

Chapitre 1

Écoulements incompressibles

(Incompressible flows)

O. Thual, 26 juin 2010

Sommaire

1	Cinématique	Kinematics	4
1.1	Eulérien ou lagrangien	Eulerian ou Lagrangian	5
1.2	Dérivée particulaire	Particular derivative	8
1.3	Taux de déformation	Deformation rates	9
2	Lois de conservation	Conservation laws	12
2.1	Théorèmes de transport	Transport theorems	12
2.2	Flux et bilan local	Fluxes and local budget	13
2.3	Quantité de mouvement	Momentum	15
3	Fluides newtoniens	Newtonian fluids	16
3.1	Équations de Navier-Stokes	Navier-Stokes equations	17
3.2	Poiseuille circulaire en charge	Circular Poiseuille in a pipe	19
3.3	Poiseuille plan à surface libre	Open plane Poiseuille flow	21

Introduction

Ce chapitre résume les étapes essentielles de la mécanique des milieux continus nécessaires pour établir les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \underline{F} + \nu \Delta \underline{U} . \quad (1.1)$$

Ces équations proviennent des ingrédients suivants :

- les axiomes de la mécanique : conservation de la masse et de la quantité de mouvement,
- la contrainte d'incompressibilité,
- la loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens.

Introduction

This chapter gives a summary of the essential steps of continuum mechanics which are needed to establish the incompressible Navier-Stokes equations

These equations come from the following ingredients

- the axioms of mechanics : mass and momentum conservation,
- the incompressibility constraint,
- the rheologic constitutive law of Newtonian fluids.

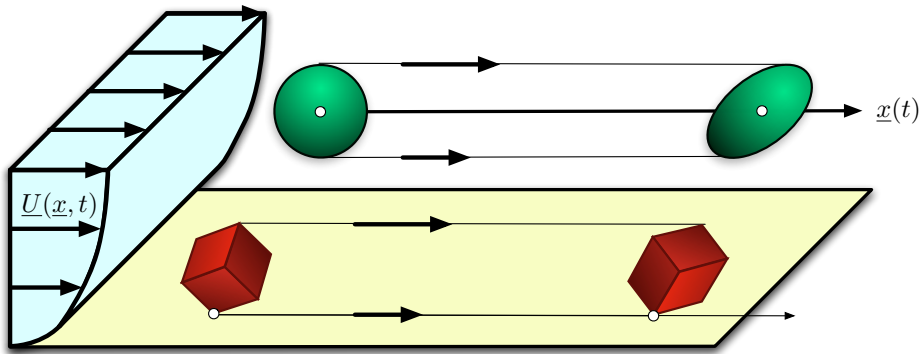


FIG. 1.1 – Mouvements de particules dans un écoulement parallèle cisailé.

Particles motions in a parallel shear flow.

Les axiomes de la mécanique s'énoncent en disant que la masse de tout volume de particules transportées par le mouvement est constante et que la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement est égale à la résultante des forces appliquées. Pour obtenir des équations aux dérivées partielles à partir de ces principes macroscopiques, on doit dériver des intégrales triples sur des domaines qui varient avec le temps en étant transportés par le mouvement. Il est alors nécessaire d'explorer la "représentation lagrangienne" des champs considérés pour transformer les intégrales sur des domaines mobiles en intégrales sur des domaines fixes qui décrivent les positions initiales des particules mobiles.

The axioms of mechanics are expressed by saying that the mass of any volume of particles carried by the motion is constant and that the time derivative of its momentum is equal to the resultant of the applied forces. In order to obtain partial derivative equations out of these macroscopic principles, one has to derive triple integrals on domains which are varying with time while being carried by the flow. It is thus necessary to explore the "Lagrangian representation" of the considered fields in order to transform the moving domains integrals into fixed domains integrals which describe the initial positions of the moving particles.

La *contrainte d'incompressibilité* dit que l'on peut considérer le volume de tout domaine transporté par l'écoulement comme étant constant. C'est une approximation qui est valide lorsque la vitesse de l'écoulement est petite devant la vitesse du son dans le fluide. Pour exprimer cette contrainte, qui dit que la divergence du champ de vitesse est nulle, il est nécessaire d'exprimer le taux de variation des volumes en fonction des dérivées partielles de ce champ.

The *incompressibility constraint* says that one can consider that the volume of any domain carried by the flow is constant. This is an approximation which is valid when the velocity of the flow velocity is small compared to the sound speed of the fluid. To express this constraint, which says that the divergence of the velocity field is zero, one needs to express the variation rate of the volumes as a function of the partial derivatives of this field.

La *loi de comportement rhéologique des fluides newtoniens* est basée sur le fait que les forces de contact dépendent de la pression et des dérivées spatiales de la vitesse constituant le tenseur des "taux de déformations". Il est nécessaire de définir le "tenseur des contraintes" pour décrire ces forces de contact. Sa dépendance linéaire avec la normale à une surface élémentaire vient d'une propriété générale des forces de surface impliquées dans la loi de conservation de la quantité de mouvement. La démonstration est classiquement obtenue à l'aide de la "construction des tétraèdres" qui conduit à l'important concept de vecteur flux de champs scalaires ou de flux tensoriel de champs vectoriels.

The *rheologic constitutive laws of Newtonian fluids* are based on the fact that the contact forces depend on the pressure and on the spatial derivatives of the velocity constituting the "strain tensor" (deformation rates). One then needs to define the "stress tensor" in order to describe these contact forces. Its linear dependency with the normal to an elementary surface comes out from a general property of the surface forces involved in the momentum conservation law. The demonstration is classically obtained through the "tetrahedrons construction" which leads to the important concept of flux vector of scalar fields or of tensorial flux of vectorial fields.

Dans le présent chapitre, nous cherchons à expliciter les concepts ci-dessus de la manière la plus simple possible. Les lecteurs qui connaissent déjà la "mécanique des milieux continus" n'auront qu'à prendre connaissance du jeu de notations avant d'étudier les exemples développés à la fin du chapitre.

In the present chapter, we try to explicit all the above concepts in the simplest manner as possible. Readers who already knows "continuum mechanics" will only have to acknowledge the set of notations before studying the examples developed at the end of the chapter.

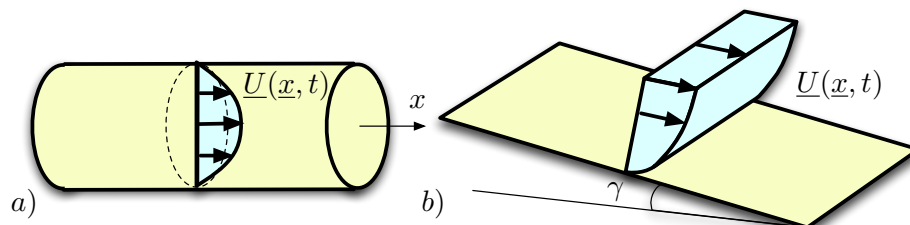


FIG. 1.2 – a) *Écoulement de Poiseuille circulaire en charge.* b) *Écoulement de Poiseuille à surface libre sur un plan incliné.*

a) *Circular Poiseuille flow in a pipe.* b) *Open Poiseuille flow on a tilted plane.*

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre, deux exemples d'écoulements sont présentés. Au-delà de leur intérêt comme exemples d'application des équations de Navier-Stokes, ces écoulements sont utilisés ici pour introduire l'hydraulique en charge dans les conduites et l'hydraulique des écoulements à surface libre dans les canaux. Dans les deux exemples, l'important concept de "charge hydraulique" est introduit. La relation entre la "perte de charge linéique" et la "contrainte de cisaillement" due aux frottements sur les frontières est mise en avant.

Le premier exemple, qui introduit les écoulements en charge, est l'écoulement de Poiseuille circulaire dans un tube (figure 1a), forcé par un gradient de pression. Quand l'écoulement est suffisamment lent, il est laminaire et sa vitesse moyenne est proportionnelle à la perte de charge linéique. Cette importante propriété est à la base de la loi de Darcy valable pour les écoulements en milieu poreux comme, par exemple, les écoulements souterrains.

