figure 1.8), on peut calculer le taux de variation des volumes. Ils forment un parallélépipède dont le volume est  $\delta \mathcal{V}(t) = (\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t))$ .

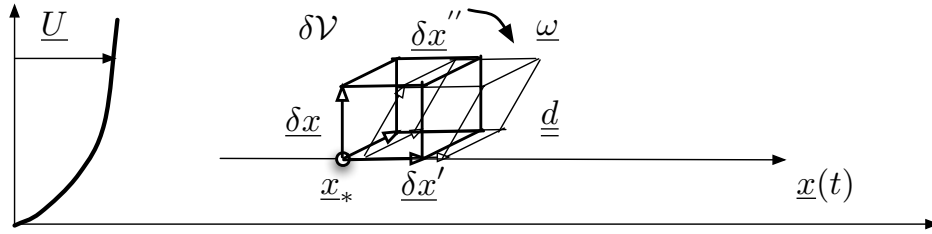


FIG. 1.8 – Déformation d’un petit cube entre deux temps proches.

Si  $\underline{\delta x}(t_*) = \delta x \underline{e}_x$ ,  $\underline{\delta x}'(t_*) = \delta x \underline{e}_y$  et  $\underline{\delta x}''(t_*) = \delta x \underline{e}_z$  à  $t = t_*$ , où  $\delta x$  est une petite longueur, le parallélépipède est un cube à  $t = t_*$ , dont le volume est  $\delta \mathcal{V}(t_*) = (\delta x)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta x)^3$ . Comme  $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}(t_*) = \underline{K}[\underline{x}(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}(t_*)$ ,  $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}'(t_*) = \underline{K}[\underline{x}(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}'(t_*)$  et  $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}''(t_*) = \underline{K}[\underline{x}(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}''(t_*)$  avec une erreur de seulement  $\mathcal{O}[(\delta x)^2]$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t_*) &= \left( \underline{K} \cdot \underline{\delta x}, \underline{\delta x}', \underline{\delta x}'' \right) + \left( \underline{\delta x}, \underline{K} \cdot \underline{\delta x}', \underline{\delta x}'' \right) + \left( \underline{\delta x}, \underline{\delta x}', \underline{K} \cdot \underline{\delta x}'' \right) \\ &= (\delta x)^3 \left[ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} K_{11} & 0 & 0 \\ K_{21} & 1 & 0 \\ K_{31} & 0 & 1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 1 & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & K_{32} & 1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & K_{13} \\ 0 & 1 & K_{23} \\ 0 & 0 & K_{33} \end{array} \right| \end{array} \right] \\ &= (\delta x)^3 (K_{11} + K_{22} + K_{33}) = \delta \mathcal{V}(t_*) \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t_*), t_*]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La relation  $\frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \delta \mathcal{V}(t) \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ , démontrée dans le cas d’un pe-

tit cube, peut être aisément généralisée au cas de petits volumes de formes quelconques en les découpant en cubes encore plus petits.

On voit donc que la divergence  $\text{div } \underline{U}$  du champ de vitesse est égale au taux de déformation relatif des volumes. En particulier, si le volume de tout domaine de particules est conservé dans l'écoulement, on a  $\text{div } \underline{U}(\underline{x}, t) = 0$  pour tous les points  $\underline{x}$  et tout temps  $t$ . On dit alors que l'écoulement est isochore.

## 2 Lois de conservation

La “démonstration des petites tétraèdres” établit que le flux de surface intervenant dans une loi de conservation dépend linéairement du vecteur unitaire normal à la frontière du domaine en mouvement considéré. Pour la loi de conservation de la quantité de mouvement, cette dépendance linéaire des forces surfaciques de contact définit le tenseur des contraintes.

### 2.1 Théorèmes de transport

Une loi de conservation pour un champ  $c(\underline{x}, t)$  est une assertion disant que pour tout domaine  $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$  de particules de trajectoires  $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ , avec  $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$ , donc transportées par le champ de vitesse  $\underline{U}$ , on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (1.22)$$

où  $\partial\mathcal{D}(t)$  est la frontière de  $\mathcal{D}(t)$ ,  $\underline{n}$  sa normale en  $(\underline{x}, t)$  pointant vers l'extérieur,  $q_c(\underline{x}, \underline{n})$  un champ représentant le “flux de surface sortant” de  $c$  et  $f_c(\underline{x}, t)$  un champ représentant la “production interne” de  $c$  (figure 1.9).

Pour calculer le premier terme de cette loi de conservation générique, on peut utiliser le changement de variable  $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$  et écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x &= \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \left( \frac{\partial c^{(L)}}{\partial t} J + c^{(L)} \frac{\partial J}{\partial t} \right) (\underline{a}, t) d^3a. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Pour calculer  $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)$ , on peut combiner les relations  $\delta\mathcal{V}(t)/\delta\mathcal{V}(0) = J(\underline{a}, t)$  et  $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(t)/\mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t]$  pour obtenir  $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)/J(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$ .

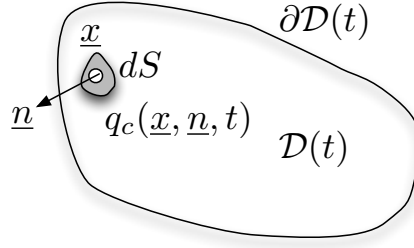


FIG. 1.9 – Flux de surface sortant  $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ , normale sortante  $\underline{n}$  et frontière  $\partial\mathcal{D}$  du domaine  $\mathcal{D}$ .