Le deuxième exemple, qui introduit les écoulements à surface libre, est l'écoulement de Poiseuille plan sur un canal incliné (figure 1b). On introduit le coefficient de frottement qui provient d'une analyse dimensionnelle sur la perte de charge. Quand l'écoulement devient turbulent, ce qui est le cas pour les écoulements à surface libre réalistes, la paramétrisation de ce coefficient de frottement est au centre de la modélisation de ces écoulements.

1 Cinématique

Le mouvement d'un milieu continu est défini par un champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ ou par une famille de déformations $\underline{X}(\underline{a}, t)$ paramétrées par le temps. Un premier point de vue, eulérien, consiste à exprimer tous les champs en fonction des points \underline{x} de la configuration déformée. Le point de vue lagrangien consiste à les exprimer en fonction des positions \underline{a} des particules dans la configuration de référence qui est ici la position initiale du mouvement. Nous exprimons ici la loi de conservation de la masse dans les deux représentations.

In the last sections of this chapter, two examples of flows are presented. Beyond their interest as applications examples of the incompressible Navier-Stokes equations, these flows are here used to introduce the hydraulics of flows in pipes and the hydraulics of free surface flows in open channel flows. In both examples the important concept of "hydraulic head" is introduced. The relation between the "lineic head loss" and the "shear stress" due to the boundaries is put forward.

The first example, which introduces flows in pipes, is the circular Poiseuille in a pipe (Figure 1a), forced by a pressure gradient. When the flow is slow enough, it is laminar and its mean velocity is proportional to the lineic head loss. This important property is at the root of the Darcy law which is valid for flows in porous media such as, for example, the subsurface flows.

The second example, which introduces free surface flows, is the plane Poiseuille flow in an open tilted channel (Figure 1b). One introduces the friction coefficient which comes out of a dimensional analysis on the head loss. When the flow becomes turbulent, which is the case for realistic open channel flows, the parametrization of this friction coefficient is at the center of the modeling of these flows.

Kinematics

The motion of a continuum media is defined by a velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$ or by the deformation family $\underline{X}(\underline{a}, t)$ parametrized by the time. A first, Eulerian, point of vue, consists in expressing all the fields as functions of the points \underline{x} of the distorted configuration. The Lagrangian point of vue consists in expressing them as functions of the positions \underline{a} of the particules in the reference configuration which is here the initial positions of the motion. We here express the mass conservation law in the two representations.

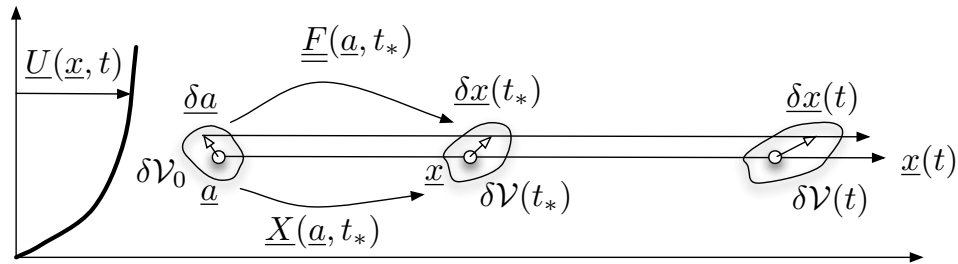


FIG. 1.3 – Trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ associées à la vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Petit vecteur $\underline{\delta x}(t)$ transporté par le mouvement avec $\underline{\delta x}(0) = \underline{\delta a}$ et petit volume $\delta\mathcal{V}(t)$ transporté par le mouvement avec $\delta\mathcal{V}(0) = \delta\mathcal{V}_0$.

Trajectories $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$ associated to the velocity $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Small vector $\underline{\delta x}(t)$ carried by the flow with $\underline{\delta x}(0) = \underline{\delta a}$ and small volume $\delta\mathcal{V}(t)$ carried by the flow with $\delta\mathcal{V}(0) = \delta\mathcal{V}_0$.

1.1 Eulérien ou lagrangien

La représentation eulérienne d'un champ scalaire B est, tout simplement, une fonction $(\underline{x}, t) \mapsto B(\underline{x}, t)$ qui associe le scalaire $B(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}$ à tout point $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$ et tout temps $t \in \mathbb{R}$.

La représentation eulérienne $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$ du champ de vitesse d'un écoulement est, similairement, une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. On note aussi $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ et $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les composantes (u, v, w) et (x, y, z) lorsque nécessaire.

Les trajectoires associées à l'écoulement $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont des courbes paramétrées par le temps $t \mapsto \underline{x}(t)$ solutions de l'équation $\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$. En notant $\underline{x}(0) = \underline{a}$ les conditions initiales de toutes les trajectoires, on peut construire la "description lagrangienne" de l'écoulement $(\underline{a}, t) \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ où $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t)$ est la trajectoire issue de la condition initiale $\underline{x}(0) = \underline{a}$ (figure 1).

Pour tout temps t , on peut considérer la matrice Jacobienne $\underline{F}(\underline{a}, t)$ de la fonction $\underline{a} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ dont les composantes sont $F_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t)$. On peut alors écrire

Eulerian ou Lagrangian

The Eulerian representation of a scalar field B is, simply, the function $(\underline{x}, t) \mapsto B(\underline{x}, t)$ which associates the scalar $B(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}$ to each point $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$ and each time $t \in \mathbb{R}$.

The Eulerian representation $\underline{U}(\underline{x}, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z \in \mathbb{R}^3$ of the velocity field of a flow is, similarly, a function of $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. We also denote by $\underline{U} = (U_1, U_2, U_3)$ and $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ the components (u, v, w) and (x, y, z) when necessary.

The trajectories associated to the flow $\underline{U}(\underline{x}, t)$ are time parametrized curves $t \mapsto \underline{x}(t)$ solutions of the equation $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$. Denoting by $\underline{x}(0) = \underline{a}$ the initial conditions of all the trajectories, one can construct the "Lagrangian description" of the flow $(\underline{a}, t) \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ where $\underline{X}(\underline{a}, t) = \underline{x}(t)$ is the trajectory coming out the initial condition $\underline{x}(0) = \underline{a}$ (Figure 1).

At each time t , one can consider the Jacobian matrix $\underline{F}(\underline{a}, t)$ of the function $\underline{a} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ which components are $F_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t)$. One can thus write

$$\underline{X}(\underline{a} + \underline{\delta a}, t) = \underline{X}(\underline{a}) + \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \underline{\delta a} + \mathcal{O}(\|\underline{\delta a}\|^2), \quad (1.2)$$

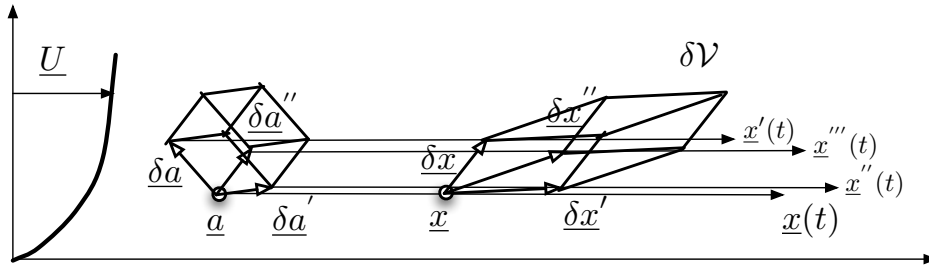


FIG. 1.4 – Déformation d'un petit cube par l'écoulement.