En notant que  $\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$  est la représentation lagrangienne de la dérivée particulaire  $\frac{dc}{dt}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[ \left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)} + c^{(L)} (\operatorname{div} \underline{U})^{(L)} \right] J(\underline{a}, t) d^3a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left( \frac{dc}{dt} + c \operatorname{div} \underline{U} \right) (\underline{x}, t) d^3x . \end{aligned} \quad (1.24)$$

En utilisant les relations  $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} c$  et  $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} c + c \operatorname{div} \underline{U} = \operatorname{div}(c \underline{U})$  ainsi que le théorème de la divergence, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS , \quad (1.25)$$

où  $c \underline{U}$  est appelé le “flux cinématique” de la grandeur  $c$ .

## 2.2 Flux et bilan local

Nous montrons maintenant que le “flux de surface sortant”  $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$  qui apparaît dans la loi de conservation doit obéir à une propriété très forte : une dépendance linéaire vis-à-vis du vecteur unitaire  $\underline{n}$ .

En effet, puisque la loi de conservation est valable pour tous les domaines  $\mathcal{D}(t)$ , on peut écrire que  $\frac{1}{\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]} \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS$  est borné lorsque le volume  $\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]$  est pris arbitrairement petit.

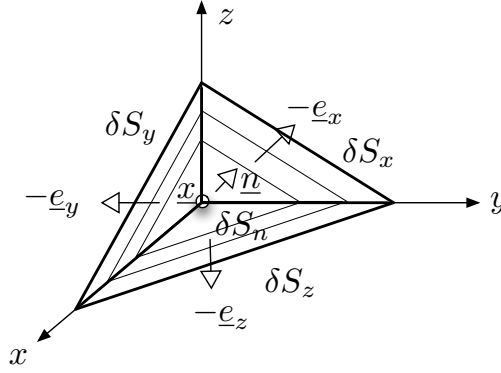


FIG. 1.10 – Tétraèdres utilisés pour démontrer la linéarité du flux avec :  $\underline{n} = (\delta S_x \underline{e}_x + \delta S_y \underline{e}_y + \delta S_z \underline{e}_z) / \delta S_n$

En appliquant cette propriété à une famille de tétraèdres de plus en plus petits (figure 1.10), on peut montrer ([?], [?], [?]) que la dépendance de  $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$  avec  $\underline{n}$  est linéaire et en déduire qu’il existe un “vecteur flux”  $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$  tel que

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \quad (1.26)$$

En appliquant le théorème de la divergence, la loi de conservation s’écrit alors

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x . \quad (1.27)$$

En utilisant les résultats obtenus précédemment pour le premier membre de cette relation, la loi de conservation s’écrit aussi

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x , \quad (1.28)$$

où le flux cinématique  $c \underline{U}$  et le flux  $\underline{Q}_c$  de la loi de conservation s’ajoutent. Comme la loi de conservation est vraie pour tous les domaines  $\mathcal{D}$ , en particulier pour les arbitrairement petits, on peut écrire le bilan local

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) = \frac{dc}{dt} + c \text{div} \underline{U} + \text{div} \underline{Q}_c = f_c . \quad (1.29)$$

La conservation de la masse est un exemple de loi avec  $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t)$ ,  $\underline{Q}_c = \underline{0}$  et  $f_c = 0$ . Le bilan local s’écrit alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \underline{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \underline{U} = 0 . \quad (1.30)$$

On voit que les écoulements isochores ( $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ ) sont associés à des fluides considérés comme incompressibles ( $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ) et réciproquement. Dans ce cas, si  $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$  est homogène à  $t = 0$ , on a  $\rho = \rho_0$  pour tous temps.

### 2.3 Quantité de mouvement

La première partie de la loi de conservation de la quantité de mouvement énonce que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d^3x, \quad (1.31)$$

où  $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$  est la densité surfacique des forces de contact exercées sur la frontière  $\partial\mathcal{D}$  par l'extérieur du domaine  $\mathcal{D}$  (figure 1.11), et  $\rho \underline{F}(\underline{x}, t)$  la densité des forces de volume. Les forces de contact  $\underline{T}$  représentent les interactions sur des distances plus petites que l'échelle de la description continue des champs. Les forces de volume  $\rho \underline{F}$  représentent les interactions à l'échelle macroscopique du continu. La plupart du temps, les forces de volumes sont les forces de gravité  $\underline{F} = \underline{g}$  où  $\underline{g}$  est le vecteur gravité.

Comme pour les lois de conservation scalaires, la démonstration des tétraèdres entraîne que  $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$  dépend linéairement de  $\underline{n}$ . Par conséquent, il existe un tenseur d'ordre deux  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ , appelé le "tenseur des contraintes", qui permet d'écrire

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}. \quad (1.32)$$

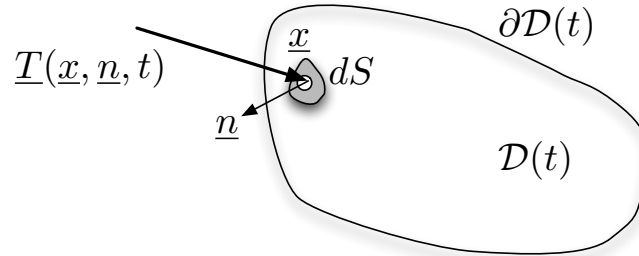


FIG. 1.11 – Forces de surface appliquées à la frontière  $\mathcal{D}(t)$  par son extérieur.

En supposant que la conservation de la masse est satisfaite, on peut montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \underline{\underline{F}} d^3x . \quad (1.33)$$

En appliquant le théorème de la divergence et la conservation de la masse, le bilan local pour la quantité de mouvement est alors

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \text{grad } \mathbf{U} \right) = \rho \underline{\underline{F}} + \text{div } \underline{\underline{\sigma}} , \quad (1.34)$$

où la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$  est  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$  dans laquelle la convention de sommation de sommation d'Einstein est utilisée (sommation sur l'indice  $j$  répété).