Deformation of small cube by the flow.

où $\underline{\delta a}$ est un petit vecteur et $O(\|\underline{\delta a}\|^2)$ une erreur d'ordre deux. En notant $\underline{\delta x}(t) = \underline{X}(a + \underline{\delta a}, t) - \underline{X}(a, t)$ l'image au temps t du petit vecteur $\underline{\delta a}$, on peut écrire

where $\underline{\delta a}$ is a small vector and $O(\|\underline{\delta a}\|^2)$ an error of order two. By denoting $\underline{\delta x}(t) = \underline{X}(a + \underline{\delta a}, t) - \underline{X}(a, t)$ the image at time t of the small vector $\underline{\delta a}$, one can write

$$\underline{\delta x}(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta a} + O(\|\underline{\delta a}\|^2) \iff \delta x_i(t) = F_{ij}(a, t) \delta a_j + O(\|\delta a\|^2), \quad (1.3)$$

où nous avons utilisé la “convention de sommation d'Einstein” pour laquelle le symbole $\sum_{j=1}^3$ est omis lorsque l'indice de sommation j est répété. On confond ici le “tenseur d'ordre deux” \underline{F} et la matrice 3×3 de ses composantes.

where we have used the “Einstein summation convention” for which the $\sum_{j=1}^3$ symbol is omitted when the summation index j is repeated twice. One assimilates here the “order two tensor” \underline{F} and the matrix 3×3 of its components.

La variation des volumes peut être calculée en considérant trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}(t)$ et $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}(t)$ transportés par le mouvement (figure 1), ce qui signifie que $\underline{x}(t')$, $\underline{x}''(t)$ et $\underline{x}'''(t)$ sont des trajectoires proches de la trajectoire $\underline{x}(t)$. Elles forment un parallélépipède dont le volume $\delta \mathcal{V}$ est le “produit mixte” de ces trois vecteurs défini par

The variation of the volumes can be computed by considering three small vectors $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}(t)$ and $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}(t)$ carried by the motion (figure 1), which means that $\underline{x}(t')$, $\underline{x}''(t)$ and $\underline{x}'''(t)$ are trajectories close to the trajectory $\underline{x}(t)$. They form a parallelepiped which volume $\delta \mathcal{V}$ is the “mixed product” of these three vectors is defined by

$$\delta \mathcal{V}(t) = \left(\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t) \right) = \begin{vmatrix} \delta x_1 & \delta x'_1 & \delta x''_1 \\ \delta x_2 & \delta x'_2 & \delta x''_2 \\ \delta x_3 & \delta x'_3 & \delta x''_3 \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

qui est le déterminant de la matrice constituée des composantes des trois petits vecteurs. Si $\underline{\delta x}(0) = \delta a \underline{e}_x$, $\underline{\delta x}'(0) = \delta a \underline{e}_y$ et $\underline{\delta x}''(0) = \delta a \underline{e}_z$ à $t = 0$, où δa est une petite longueur, le parallélépipède est un cube à $t = 0$ dont le volume est $\delta \mathcal{V}(0) = (\delta a)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta a)^3$. Comme $\underline{\delta x}(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}(0)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}'(0)$ et $\underline{\delta x}''(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}''(0)$, avec une erreur de seulement $O[(\delta a)^2]$, on peut écrire

which is the determinant of the matrix made with the components of the three small vectors. If $\underline{\delta x}(0) = \delta a \underline{e}_x$, $\underline{\delta x}'(0) = \delta a \underline{e}_y$ and $\underline{\delta x}''(0) = \delta a \underline{e}_z$ at $t = 0$, where δa is a small length, the parallelepiped is a cube at $t = 0$ which volume is $\delta \mathcal{V}(0) = (\delta a)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta a)^3$. Since $\underline{\delta x}(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}(0)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}'(0)$ and $\underline{\delta x}''(t) = \underline{F}(a, t) \cdot \underline{\delta x}''(0)$, with an error of only $O[(\delta a)^2]$, one can write

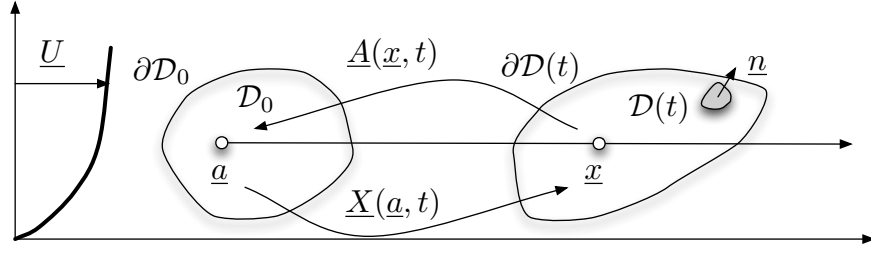


FIG. 1.5 – Domaine $\mathcal{D}(t)$ transporté par l'écoulement avec $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$.

Domain $\mathcal{D}(t)$ carried by the flow with $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$.

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V}(t) &= \left(\underline{F} \cdot \delta\underline{x}(0), \underline{F} \cdot \delta\underline{x}'(0), \underline{F} \cdot \delta\underline{x}''(0) \right) = (\delta a)^3 \left(\underline{F} \cdot \underline{e}_x, \underline{F} \cdot \underline{e}_y, \underline{F} \cdot \underline{e}_z \right) \\ &= (\delta a)^3 \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = (\delta a)^3 \det \underline{F} = \delta\mathcal{V}(0) J(\underline{a}, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t)$ est le “Jacobien” de l'application $\underline{x} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps t pour laquelle on suppose $\det \underline{F}(\underline{a}, t) > 0$.

where $J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t)$ is the “Jacobian determinant” of the application $\underline{x} \mapsto \underline{X}(\underline{a}, t)$ at time t for which one assumes $\det \underline{F}(\underline{a}, t) > 0$.

La relation $\delta\mathcal{V}(t) = \delta\mathcal{V}_0 J(\underline{a}, t)$, démontrée dans le cas d'un petit cube, peut être aisément généralisée au cas de petits volumes de formes quelconques en les découpant en cubes encore plus petits.

The relation $\delta\mathcal{V}(t) = \delta\mathcal{V}_0 J(\underline{a}, t)$, proven in the cas of a small cube, can be easily generalized to the cas of small volumes of arbitrary shape by cutting them into even smaller cubes.

Pour des écoulements réalistes, on a $J(\underline{a}, t) > 0$, ce qui implique que l'inverse $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ de $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps t existe pour déterminer la condition initiale \underline{a} d'une trajectoire dont la position \underline{x} est connue au temps t . Avec cette famille de trajectoires associées au champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$, on peut définir la représentation Lagrangienne $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ du champ B à travers la relation

For realistic flows, one has $J(\underline{a}, t) > 0$ which implies that the inverse $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ of $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ at time t exists to determine the initial condition \underline{a} of a trajectory which position \underline{x} is known at time t . With this family of trajectories associated to the velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$, one can define the Lagrangian representation $B^{(L)}(\underline{a}, t)$ of the field B through the relation

$$B(\underline{x}, t) = B^{(L)}[\underline{A}(\underline{x}, t), t] \iff B[\underline{X}(\underline{a}, t), t] = B^{(L)}(\underline{a}, t), \quad (1.6)$$

ce qui revient à dire que $B(\underline{x}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, t)$ quand $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ ou, de manière équivalente, $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$.

which is to say that $B(\underline{x}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, t)$ when $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ or, equivalently, $\underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t)$.

Étant donné un ensemble \mathcal{D}_0 de particules \underline{a} observées au temps $t = 0$, on note $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$ l'ensemble de leurs images $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ au temps t (figure 1). Le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ pour une intégrale triple sur un domaine mobile $\mathcal{D}(t)$ s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} B(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} B^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (1.7)$$

où $d^3x = J(\underline{a}, t) d^3a$ est le volume d'intégration dans $\mathcal{D}(t)$ qui peut être vu comme l'image du volume d'intégration d^3a dans \mathcal{D}_0 .

Given a set \mathcal{D}_0 of particles \underline{a} at time $t = 0$, let's denote $\mathcal{D}(t) = \underline{X}[\mathcal{D}_0, t]$ the set of their images $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ at time t (Figure 1). The change of variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ for a triple integral on moving domain $\mathcal{D}(t)$ reads

where $d^3x = J(\underline{a}, t) d^3a$ is the integration volume in $\mathcal{D}(t)$ which can be seen as the image of the integration volume d^3a in \mathcal{D}_0 .

La conservation de la masse d'un fluide de champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ énonce que la quantité

$$m[\mathcal{D}(t)] = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho(\underline{x}, t) d^3x = \iiint_{\mathcal{D}_0} \rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a, \quad (1.8)$$

où ρ est la masse volumique, est indépendante du temps. Si $\rho[\underline{X}(\underline{a}, t), 0] = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$ est uniforme au temps $t = 0$, le principe de conservation de la masse impose que la masse volumique satisfait la relation

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 \quad (1.9)$$

pour tout temps t . Cette formulation lagrangienne du principe de conservation de la masse sera complétée par une formulation eulérienne plus loin.