La seconde partie de la loi de conservation de la quantité de mouvement énonce que le moment angulaire  $\rho \underline{\underline{x}} \wedge \mathbf{U}$  est associé au flux sortant  $-\underline{\underline{x}} \wedge \underline{\underline{T}}$  et aux termes de production  $\rho \underline{\underline{x}} \wedge \underline{\underline{F}}$ . Combinées avec la première partie de la loi, des manipulations algébriques montrent que cet axiome se réduit au fait que  $\underline{\underline{\sigma}}$  est symétrique.

### 3 Fluides newtoniens

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues en introduisant la loi rhéologique des fluides newtoniens dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en considérant l'équation de conservation de la masse que nous supposons ici être celle des écoulements incompressibles. Nous détaillons ensuite deux exemples d'applications que sont les écoulements de Poiseuille circulaire et plan.

#### 3.1 Équations de Navier-Stokes

La loi rhéologique d'un fluide Newtonien s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} - \frac{2\mu}{3} \text{div } \mathbf{U} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} , \quad (1.35)$$

où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité,  $p(\underline{\underline{x}}, t)$  la pression,  $\underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{x}}, t) = -\frac{2\mu}{3} \text{div } \mathbf{U} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$  le tenseur des contraintes visqueuses et  $\mu$  la viscosité dynamique. La forme

du tenseur des contraintes visqueuses est obtenue en imposant sa dépendance linéaire et isotrope avec  $\underline{d}$  et en supposant qu'il n'y a pas de dissipation dans une compression isotrope (hypothèse de Stokes).

L'approximation de "fluide incompressible" est obtenue en imposant la contrainte  $\text{div } \underline{U} = 0$  en plus de la loi de conservation de la masse. Si la densité volumique est uniforme à un instant donné, la conservation de la masse  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  entraîne que  $\rho = \rho_0$  reste uniforme et constante pour tout temps, ce que nous supposons par la suite.

Pour les fluides incompressibles, la loi rhéologique newtonienne conduit à

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{d} \quad \Longrightarrow \quad \text{div } \underline{\sigma} = -\text{grad } p + \mu \Delta \underline{U}, \quad (1.36)$$

où la  $i^{\text{ème}}$  composante du Laplacien  $\Delta \underline{U}$  est, en coordonnées cartésiennes,  $\Delta U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$  (on utilise la convention de sommation d'Einstein qui consiste à sommer les indices répétés). Cette relation est obtenue en exprimant la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\text{div } \underline{d}$  sous la forme  $\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j}$  et en utilisant la contrainte d'incompressibilité  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$ .

Tous les résultats ci-dessus conduisent aux équations Navier-Stokes incompressibles

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \underline{F} + \nu \Delta \underline{U}, \quad (1.37)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est appelée la "viscosité cinématique".

Pour résoudre des problèmes pratiques, on doit considérer des conditions aux limites. En raison de la "nature parabolique" de ces équations de Navier-Stokes, trois conditions aux limites doivent être spécifiées sur toute la frontière du domaine.

Sur des frontières rigides et immobiles, ces conditions aux limites s'écrivent  $\underline{U} = \underline{0}$ . Sur des frontières libres et immobiles, ces conditions aux limites peuvent s'écrire  $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$  et  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{n} = \underline{0}$ , ce qui signifie que la vitesse normale et les contraintes tangentielles sont nulles.

Sur une frontière libre et mobile en contact avec un gaz à pression constante, par exemple l'atmosphère, on décrit la surface libre et mobile avec l'équation inconnue  $F(\underline{x}, t) = 0$ . Les conditions aux limites sur cette interface s'écrivent  $\frac{dF}{dt}(\underline{x}, t) = 0$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n}$ , où il y a quatre conditions au lieu de trois pour équilibrer le nouveau champ inconnu  $F(\underline{x}, t)$ .



Avant d'aborder des exemples d'applications, nous mentionnons l'importante relation de Bernoulli qui découle des équations de Navier-Stokes. Sa plus simple formulation consiste à dire que pour un écoulement stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  et donc  $\frac{d}{dt} = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$ ) et non visqueux ( $\nu = 0$ ), en présence de force de gravité  $\underline{F} = -\underline{\text{grad}}(gz)$ , on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) = 0. \quad (1.38)$$

On appelle alors "charge hydraulique" la quantité  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$  qui est ainsi invariante le long des trajectoires. Lorsque le fluide est visqueux ( $\nu > 0$ ), cette quantité diminue en suivant une trajectoire et l'on parle alors de "pertes de charge". On note alors  $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \underline{\text{div}} \underline{\tau} = \frac{1}{g} (-\nu \Delta \underline{U})$  le vecteur "perte de charge linéique".

### 3.2 Poiseuille circulaire en charge

Comme premier exemple d'application des équations de Navier-Stokes, on considère l'écoulement stationnaire visqueux dans un tube horizontal de section circulaire (figure 1.12). On note  $D$  le diamètre de cette section et on suppose que l'écoulement est forcé par un gradient de pression constant  $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$ . Les forces de volumes  $\underline{F} = -g \underline{e}_z$  sont dues à la gravité.

On cherche une solution stationnaire symétrique de la forme  $\underline{U} = u(r) \underline{e}_x$  où  $r$  est la distance à l'axe. Les équations de Navier-Stokes incompressibles conduisent à

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (1.39)$$

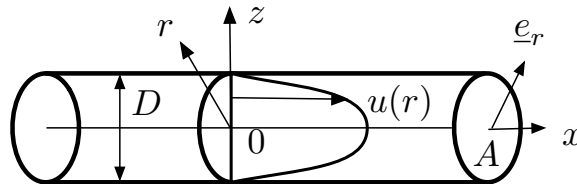


FIG. 1.12 – Écoulement de Poiseuille circulaire en charge.

On en déduit  $p(\underline{x}) = p_r - Gx - \rho g z$ , où  $p_r$  est une constante arbitraire. Le profil  $u(r)$  doit vérifier

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{G}{\rho \nu}, \quad (1.40)$$

avec les conditions aux limites rigides  $u(D/2) = 0$ . On en déduit donc que

$$u(r) = \frac{G}{\rho \nu} \left( \frac{D^2}{16} - \frac{r^2}{4} \right). \quad (1.41)$$

Le débit  $Q$  est donc

$$Q = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} u(r) r d\theta dr = \frac{\pi D^4}{128 \rho \nu} G. \quad (1.42)$$

En notant  $A = \pi D^2/4$  l'aire de la section du tuyau, on peut définir la vitesse moyenne  $U$  dans la direction  $x$  par

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{D^2 G}{32 \rho \nu}. \quad (1.43)$$

La “charge hydraulique” est alors

$$H(x, r) = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} = \frac{p_r - Gx}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}. \quad (1.44)$$

La perte de charge linéique  $J$ , due aux frottements visqueux sur les murs, est définie par  $J = \frac{1}{A} \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} (-\nu \Delta u) r d\theta dr$  ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J \quad \implies \quad \frac{G}{\rho g} = J. \quad (1.45)$$

Cette relation traduit l'équilibre entre le forçage de pression et le frottement.

On note  $P = \pi D$  le “périmètre mouillé”,  $R_H = A/P$  le “rayon hydraulique” et  $D_H = 4 R_H$  le “diamètre hydraulique”. Ici, nous avons  $D_H = D$  et  $R_H = D/2$ . Le coefficient de frottement  $\lambda$  est une grandeur sans dimension définie par l'équation de Darcy-Weissbach

$$J = \lambda \frac{U^2}{2g D_H}. \quad (1.46)$$

En utilisant l'expression (1.43) on a ici

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad , \quad (1.47)$$

où  $Re$  est le “nombre de Reynolds”. Une autre présentation de la perte de charge linéique est obtenue en écrivant la “loi de Darcy” :

$$U = -K_p \frac{\partial H}{\partial x} \quad , \quad K_p = \frac{g D^2}{32 \nu} \quad , \quad (1.48)$$

où  $K_p$  a la dimension d'une vitesse.

Nous notons  $\tau(r) = -\underline{e}_x \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$  la contrainte tangentielle de cisaillement définie à partir du tenseur des contraintes

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2 \rho \nu \underline{d} \quad , \quad \underline{d} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_r) \quad , \quad (1.49)$$

où  $\underline{d}$  est le tenseur des taux de déformation et  $\underline{e}_r$  le vecteur unitaire radial (le produit tensoriel  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  de deux vecteurs est le tenseur d'ordre deux de composantes  $a_i b_j$ ). En notant  $\tau_*$  la valeur absolue de la contrainte de cisaillement appliquée par le fluide sur le tuyau, on peut écrire

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad . \quad (1.50)$$

Pour un tuyau horizontal de 100 m de long connectant un réservoir d'eau (masse volumique  $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ , viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) sous 3 bar de pression ( $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , soit environ 30 m de hauteur d'eau) à l'atmosphère (1 bar), la vitesse moyenne  $U$ , calculée à l'aide de (1.43), est environ 25 cm/s pour un diamètre de 2 mm et de 25 m/s (environ 100 km/h) pour un diamètre de 2 cm.

Si la première estimation de la vitesse, correspondant à un nombre de Reynolds d'environ 500, semble réaliste, la seconde, qui correspond à un nombre de Reynolds d'environ  $5 \cdot 10^5$  n'est pas correcte. Ceci est dû au fait que la solution “laminaire” que nous avons calculée n'est plus pertinente lorsque le nombre de Reynolds est plus grand qu'une valeur critique au-delà de laquelle l'écoulement devient “turbulent”.

### 3.3 Poiseuille plan à surface libre

Nous considérons maintenant l'écoulement stationnaire, visqueux, à surface libre d'une couche d'eau de profondeur  $h$  sur un plan incliné (figure 1.13). Il

n'y a pas de gradient de pression imposé, mais l'écoulement est ici forcé par les forces volumiques de gravité  $\underline{F} = -g \underline{e}_z$ , où  $z$  est la coordonnée verticale.

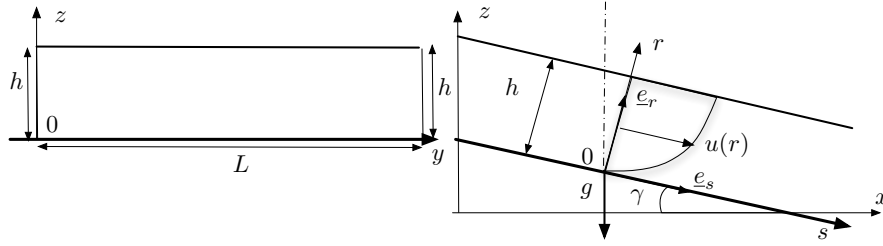


FIG. 1.13 – Écoulement de Poiseuille à surface libre sur un plan incliné.

On note  $\gamma$  l'angle du plan incliné avec le plan horizontal et  $p_a$  la pression atmosphérique, que nous supposons constante, en contact avec la surface libre.

On note  $s$  la coordonnée dans la direction de la pente et  $\underline{e}_s$  le vecteur unitaire qui lui est parallèle. On note  $z = Z_f(s)$  l'équation du fond et  $I = -Z'_f(s) = \sin \gamma$  sa "pente" (par abus de langage).

On suppose que la section du canal est rectangulaire et on note  $L$  sa largeur. On définit le "périmètre mouillé" comme étant la longueur de fluide en contact avec la paroi pour une section donnée, qui vaut ici  $P = L + 2h$ . L'aire de la section est  $A = Lh$ . Le "rayon hydraulique"  $R_H$  est défini par la relation  $R_H = A/P = Lh/(L + 2h)$ . On suppose que  $h \ll L$  ce qui implique  $R_H \sim h$ .