The mass conservation of a fluid of velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$ states that the quantity

where ρ is the mass density, is independent of time. If $\rho[\underline{X}(\underline{a}, t), 0] = \rho^{(L)}(\underline{a}, 0) = \rho_0$ is uniform at time $t = 0$, the mass conservation principle imposes that the mass density satisfies the relation

for all time t . This Lagrangian formulation of the mass conservation principle will be completed by an Eulerian formulation in the following.

1.2 Dérivée particulaire

Particular derivative

Étant donné un champ scalaire $B(\underline{x}, t)$ et une trajectoire $\underline{x}(t)$ associée au champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ avec $\underline{x}(0) = \underline{a}$, on peut considérer la fonction

$$b(t) = B^{(L)}(\underline{a}, t) = B[\underline{x}(t), t] \quad (1.10)$$

qui décrit l'évolution temporelle de la quantité B vue par une particule qui suit la trajectoire $\underline{x}(t)$ (figure 1). Puisque $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$, on peut écrire

Given a scalar field $B(\underline{x}, t)$ and a trajectory $\underline{x}(t)$, associated to the velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$ with $\underline{x}(0) = \underline{a}$, one can consider the function

which describes the time evolution of the quantity B seen by a particule which follows the trajectory $\underline{x}(t)$ (Figure 1). Since $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$, on can write

$$\frac{db}{dt}(t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t) = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } B \right) [\underline{x}(t), t]. \quad (1.11)$$

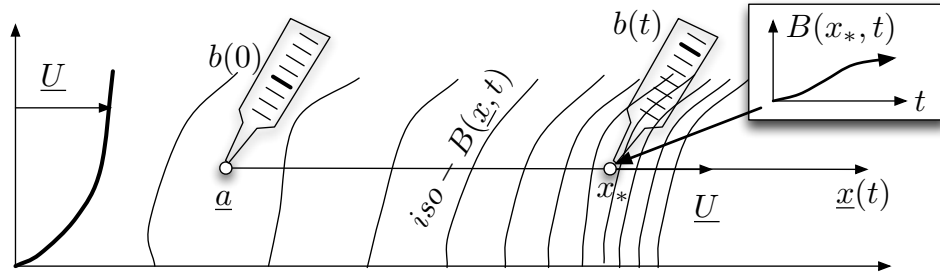


FIG. 1.6 – Fonction $b(t)$ obtenue en mesurant B le long de la trajectoire $\underline{x}(t)$.

Function $b(t)$ obtained by measuring B along the trajectory $\underline{x}(t)$.

On peut alors définir la “dérivée particulaire” $\frac{dB}{dt}$ d’un champ B par sa représentation lagrangienne $\left(\frac{dB}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ ou, de manière équivalente, par sa représentation eulérienne

One can then define the “total derivative” $\frac{dB}{dt}$ of a field B by its Lagrangian representation $\left(\frac{dB}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial B^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ or, equivalently, by its Eulerian representation

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} B(\underline{x}, t). \quad (1.12)$$

De manière similaire, la dérivée particulaire d’un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}, t)$ est définie par ses composantes

Similarly, the total derivative of a vector field $\underline{V}(\underline{x}, t)$ is defined by its components

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} V_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

qui s’écrit aussi, en utilisant l’opérateur différentiel $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$:

which can also read, by using the differential operator $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}) \underline{V} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{V}. \quad (1.14)$$

Le champ d’accélération $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ est défini comme étant la dérivée particulaire du champ de vitesse \underline{U} . À l’aide d’un peu d’algèbre, on peut montrer la relation utile

The acceleration field $\underline{\Gamma}(\underline{x}, t)$ is defined as the total derivative of the velocity field \underline{U} . Using some algebra, on can show the useful identity

$$\underline{\Gamma} = \frac{d\underline{U}}{dt} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}. \quad (1.15)$$

où $\underline{\text{rot}} \underline{U}$ est le champ de vortacité.

where $\underline{\text{rot}} \underline{U}$ is the vorticity of the flow.

1.3 Taux de déformation

Deformation rates

Le gradient du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$ est la matrice Jacobienne $\underline{K} = \underline{\text{grad}} \underline{U}$ de l’application $\underline{x} \mapsto \underline{U}(\underline{x}, t)$ au temps t . Ses composantes sont $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ et on peut écrire

The gradient of the velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$ is the Jacobian matrix $\underline{K} = \underline{\text{grad}} \underline{U}$ of the application $\underline{x} \mapsto \underline{U}(\underline{x}, t)$ at time t . Its components read $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ and one can write

$$\underline{U}(\underline{x} + \underline{\delta x}, t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{K}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} + O(\|\underline{\delta x}\|^2), \quad (1.16)$$

où $\underline{\delta x}$ est un petit vecteur et $O(\|\underline{\delta x}\|^2)$ une erreur d'ordre 2. Si on considère deux trajectoires $\underline{x}(t)$ et $\underline{x}'(t)$ telles que $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ est un petit vecteur (figure 1), on peut écrire

where $\underline{\delta x}$ is a small vector and $O(\|\underline{\delta x}\|^2)$ an order 2 error. If one considers two trajectories $\underline{x}(t)$ and $\underline{x}'(t)$ such that $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ is a small vector (figure 1), one can write

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] = \underline{U}[\underline{x}'(t), t] - \underline{U}[\underline{x}(t), t] = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) + O(\|\underline{\delta x}(t)\|^2). \quad (1.17)$$

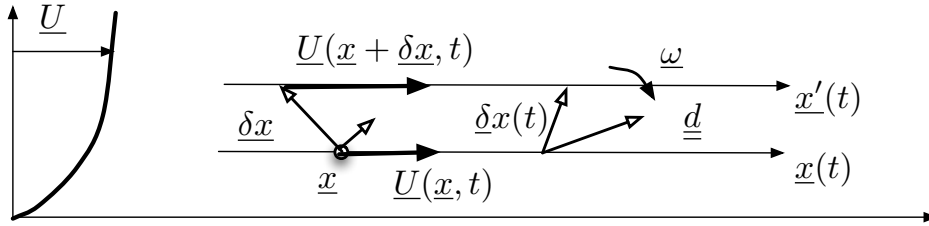


FIG. 1.7 – Comparaison des vitesses de deux trajectoires proches.

Comparison of the velocities of two close trajectories.

La décomposition $\underline{K} = \underline{\omega} + \underline{d}$ en une partie antisymétrique $\underline{\omega}$ et sa partie symétrique \underline{d} entraîne

The decomposition $\underline{K} = \underline{\omega} + \underline{d}$ into its antisymmetric part $\underline{\omega}$ and its symmetric part \underline{d} leads to

$$\underline{U}(\underline{x}', t) - \underline{U}(\underline{x}, t) = \underline{\omega}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\delta x} + \underline{d} \cdot \underline{\delta x} + O(\|\underline{\delta x}\|^2) \quad (1.18)$$

si \underline{x}' et \underline{x} sont séparés par un petit vecteur $\underline{\delta x} = \underline{x}' - \underline{x}$.

if \underline{x}' and \underline{x} are separated by a small vector $\underline{\delta x} = \underline{x}' - \underline{x}$.