Nous cherchons maintenant une solution stationnaire sous la forme  $\underline{U} = u(r) \underline{e}_s$  où  $\underline{e}_s$  est dans la direction de la pente et  $r$  est la coordonnée normale au fond. Par symétrie, on peut supposer que  $\frac{\partial p}{\partial s}(r, s) = 0$ . En projetant les équations de Navier-Stokes incompressibles sur les axes  $\underline{e}_s$  et  $\underline{e}_z$  (ils ne sont pas orthogonaux), on obtient

$$0 = gI + \nu \frac{d^2 u}{dr^2}(r) \quad , \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}(x, z) - g \quad , \quad (1.51)$$

la vitesse  $u(r)$  étant indépendante de  $s$  pour un  $r$  fixé. La condition aux limites rigide au fond est  $u(0) = 0$ . Le tenseur des taux de déformation  $\underline{d} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$  est utilisé pour exprimer le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho\nu \underline{d}$ .

La continuité de la contrainte à travers la surface libre est  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -p_a \underline{e}_r$  où  $p_a$  est la pression atmosphérique. Ceci conduit à  $p(x, z) = p_a$  pour  $r = h$

et  $\frac{du}{dr}(h) = 0$ . À partir de ce résultat et du changement de variable  $[x, z] = [s \cos \gamma + r \sin \gamma, Z_f(s) + r \cos \gamma]$  avec  $Z_f(s) = -s \sin \gamma$ , on déduit que

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_a}{\rho g} + h \cos \gamma + Z_f(s) \quad , \quad u = \frac{gI}{\nu} \left( hr - r^2/2 \right) . \quad (1.52)$$

Le débit  $Q$  et la vitesse moyennée sur la verticale  $U$  sont alors

$$Q = \frac{gI h^3 L}{3\nu} \quad , \quad U = \frac{Q}{A} = \frac{gI h^2}{3\nu} . \quad (1.53)$$

La “charge hydraulique”, définie par  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$ , est alors

$$H(s, r) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h \cos \gamma + \frac{u^2(r)}{2g} . \quad (1.54)$$

La perte de charge linéique  $J$  due aux frottements visqueux sur le fond est définie par  $J = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{g} \left( -\nu \frac{d^2 u}{dr^2} \right) dr$  ce qui permet d’écrire

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J \quad \implies \quad I = J . \quad (1.55)$$

Cette relation traduit l’équilibre en le forçage dû à la gravité et le frottement.

La perte de charge linéique obéit à la relation de Darcy-Weissbach

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} , \quad (1.56)$$

où  $\lambda$  est le coefficient de frottement et  $D_H$  le diamètre hydraulique est défini par  $D_H = 4R_H = 4h$ . En utilisant l’expression (1.53), on a ici

$$\lambda = \frac{96}{Re} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} , \quad (1.57)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds.

Le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\rho\nu\underline{d}$ , où  $\underline{d} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$  est le tenseur des taux de déformation, permet la définition de la contrainte tangentielle  $\tau(r) = \underline{e}_s \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$ . En notant  $\tau_*$  la valeur absolue de la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur le fond, on peut écrire

$$\tau_* = \rho g R_H J . \quad (1.58)$$

Pour une pente  $I$  de 3%, une masse volumique  $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$  et une viscosité moléculaire  $\nu$  de l'ordre de  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , on trouve que  $U$  est de l'ordre de 10 cm/s pour une hauteur de l'ordre 1 mm et que  $U$  est de l'ordre de  $10^5 \text{ m/s}$  pour une hauteur  $h$  de 1m. Le premier résultat, qui correspond à un nombre de Reynolds  $Re \sim 400$  semble réaliste, alors que le second, correspondant à un nombre de Reynolds de  $Re \sim 4 \cdot 10^{11}$  n'est pas correct. Ceci est dû au fait que la solution "laminaire" que nous avons calculée n'est plus pertinente pour décrire l'écoulement quand il devient turbulent au-delà d'un nombre de Reynolds critique.

Une modélisation de la turbulence est donc nécessaire pour décrire les écoulements à grand Reynolds.

## FORMULAIRE

### Cinématique

Différentielle de la déformation  $\underline{X}(\underline{a}, t)$  :

$$\delta \underline{x}(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \delta \underline{a} + \underline{O}(\|\delta \underline{a}\|^2) \quad , \quad F_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t) .$$

Transport de volumes :

$$\delta \mathcal{V}(t) = \delta \mathcal{V}(0) J(\underline{a}, t) \quad , \quad J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t) > 0 .$$

Représentation eulérienne et lagrangienne :

$$B(\underline{x}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, t) \quad , \quad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t) \quad \iff \quad \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t) .$$

Loi de conservation de la masse :

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 .$$

Dérivée particulaire :

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \text{grad } B(\underline{x}, t) .$$

Gradient du champ de vitesse  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) \quad , \quad K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} .$$

Tenseur des taux de déformations :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 \underline{\delta x}(t) \cdot \underline{d}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) \quad , \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) .$$

Transport des volumes par une trajectoire  $\underline{x}(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \delta \mathcal{V}(t) \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t] .$$

## Lois de conservation

Loi de conservation pour la grandeur  $c$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x .$$

Loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0 .$$

Tenseur des contraintes :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} .$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \text{grad } \mathbf{U} \right) = \rho \underline{\mathbf{F}} + \text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} .$$

### Fluides newtoniens

Fluides newtoniens incompressibles :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = -p \underline{\mathbf{I}} + 2 \mu \underline{\mathbf{d}} .$$

Équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\text{div } \mathbf{U} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \underline{\mathbf{F}} + \nu \Delta \mathbf{U} .$$

Charge hydraulique :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} .$$

### Poiseuille circulaire en charge

Charge hydraulique :

$$H(x, r) = \frac{p_r - G x}{\rho g} + \frac{u^2(r)}{2g} .$$

Équilibre forçage-frottement :

$$\frac{dH}{dx} = -J \quad \implies \quad \frac{G}{\rho g} = J .$$



Équation de Darcy-Weissbach :

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{64}{Re} .$$

Loi de Darcy :

$$U = -K_p \frac{dH}{dx} \quad \Longrightarrow \quad K_p = \frac{gD^2}{32\nu} .$$

### Poiseuille plan à surface libre

Charge hydraulique :

$$H(s, r) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h \cos \gamma + \frac{u^2(r)}{2g} .$$

Équilibre forçage-frottement :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J \quad \Longrightarrow \quad I = J .$$

Équation de Darcy-Weissbach :

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{96}{Re} .$$

Contrainte de cisaillement au fond :

$$D_H = 4 R_H = 4 h \quad \Longrightarrow \quad \tau_* = \rho g R_H J .$$

## EXERCICES

**EXERCICE 1.1** Charge hydraulique

- 1) On considère un champ de vitesse  $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$  et son gradient  $\underline{K} = \text{grad } \underline{U}$  de composantes  $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ . Montrer, en explicitant leurs composantes, que  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \underline{K} \cdot \underline{U}$ ,  $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U}$  et  $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U}$ . En déduire que  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ .

Les composantes  $i = 1, 2, 3$  sont  $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  pour  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$ ,  $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$  pour  $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$  et  $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$  pour  $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2$ . On a donc  $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U} + (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ .

- 2) On considère l'écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  constante en présence d'un champ de gravité  $\underline{F} = -g \underline{e}_z$ . Montrer que les équations de Navier-Stokes entraînent la relation  $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$  où  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$  est la "charge hydraulique" et  $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \text{div } \underline{\tau}$  est le "vecteur perte de charge linéique",  $\underline{\tau}$  étant le tenseur des contraintes visqueuses.

Comme  $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = 0$ , que  $\underline{e}_z = \text{grad } (z)$  et que  $\text{div } \underline{\sigma} = -\text{grad } p + \text{div } \underline{\tau}$ , l'équation de conservation de la quantité de mouvement  $\rho \frac{d}{dt} \underline{U} = \rho \underline{F} + \text{div } \underline{\sigma}$  s'écrit  $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \text{grad } (z) + \frac{1}{\rho} \text{div } \underline{\tau}$ . Comme  $(\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot \underline{U} = 0$ , on en déduit  $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$ .

**EXERCICE 1.2** Poiseuille plan en charge

On considère un fluide newtonien compris entre deux plaques rigides situées en  $z = 0$  et  $z = 2h$ . On suppose que l'écoulement est tel qu'il peut être considéré comme incompressible et on note  $\rho$  la masse volumique. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que la vitesse est de la forme  $\underline{U} = u(z) \underline{e}_x$  et qu'il est forcé par un gradient de pression horizontal constant  $G = -\frac{\partial p}{\partial x}$ , en présence du champ de gravité  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ .

- 1) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses formulées. On suppose que  $p(0, 0) = p_r$ . En déduire l'expression du champ de pression  $p$ . Montrer que l'on a  $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$  où  $J$  est la "perte de charge linéique due aux frottements" définie par  $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$ . Montrer que  $J$  est

constant et donner son expression en fonction de l'intensité  $G$  du forçage.

L'équation de conservation de la masse  $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$  est trivialement vérifiée. L'équation de quantité de mouvement conduit à  $0 = G/\rho + \nu u''(z)$ ,  $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$  et  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ . On en déduit  $p(x, z) = p_r - Gx - \rho g z$ . Comme  $\underline{U} = u \underline{e}_x$  et  $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$ , on a  $\frac{\partial H}{\partial x} = \text{grad } H \cdot \underline{e}_x = -\underline{J} \cdot \underline{e}_x = -J$ . On en déduit  $J = G/(\rho g)$ .

- 2) Calculer et tracer le profil de vitesse  $u(z)$ . Exprimer  $\underline{d}$  et  $\underline{\sigma}$ . Calculer et tracer le profil  $\tau(z) = \underline{e}_x \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{e}_z$  où  $\underline{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses. On note  $\tau_* = \tau(0)$ . Exprimer, en fonction de  $\tau_*$ , les contraintes tangentielles  $\tau_0$  et  $\tau_{2h}$  exercées par le fluide sur les parois.

Le profil  $u(z) = \frac{G}{2\rho\nu}(2h-z)z$  est une parabole. On a  $\underline{d} = \frac{1}{2}u'(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$  et  $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho\nu \underline{d} = -p \underline{I} + \tau(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$  avec  $\tau(z) = \rho\nu u'(z) = G(h-z)$ . On a  $\tau_* = Gh$  et  $\tau(0) = \tau(2h) = \tau_*$ . Le profil de  $\tau(z)$  est une droite.

- 3) On considère le domaine  $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq 2h\}$  où  $l$  et  $L$  sont des constantes. Calculer la résultante des forces de contact exercées par l'extérieur de  $\mathcal{D}$  sur les faces de normales  $\underline{e}_x$  et  $-\underline{e}_x$ . Calculer la résultante des forces de contact exercées par les parois sur le fluide. Calculer la résultante de toutes les forces de contact exercées par l'extérieur du parallélépipède sur sa frontière  $\partial\mathcal{D}$ . Commenter en remarquant que les équations de Navier-Stokes s'écrivent ici  $\underline{0} = -\rho g \underline{e}_z + \text{div } \underline{\sigma}$ . Calculer et interpréter la grandeur  $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$ . On définit le rayon hydraulique  $R_H$  comme étant le rapport entre l'aire  $2hL$  de la face de  $\mathcal{D}$  transverse à