Pour toute matrice antisymétrique $\underline{\omega}$, il existe un unique vecteur $\underline{\omega}$ tel que $\underline{\omega} \cdot \underline{\delta x} = \underline{\omega} \wedge \underline{\delta x}$ pour tout vecteur $\underline{\delta x}$. Ses composantes satisfont $\omega_i + \omega_{jk} = 0$ si le triplet (i, j, k) est une permutation directe de $(1, 2, 3)$. Pour le cas présent $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, on montre que $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$. En écrivant

For any antisymmetric matrix $\underline{\omega}$, there exists a unique vector $\underline{\omega}$ such that $\underline{\omega} \cdot \underline{\delta x} = \underline{\omega} \wedge \underline{\delta x}$ for any vector $\underline{\delta x}$. Its components satisfy $\omega_i + \omega_{jk} = 0$ if the triplet (i, j, k) is a direct permutation of $(1, 2, 3)$. For the present case $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, one shows that $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$. By writing

$$\underline{U}(\underline{x}', t) = \underline{U}(\underline{x}, t) + \underline{\omega}(\underline{x}, t) \wedge (\underline{x}' - \underline{x}) + \underline{d} \cdot \underline{\delta x} + O(\|\underline{\delta x}\|^2), \quad (1.19)$$

on voit que $\underline{\omega}$, appelé le “tenseur des taux de rotation”, décrit un mouvement de rotation solide dans le voisinage de \underline{x} dont le vecteur rotation est, par définition, $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$.

one sees that $\underline{\omega}$, called the “rotation rate tensor”, describes a rotation solid motion in the vicinity of \underline{x} which rotation vector is, by definition, $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{U}$.

La partie symétrique \underline{d} , dont les composantes sont $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, est appelée le “tenseur des taux de déformation”. Il est tel que

The symmetric part \underline{d} , which components are $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$, is called the “deformation rate tensor” or the “strain tensor”. It is such that

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 \underline{\delta x}(t) \cdot \underline{d}[x(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) = 2 \delta x_i(t) d_{ij}[x(t), t] \delta x'_j(t), \quad (1.20)$$

où $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ et $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$ sont des petits vecteurs décrivant la séparation entre les trois trajectoires $\underline{x}(t)$, $\underline{x}'(t)$ et $\underline{x}''(t)$. Par conséquent, le tenseur des taux de déformation décrit le taux de variation des distances et des angles des petits vecteurs transportés par le mouvement.

where $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$ and $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$ are small vectors describing the separations between the three trajectories $\underline{x}(t)$, $\underline{x}'(t)$ and $\underline{x}''(t)$. Thus, the deformation rate tensor describes the variation rate of the distances and the angles of small vectors carried by the motion.

En considérant les trois petits vecteurs $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}''(t)$ transportés par le mouvement (figure 1), on peut calculer le taux de variation des volumes. Ils forment un parallélépipède dont le volume est $\delta\mathcal{V}(t) = (\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t))$.

The rate of variation of the volumes can be computed by considering three small vectors $\underline{\delta x}(t) = \underline{x}'(t) - \underline{x}(t)$, $\underline{\delta x}'(t) = \underline{x}''(t) - \underline{x}'(t)$ et $\underline{\delta x}''(t) = \underline{x}'''(t) - \underline{x}''(t)$ carried by the motion (Figure 1). They form a parallelepiped which volume is $\delta\mathcal{V}(t) = (\underline{\delta x}(t), \underline{\delta x}'(t), \underline{\delta x}''(t))$.

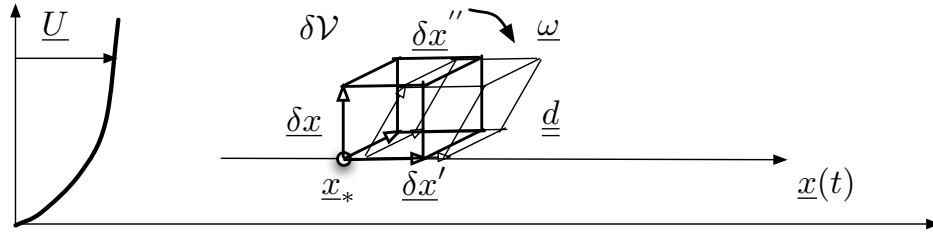


FIG. 1.8 – Déformation d'un petit cube entre deux temps proches.

Deformation of a small cube between two close times.

Si $\underline{\delta x}(t_*) = \delta x \underline{e}_x$, $\underline{\delta x}'(t_*) = \delta x \underline{e}_y$ et $\underline{\delta x}''(t_*) = \delta x \underline{e}_z$ à $t = t_*$, où δx est une petite longueur, le parallélépipède est un cube à $t = t_*$, dont le volume est $\delta\mathcal{V}(t_*) = (\delta x)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta x)^3$. Comme $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}(t_*)$, $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}'(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}'(t_*)$ et $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}''(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}''(t_*)$ avec une erreur de seulement $O[(\delta x)^2]$, on peut écrire

If $\underline{\delta x}(t_*) = \delta x \underline{e}_x$, $\underline{\delta x}'(t_*) = \delta x \underline{e}_y$ and $\underline{\delta x}''(t_*) = \delta x \underline{e}_z$ at $t = t_*$, where δx is a small length, the parallelepiped is a cube at $t = t_*$ which volume is $\delta\mathcal{V}(t_*) = (\delta x)^3 (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z) = (\delta x)^3$. Since $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}(t_*)$, $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}'(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}'(t_*)$ and $\frac{d}{dt} \underline{\delta x}''(t_*) = \underline{K}[x(t_*), t_*] \cdot \underline{\delta x}''(t_*)$ with an error of only $O[(\delta x)^2]$, one can write

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta\mathcal{V}(t_*) &= (\underline{K} \cdot \underline{\delta x}, \underline{\delta x}', \underline{\delta x}'') + (\underline{\delta x}, \underline{K} \cdot \underline{\delta x}', \underline{\delta x}'') + (\underline{\delta x}, \underline{\delta x}', \underline{K} \cdot \underline{\delta x}'') \\ &= (\delta x)^3 \left[\begin{vmatrix} K_{11} & 0 & 0 \\ K_{21} & 1 & 0 \\ K_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 \\ 0 & K_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & K_{13} \\ 0 & 1 & K_{23} \\ 0 & 0 & K_{33} \end{vmatrix} \right] \\ &= (\delta x)^3 (K_{11} + K_{22} + K_{33}) = \delta\mathcal{V}(t_*) \operatorname{div} \underline{U}[x(t_*), t_*]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La relation $\frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t) = \delta\mathcal{V}(t) \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t), t]$, démontrée dans le cas d'un petit cube, peut être aisément généralisée au cas de petits volumes de formes quelconques en les découpant en cubes encore plus petits.

On voit donc que la divergence $\operatorname{div} \underline{U}$ du champ de vitesse est égale au taux de déformation relatif des volumes. En particulier, si le volume de tout domaine de particules est conservé dans l'écoulement, on a $\operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0$ pour tous les points \underline{x} et tout temps t . On dit alors que l'écoulement est isochore.

The relation $\frac{d}{dt}\delta\mathcal{V}(t) = \delta\mathcal{V}(t) \operatorname{div} \underline{U}[\underline{x}(t), t]$, proven in the cas of a small cube, can be easily generalized to the cas of small volumes of arbitrary shape by cutting them into even smaller cubes.

One then sees that the divergence $\operatorname{div} \underline{U}$ of the velocity field is equal to the relative deformation rate of the volumes. In particular, if the volume of any particles domain is conserved by the flow, one has $\operatorname{div} \underline{U}(\underline{x}, t) = 0$ for all points \underline{x} and at each time t . One then says that the flow is isochoric.

2 Lois de conservation

La “démonstration des petites tétraèdres” établit que le flux de surface intervenant dans une loi de conservation dépend linéairement du vecteur unitaire normal à la frontière du domaine en mouvement considéré. Pour la loi de conservation de la quantité de mouvement, cette dépendance linéaire des forces surfaciques de contact définit le tenseur des contraintes.

2.1 Théorèmes de transport

Une loi de conservation pour un champ $c(\underline{x}, t)$ est une assertion disant que pour tout domaine $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$ de particules de trajectoires $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$, avec $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$, donc transportées par le champ de vitesse \underline{U} , on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x, \quad (1.22)$$

où $\partial\mathcal{D}(t)$ est la frontière de $\mathcal{D}(t)$, \underline{n} sa normale en (\underline{x}, t) pointant vers l'extérieur, $q_c(\underline{x}, \underline{n})$ un champ représentant le “flux de surface sortant” de c et $f_c(\underline{x}, t)$ un champ représentant la “production interne” de c (figure 1).