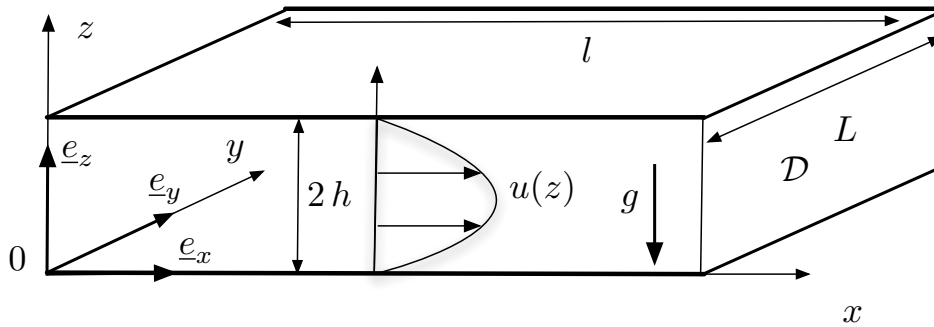


FIG. 1.14 – Écoulement de Poiseuille plan en charge.

l'écoulement et le périmètre de cette section en contact avec les parois. Montrer que  $\tau_* = \rho g R_H J$ .

Les forces de contact sur les faces de normales  $\underline{e}_x$  et  $-\underline{e}_x$  sont respectivement  $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z) \underline{e}_x + \tau(z) \underline{e}_z$  et  $\underline{T}(0, y, z, \underline{e}_x) = p(0, z) \underline{e}_x - \tau(z) \underline{e}_z$ . Leur résultante est  $[p(0, z) - p(l, z)] (2hL) \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_x$ . Les forces de contact sur les faces de normales  $\underline{e}_z$  et  $-\underline{e}_z$  sont respectivement  $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h) \underline{e}_z + \tau(2h) \underline{e}_x$  et  $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0) \underline{e}_z - \tau(0) \underline{e}_x$ . Leur résultante est le vecteur  $[p(x, 0) - p(x, 2h)] lL \underline{e}_z - [\tau(0) - \tau(2h)] lL \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_z - 2hlLG \underline{e}_x$ . Comme  $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z) \underline{e}_y$  et  $\underline{T}(x, L, z, -\underline{e}_y) = p(x, z) \underline{e}_y$ , la résultante de toutes les forces de contact exercées sur  $\partial\mathcal{D}$  est  $\rho g (2hlL) \underline{e}_z$ . C'est l'opposé du poids du fluide contenu dans  $\mathcal{D}$ , supporté par la paroi. En intégrant  $\underline{0} = \rho g \underline{e}_z + \text{div } \underline{\sigma}$  sur  $\mathcal{D}$ , on retrouve bien l'équilibre  $\underline{0} = \int_{\mathcal{D}} \rho g \underline{e}_z d^3x + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS$  entre le poids et les forces de contact sur  $\partial\mathcal{D}$ . La grandeur  $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = -2 \tau_* lL \underline{e}_x = -2(Gh)lL \underline{e}_x$  est égale à  $\int_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{\tau} d^3x = -(\rho g J) (2hlL) \underline{e}_x$  en appliquant le théorème de la divergence. C'est la résultante des forces tangentielles exercées par le paroi sur  $\mathcal{D}$ . Elle s'oppose au gradient de pression. On a  $R_H = 2hL/(2L) = h$  et  $\tau_* = \rho g R_H J$ .

- 4) Calculer la vitesse moyenne  $U = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u(z) dz$ . On note  $D_H = 4h$ . Montrer que l'on peut écrire la "loi de Darcy"  $U = -K_p \frac{dH}{dx}$  où  $K_p$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $D_H$ ,  $\nu$  et  $g$ . On définit le coefficient de frottement  $\lambda$  par la relation  $J = \lambda \frac{U^2}{2g D_H}$ . Exprimer  $\lambda$  en fonction du "nombre de Reynolds"  $Re = U D_H / \nu$ . Calculer  $U$  et  $Re$  pour une perte de charge de 2 Bars sur 100 m d'un écoulement d'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) dans les cas  $h = .5 \text{ mm}$  puis  $h = 5 \text{ mm}$ . Commenter.

On a  $U = Gh^2/(3\rho\nu)$ . On a  $K_p = D_H^2 g/(48\nu)$ . On a  $\lambda = 96/Re$ . On a  $U = 16 \text{ cm/s}$  et  $Re \sim 300$  pour  $h = .5 \text{ mm}$ ,  $U = 16 \text{ m/s}$  et  $Re \sim 3 \cdot 10^5$  pour  $h = 5 \text{ mm}$ . La solution laminaire est réaliste dans le premier cas. Dans le second cas, elle ne l'est pas car l'écoulement devient turbulent.

## NOTATIONS

$A$	Aire de la section ( $\text{m}^2$ )
$\underline{A}(\underline{x}, t)$	Déformation inverse (m)
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'ordre 2 quelconque ou matrice 3x3
$A_{ij}$	Composantes d'un tenseur quelconque $\underline{\underline{A}}$
${}^t \underline{\underline{A}}$	Transposée de la matrice $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{B}$	Produit (contracté) matrice vecteur
$\underline{a}$	Vecteur position dans la configuration de référence (m)
$\underline{B}$	Vecteur quelconque ou matrice colonne
$\underline{\underline{B}}(\underline{x}, t)$	Champ de tenseurs

${}^t\mathbf{B}$	Transposée de la matrice colonne $\mathbf{B}$
$\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}'$	Produit tensoriel de deux vecteurs
$\mathbf{B} \wedge \mathbf{B}'$	Produit vectoriel de deux vecteurs
$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}'$	Produit scalaire de deux vecteurs
$(\mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathbf{B}'')$	Produit mixte de trois vecteurs
$\iint_{\partial\mathcal{D}} q_c dS$	Intégrale double sur la frontière $\partial\mathcal{D}$
$\iiint_{\mathcal{D}} f_c d^3x$	Intégrale triple sur le sous-domaine $\mathcal{D}$
$\mathbf{B}(\underline{x}, t)$	Champ de vecteurs quelconque
$B_i$	Composantes d'un vecteur quelconque $\mathbf{B}$
$B(\underline{x}, t)$	Représentation eulérienne du champ $B$
$B^{(L)}(\underline{a}, t)$	Représentation lagrangienne du champ $B$
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur des dilatations ()
$\mathcal{D}$	Sous-domaine de la configuration déformée
$\mathcal{D}_0$	Sous-domaine de la configuration de référence
$\mathcal{D}(t)$	Sous-domaine transporté par le mouvement
$D$	Diamètre de la section (m)
$D_H$	Diamètre hydraulique (m)
$\underline{d}$	Tenseur des taux de déformation ( $s^{-1}$ )
$\underline{\text{div}}$	Opérateur divergence d'un champ de tenseurs ( $m^{-1}$ )
$\text{div}$	Opérateur divergence d'un champ de vecteurs ( $m^{-1}$ )
$dS$	Élément d'intégration surfacique ( $m^2$ )
$d^3x$	Élément d'intégration volumique ( $m^3$ )
$\frac{d}{dt}$	Opérateur dérivée particulaire ( $s^{-1}$ )
$\frac{\partial}{\partial t}$	Opérateur dérivée partielle par rapport au temps ( $s^{-1}$ )
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	Opérateur dérivée partielle par rapport à $x_i$ ( $m^{-1}$ )
$\Delta$	Opérateur Laplacien ( $m^{-2}$ )
$\underline{\delta a}$	Petit vecteur de la configuration de référence (m)
$\underline{\delta x}$	Petit vecteur de la configuration déformée (m)
$\partial\mathcal{D}$	Frontière du domaine $\mathcal{D}$
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée (m)
$\underline{e}_r$	Vecteur unitaire radial (m)
$\underline{e}_s$	Vecteur unitaire le long de la pente (m)
$\underline{\underline{F}}$	Gradient de la déformation ou Jacobienne ()
$\underline{F}$	Forces extérieure de volume par unité de masse (N/kg)
$F(\underline{x}, t)$	Équation de la surface libre $F = 0$
$f_c$	Production volumique du champ $c$
$\underline{\text{grad}}$	Opérateur gradient d'un champ scalaire ( $m^{-1}$ )
$g$	Gravité ( $m s^{-2}$ )

$G$	Gradient de pression constant (Pa m <sup>-1</sup> )
$H$	Charge hydraulique (m)
$h$	Profondeur (m)
$I$	“Pente” $I = -Z'_f(s)$ ( )
$\underline{I}$	Tenseur identité ( )
$J(\underline{a}, t)$	Jacobien de la transformation ( )
$J$	Perte de charge linéique ( )
$\underline{K}$	Gradient du champ de vitesse (s <sup>-1</sup> )
$\underline{K}_p$	Coefficient de la loi de Darcy (m s <sup>-1</sup> )
$L$	Largeur du canal (m)
$m[\mathcal{D}(t)]$	masse des particules de $\mathcal{D}(t)$ (kg)
$\underline{n}$	Vecteur unitaire normal à une frontière ( )
$\underline{Q}(h^2)$	Vecteur d'ordre $h^2$ (unité du contexte)
$O(h^2)$	Scalaire d'ordre $h^2$ (unité du contexte)
$P$	Périmètre mouillé (m)
$p$	Pression (Pa)
$p_a$	Pression atmosphérique (Pa)
$q_c$	Flux de surface sortant du champ $c$ ( $[c]$ m s <sup>-1</sup> )
$Q$	Débit volumique (m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> )
$R_H$	Rayon hydraulique (m)
$Re$	Nombre de Reynolds ( )
$\text{rot}$	Opérateur rotationnel d'un champ de vecteur (m <sup>-1</sup> )
$r$	Coordonnée radiale (m)
$s$	Coordonnée le long de la pente (m)
$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$	Forces de contact surfaciques (N m <sup>-2</sup> )
$t$	Temps (s)
$t_*$	Temps particulier (s)
$\text{tr}$	Opérateur trace d'un tenseur
$\underline{U} = (u, v, w)$	Vecteur vitesse (m s <sup>-1</sup> )
$U_i$	Composantes du vecteur vitesse $\underline{U}$ (m s <sup>-1</sup> )
$\underline{U} \cdot \text{grad}$	Opérateur gradient suivant $\underline{U}$ (s <sup>-1</sup> )
$U$	Vitesse moyenne (m s <sup>-1</sup> )
$\mathcal{V}(\mathcal{D})$	Volume de $\mathcal{D}$ (m <sup>3</sup> )
$\underline{X}(\underline{a}, t)$	Champ de déformation (m)
$\underline{x}$	Vecteur position dans la configuration déformée (m)
$Z_f(s)$	Cote du fond (m)
$Z'_f(s)$	Dérivée de $Z_f(s)$ ( )
$\underline{0}$	Origine des axes (m)

---

$\delta\mathcal{V}(t)$	Petit vecteur transporté par le mouvement ( $\text{m}^3$ )
$\lambda$	Coefficient de frottement ( )
$\mu$	Viscosité dynamique newtonienne ( $\text{Pa s}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )
$\rho(\underline{x}, t)$	Masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\rho^{(L)}(\underline{a}, t)$	Représentation lagrangienne de $\rho$ ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\rho_0$	Masse volumique uniforme ( $\text{kg m}^{-3}$ )
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes ( $\text{Pa}$ )
$\underline{\underline{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses ( $\text{Pa}$ )
$\tau$	Contraintes de cisaillement ( $\text{Pa}$ )
$\Omega$	Configuration déformée
$\Omega_0$	Configuration de référence
$\underline{\underline{\omega}}$	Vecteur rotation ( $\text{s}^{-1}$ )