Pour calculer le premier terme de cette loi de conservation générique, on peut utiliser le changement de variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ et écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}_0} c^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) d^3a$$

Conservation laws

The “little tetrahedrons demonstration” shows that the surface flux involved in a conservation law is linearly dependant of the unit vector normal to the boundary of the considered moving domain. For the momentum conservation law, this linear dependancy of the surface contact forces defines the stress tensor.

Transport theorems

A conservation law for a field $c(\underline{x}, t)$ is the statement saying that for each domain $\mathcal{D}(t) = \underline{X}(\mathcal{D}_0, t)$ of particules of trajectories $\underline{x}(t) = \underline{X}(\underline{a}, t)$, with $\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}_0$, thus carried by the velocity field \underline{U} , one can write

where $\partial\mathcal{D}(t)$ is the boundary of $\mathcal{D}(t)$, \underline{n} its normal at (\underline{x}, t) pointing towards the exterior, $q_c(\underline{x}, \underline{n})$ a field representing the “outgoing surface flux” of c and $f_c(\underline{x}, t)$ a field representing the “internal production” of c (Figure 1).

To compute the first term of this generic conservation law, one can use the change variable $\underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t)$ and write

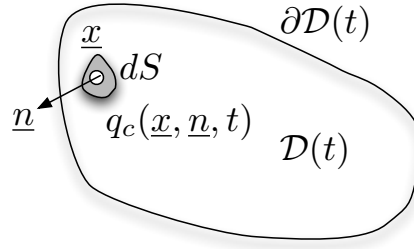


FIG. 1.9 – Flux de surface sortant $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$, normale sortante \underline{n} et frontière $\partial\mathcal{D}$ du domaine \mathcal{D} .

FIG. 1.10 – Outgoing surface flux $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$, outgoing normal \underline{n} and border $\partial\mathcal{D}$ of the domain \mathcal{D} .

$$= \iiint_{\mathcal{D}_0} \left(\frac{\partial c^{(L)}}{\partial t} J + c^{(L)} \frac{\partial J}{\partial t} \right) (\underline{a}, t) d^3 a. \quad (1.23)$$

Pour calculer $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)$, on peut combiner les relations $\delta\mathcal{V}(t)/\delta\mathcal{V}(0) = J(\underline{a}, t)$ et $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(t)/\mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ pour obtenir $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)/J(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$. En notant que $\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ est la représentation lagrangienne de la dérivée particulière $\frac{dc}{dt}$, on peut écrire

To compute $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)$, one can combine the relations $\delta\mathcal{V}(t)/\delta\mathcal{V}(0) = J(\underline{a}, t)$ and $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(t)/\mathcal{V}(t) = \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ to obtain $\frac{\partial J}{\partial t}(\underline{a}, t)/J(\underline{a}, t) = \text{div } \underline{U}[\underline{X}(\underline{a}, t), t]$. By recognizing that $\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)}(\underline{a}, t) = \frac{\partial c^{(L)}}{\partial t}(\underline{a}, t)$ is the Lagrangian representation of the total derivative $\frac{dc}{dt}$, one can write

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3 x &= \iiint_{\mathcal{D}_0} \left[\left(\frac{dc}{dt}\right)^{(L)} + c^{(L)} (\text{div } \underline{U})^{(L)} \right] J(\underline{a}, t) d^3 a \\ &= \iiint_{\mathcal{D}(t)} \left(\frac{dc}{dt} + c \text{div } \underline{U} \right) (\underline{x}, t) d^3 x. \end{aligned} \quad (1.24)$$

En utilisant les relations $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } c$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } c + c \text{div } \underline{U} = \text{div } (c \underline{U})$ ainsi que le théorème de la divergence, on peut écrire

By using the relations $\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } c$, $\underline{U} \cdot \text{grad } c + c \text{div } \underline{U} = \text{div } (c \underline{U})$ as well as the divergence theorem, on can write

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c d^3 x = \iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3 x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} c \underline{U} \cdot \underline{n} dS, \quad (1.25)$$

où $c \underline{U}$ est appelé le “flux cinématique” de la grandeur c .

where $c \underline{U}$ is called the “kinematic flux” of the quantity c .

2.2 Flux et bilan local

Fluxes and local budget

Nous montrons maintenant que le “flux de surface sortant” $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ qui apparaît dans la loi de conservation doit obéir à une propriété très forte : une dépendance linéaire vis-à-vis du vecteur unitaire \underline{n} .

We now show that the “outgoing surface flux” $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ which appears in a conservation law must obey to a very strong property : a linear dependency with the unit vector \underline{n} .

En effet, puisque la loi de conservation est valable pour tous les domaines $\mathcal{D}(t)$, on peut écrire que $\frac{1}{\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]} \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS$ est borné lorsque le volume $\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]$ est pris arbitrairement petit.

Indeed, since the conservation law is valid for all the domains $\mathcal{D}(t)$, one can write that $\frac{1}{\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]} \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) dS$ is bounded when the volume $\mathcal{V}[\mathcal{D}(t)]$ is taken arbitrarily small.

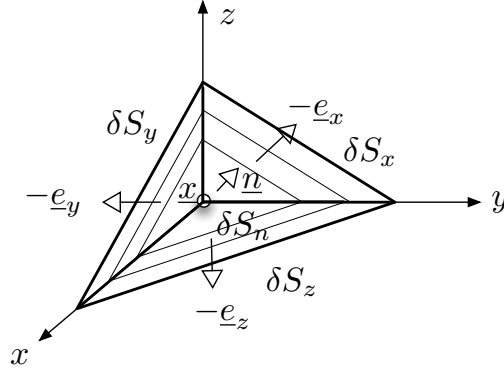


FIG. 1.11 – Tétraèdres utilisés pour démontrer la linéarité du flux avec : $\underline{n} = (\delta S_x \underline{e}_x + \delta S_y \underline{e}_y + \delta S_z \underline{e}_z) / \delta S_n$

Tetrahedron used for demonstrating the linearity of the flux, with : $\underline{n} = (\delta S_x \underline{e}_x + \delta S_y \underline{e}_y + \delta S_z \underline{e}_z) / \delta S_n$

En appliquant cette propriété à une famille de tétraèdres de plus en plus petits (figure 1), on peut montrer ([?], [?], [?]) que la dépendance de $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ avec \underline{n} est linéaire et en déduire qu’il existe un “vecteur flux” $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ tel que

By applying this property to a family of shrinking tetrahedrons (Figure 1), one can show that the dependency of $q_c(\underline{x}, \underline{n}, t)$ with \underline{n} is linear and deduce that there exists a “flux vector” $\underline{Q}_c(\underline{x}, t)$ such that

$$q_c(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} . \tag{1.26}$$

En appliquant le théorème de la divergence, la loi de conservation s’écrit alors

By applying the divergence theorem, the conservation law now writes

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x . \tag{1.27}$$

En utilisant les résultats obtenus précédemment pour le premier membre de cette relation, la loi de conservation s’écrit aussi

Using the results obtained previously for the first term of this relation, the conservation law also read

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c d^3x , \tag{1.28}$$

où le flux cinématique $c \underline{U}$ et le flux \underline{Q}_c de la loi de conservation s’ajoutent. Comme la loi de conservation est vraie pour tous les domaines \mathcal{D} , en particulier pour les arbitrairement petits, on peut écrire le bilan local

where the kinematic flux $c \underline{U}$ and the conservation law flux \underline{Q}_c add together. Since the conservation law is true for all the domains \mathcal{D} , in particular arbitrarily small ones, on can write the local budget

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} (c \underline{U} + \underline{Q}_c) = \frac{dc}{dt} + c \text{div} \underline{U} + \text{div} \underline{Q}_c = f_c . \tag{1.29}$$

La conservation de la masse est un exemple de loi avec $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t)$, $\underline{Q}_c = \underline{0}$ et $f_c = 0$. Le bilan local s'écrit alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0. \quad (1.30)$$

On voit que les écoulements isochores ($\operatorname{div} \underline{U} = 0$) sont associés à des fluides considérés comme incompressibles ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) et réciproquement. Dans ce cas, si $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est homogène à $t = 0$, on a $\rho = \rho_0$ pour tous temps.

The mass conservation is a simple example of law with $c(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t)$, $\underline{Q}_c = \underline{0}$ and $f_c = 0$. The local budget then reads

On sees that isochoric flows ($\operatorname{div} \underline{U} = 0$) correspond to fluids considered as incompressible ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) and inversly. For iso-volume flows, encountered in incompressible flows, one has $\frac{d\rho}{dt} = 0$ since $\operatorname{div} \underline{U} = 0$. In this case, if $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ is homogeneous at $t = 0$, one has $\rho = \rho_0$ for all times.

2.3 Quantité de mouvement

La première partie de la loi de conservation de la quantité de mouvement énonce que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \underline{U} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) dS = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d^3x, \quad (1.31)$$

où $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ est la densité surfacique des forces de contact exercées sur la frontière $\partial\mathcal{D}$ par l'extérieur du domaine \mathcal{D} (figure 1), et $\rho \underline{F}(\underline{x}, t)$ la densité des forces de volume. Les forces de contact \underline{T} représentent les interactions sur des distances plus petites que l'échelle de la description continue des champs. Les forces de volume $\rho \underline{F}$ représentent les interactions à l'échelle macroscopique du continu. La plupart du temps, les forces de volumes sont les forces de gravité $\underline{F} = \underline{g}$ où \underline{g} est le vecteur gravité.

The first part of the momentum conservation law states that

where $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ is the surface density of the contact forces applied on the boundary $\partial\mathcal{D}$ (Figure 1), by the exterior of the domain \mathcal{D} , and $\rho \underline{F}(\underline{x}, t)$ the density of the volume forces. Contact forces \underline{T} represent interactions on distances smaller than the scale of the continuous description of the fields. Volume forces $\rho \underline{F}$ represent interactions at the macroscopic continuous scale. Most of the time, the volume forces are reduced to the gravity forces $\underline{F} = \underline{g}$ where \underline{g} is the gravity vector.

Comme pour les lois de conservation scalaires, la démonstration des tétraèdres entraîne que $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ dépend linéairement de \underline{n} . Par conséquent, il existe un tenseur d'ordre deux $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$, appelé le "tenseur des contraintes", qui permet d'écrire

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}. \quad (1.32)$$

En supposant que la conservation de la masse est satisfaite, on peut montrer que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\iiint_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{d\underline{U}}{dt} d^3x - \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d^3x. \quad (1.33)$$

As for scalar conservation laws, the tetrahedrons demonstration implies that $\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t)$ depends linearly of \underline{n} . Thus, there exists a tensor $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$, called the "strain tensor", which allows to write

Assuming that the mass conservation is satisfied, one can show that the momentum conservation law reads

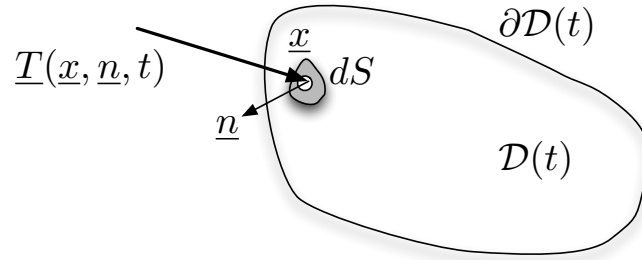


FIG. 1.12 – Forces de surface appliquées à la frontière $\mathcal{D}(t)$ par son extérieur.

Surface forces applied on the boundary $\mathcal{D}(t)$ by its exterior.

En appliquant le théorème de la divergence et la conservation de la masse, le bilan local pour la quantité de mouvement est alors

By applying the divergence theorem and the mass conservation, the local budget for the momentum is then is

$$\rho \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \text{grad } \mathbf{U} \right) = \rho \mathbf{F} + \text{div } \underline{\underline{\sigma}}, \quad (1.34)$$

où la $i^{\text{ème}}$ composante de $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$ est $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ dans laquelle la convention de sommation d'Einstein est utilisée (sommation sur l'indice j répété).

where the i^{th} component of $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$ is $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ in which the Einstein summation convention is used (summation on the repeated index j).

La seconde partie de la loi de conservation de la quantité de mouvement énonce que le moment angulaire $\rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{U}$ est associé au flux sortant $-\mathbf{x} \wedge \mathbf{T}$ et aux termes de production $\rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$. Combinées avec la première partie de la loi, des manipulations algébriques montrent que cet axiome se réduit au fait que $\underline{\underline{\sigma}}$ est symétrique.

The second part of the momentum conservation laws states that the integral of angular momentum $-\rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{U}$ is associated to the output flux $\mathbf{x} \wedge \mathbf{T}$ and the production term $\rho \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$. Combined with the first part of the laws, algebraic manipulation shows that this statement reduced to the fact that $\underline{\underline{\sigma}}$ est symmetric.

3 Fluides newtoniens

Newtonian fluids

Les équations de Navier-Stokes sont obtenues en introduisant la loi rhéologique des fluides newtoniens dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en considérant l'équation de conservation de la masse que nous supposons ici être celle des écoulements incompressibles. Nous détaillons ensuite deux exemples d'applications que sont les écoulements de Poiseuille circulaire et plan.

The Navier-Stokes equations are obtained by introducing the rheological law of Newtonian fluids in the momentum conservation law and by considering the mass conservation law which we suppose here to be the one of the incompressible flows. We then detail two examples of applications which are the circular or plane Poiseuille flows.

3.1 Équations de Navier-Stokes

Navier-Stokes equations

La loi rhéologique d'un fluide Newtonien s'écrit | The rheologic law of a Newtonian fluid reads

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}, \quad (1.35)$$

où $\underline{\underline{I}}$ est le tenseur identité, $p(\underline{x}, t)$ la pression, $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t) = -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$ le tenseur des contraintes visqueuses et μ la viscosité dynamique. La forme du tenseur des contraintes visqueuses est obtenue en imposant sa dépendance linéaire et isotrope avec $\underline{\underline{d}}$ et en supposant qu'il n'y a pas de dissipation dans une compression isotrope (hypothèse de Stokes).

where $\underline{\underline{I}}$ is the unit tensor, $p(\underline{x}, t)$ the pressure, $\underline{\underline{\tau}}(\underline{x}, t) = -\frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \underline{\underline{U}} \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$ the viscous stress tensor and μ the dynamic viscosity. The form of the viscous stress tensor is obtained by imposing its linear and isotropic dependency with $\underline{\underline{d}}$ and by assuming there is no dissipation in an isotropic compression (Stokes hypothesis).

L'approximation de "fluide incompressible" est obtenue en imposant la contrainte $\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = 0$ en plus de la loi de conservation de la masse. Si la densité volumique est uniforme à un instant donné, la conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} = 0$ entraîne que $\rho = \rho_0$ reste uniforme et constante pour tout temps, ce que nous supposons par la suite.

The "incompressible flows" approximation is obtained by imposing the constraint $\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = 0$ in addition to the mass conservation laws. If the mass density is uniform at some time, the mass conservation $\frac{d\rho}{dt} = 0$ implies that $\rho = \rho_0$ stays uniform and constant for all time, which we assume in the following.

Pour les fluides incompressibles, la loi rhéologique newtonienne conduit à

For incompressible fluids, the Newtonian rheologic law leads to

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} \quad \implies \quad \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \underline{\underline{U}}, \quad (1.36)$$

où la $i^{\text{ème}}$ composante du Laplacien $\Delta \underline{\underline{U}}$ est, en coordonnées cartésiennes, $\Delta U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$ (on utilise la convention de sommation d'Einstein qui consiste à sommer les indices répétés). Cette relation est obtenue en exprimant la $i^{\text{ème}}$ composante de $\operatorname{div} \underline{\underline{d}}$ sous la forme $\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j}$ et en utilisant la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$.

where the i^{th} component of the Laplacian $\Delta \underline{\underline{U}}$ is, in Cartesian coordinates, $\Delta U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$ (one use the Einstein summation convention which consists in summing the repeated indices). This relation can be obtained by expressing the i^{th} component of $\operatorname{div} \underline{\underline{d}}$ under the form $\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j}$ and using the incompressible constraint $\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$.

Tous les résultats ci-dessus conduisent aux équations Navier-Stokes incompressibles

All the above results lead to the incompressible Navier-Stokes equations

$$\operatorname{div} \underline{\underline{U}} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{\underline{U}}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \underline{\underline{F}} + \nu \Delta \underline{\underline{U}}, \quad (1.37)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est appelée la "viscosité cinématique".

where $\nu = \mu/\rho$ is called the "kinematic viscosity".

Pour résoudre des problèmes pratiques, on doit considérer des conditions aux limites. En raison de la “nature parabolique” de ces équations de Navier-Stokes, trois conditions aux limites doivent être spécifiées sur toute la frontière du domaine.

To solve practical problem, one has to consider boundary conditions. Due to the “parabolic nature” of these Navier-Stokes equations, three boundary conditions must be specified on the whole border of the domain.

Sur des frontières rigides et immobiles, ces conditions aux limites s'écrivent $\underline{U} = \underline{0}$. Sur des frontières libres et immobiles, ces conditions aux limites peuvent s'écrire $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ et $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{n} = \underline{0}$, ce qui signifie que la vitesse normale et les contraintes tangentielles sont nulles.

On no-slip and motionless boundaries, these boundary conditions read $\underline{U} = \underline{0}$. On slipping and motionless boundaries, they can read $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ and $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{n} = \underline{0}$, meaning that the normal velocity and the tangential constraints are zero.

Sur une frontière libre et mobile en contact avec un gaz à pression constante, par exemple l'atmosphère, on décrit la surface libre et mobile avec l'équation inconnue $F(\underline{x}, t) = 0$. Les conditions aux limites sur cette interface s'écrivent $\frac{dF}{dt}(\underline{x}, t) = 0$ et $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n}$, où il y a quatre conditions au lieu de trois pour équilibrer le nouveau champ inconnu $F(\underline{x}, t)$.

On a free and moving boundary in contact with a gaz at constant pressure p_a , for instance the atmosphere, one describes the free surface with the unknown equation $F(\underline{x}, t) = 0$. The boundary conditions on this interface read $\frac{dF}{dt}(\underline{x}, t) = 0$ and $\underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n}$, where there are four conditions instead of three to balance the new unknown field $F(\underline{x}, t)$.

Avant d'aborder des exemples d'applications, nous mentionnons l'importante relation de Bernoulli qui découle des équations de Navier-Stokes. Sa plus simple formulation consiste à dire que pour un écoulement stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$ et donc $\frac{d}{dt} = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$) et non visqueux ($\nu = 0$), en présence de force de gravité $\underline{F} = -\underline{\text{grad}}(gz)$, on peut écrire

Before going the application examples, we mention the important Bernoulli equation which comes from the Navier-Stokes equations. Its simplest formulation says that a stationary flow ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$ and thus $\frac{d}{dt} = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$) and non viscous ($\nu = 0$), with gravity forces $\underline{F} = -\underline{\text{grad}}(gz)$, one can write

$$\frac{d}{dt} \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) = \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \left(p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho \underline{U}^2 \right) = 0. \quad (1.38)$$

On appelle alors “charge hydraulique” la quantité $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$ qui est ainsi invariante le long des trajectoires. Lorsque le fluide est visqueux ($\nu > 0$), cette quantité diminue en suivant une trajectoire et l'on parle alors de “pertes de charge”. On note alors $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \underline{\text{div}} \underline{\tau} = \frac{1}{g}(-\nu \Delta \underline{U})$ le vecteur “perte de charge linéique”.

One then denotes by “hydraulic load” the quantity $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$ which is thus invariant along the trajectories. When the fluid is viscous ($\nu > 0$), this quantity decreases along a trajectory and one then speaks of “load loss”. One then denotes by $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \underline{\text{div}} \underline{\tau} = \frac{1}{g}(-\nu \Delta \underline{U})$ the “lineic head loss” vector.

3.2 Poiseuille circulaire en charge

Comme premier exemple d'application des équations de Navier-Stokes, on considère l'écoulement stationnaire visqueux dans un tube horizontal de section circulaire (figure 1). On note D le diamètre de cette section et on suppose que l'écoulement est forcé par un gradient de pression constant $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$. Les forces de volumes $\underline{F} = -g \underline{e}_z$ sont dues à la gravité.

On cherche une solution stationnaire symétrique de la forme $\underline{U} = u(r) \underline{e}_x$ où r est la distance à l'axe. Les équations de Navier-Stokes incompressibles conduisent à

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \quad , \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad , \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g . \quad (1.39)$$

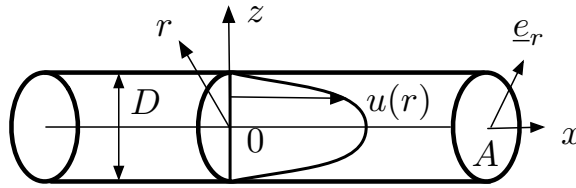


FIG. 1.13 – Écoulement de Poiseuille circulaire en charge.

Circular Poiseuille flow in a pipe.

On en déduit $p(\underline{x}) = p_r - Gx - \rho g z$, où p_r est une constante arbitraire. Le profil $u(r)$ doit vérifier

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{G}{\rho \nu} , \quad (1.40)$$

avec les conditions aux limites rigides $u(D/2) = 0$. On en déduit donc que

with the no-slip boundary condition $u(D/2) = 0$. One then deduces that

$$u(r) = \frac{G}{\rho \nu} \left(\frac{D^2}{16} - \frac{r^2}{4} \right) . \quad (1.41)$$

Le débit Q est donc

The discharge flux Q is thus

$$Q = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} u(r) r d\theta dr = \frac{\pi D^4}{128 \rho \nu} G . \quad (1.42)$$

As a first example of application of the incompressible Navier-Stokes equations, we consider the viscous stationary flow in a horizontal tube of circular section. We denote by D the diameter of this section and we suppose that the flow is forced by a constant pressure gradient $\frac{\partial p}{\partial x} = -G$. The volume forces $\underline{F} = -g \underline{e}_z$ are due to gravity.

One seeks a symmetric stationary solution under the form $\underline{U} = u(r) \underline{e}_x$ where r is the distance to the axe. The incompressible Navier-Stokes equations lead to

En notant $A = \pi D^2/4$ l'aire de la section du tuyau, on peut définir la vitesse moyenne U dans la direction x par

Denoting by $A = \pi D^2/4$ the section area of the tube, one can define the mean velocity U in the direction x by

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{D^2 G}{32 \rho \nu}. \quad (1.43)$$

La “charge hydraulique” est alors

The “hydraulic load” is the

$$H(x, r) = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g} = \frac{p_r - Gx}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}. \quad (1.44)$$

La perte de charge linéique J , due aux frottements visqueux sur les murs, est définie par $J = \frac{1}{A} \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} (-\nu \Delta u) r d\theta dr$ ce qui permet d'écrire

The lineic head loss J , due to viscous friction on the walls, is defined by $J = \frac{1}{A} \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g} (-\nu \Delta u) r d\theta dr$ which allows to write

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J \implies \frac{G}{\rho g} = J. \quad (1.45)$$

Cette relation traduit l'équilibre entre le forçage de pression et le frottement.

This relation traduces the equilibrium between the pressure forcing and the friction.

On note $P = \pi D$ le “périmètre mouillé”, $R_H = A/P$ le “rayon hydraulique” et $D_H = 4 R_H$ le “diamètre hydraulique”. Ici, nous avons $D_H = D$ et $R_H = D/2$.

We denote by $P = \pi D$ the “wet perimeter”, $R_H = A/P$ the “hydraulic radius” and $D_H = 4 R_H$ the “hydraulic diameter”. Here, we have $D_H = D$ and $R_H = D/2$.

Le coefficient de frottement λ est une grandeur sans dimension définie par l'équation de Darcy-Weissbach

The friction coefficient λ is a dimensionless quantity defined by the Darcy-Weissbach equation

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H}. \quad (1.46)$$

En utilisant l'expression (1.43) on a ici

Using the analytic expression (1.43) one has here

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad Re = \frac{U D_H}{\nu}, \quad (1.47)$$

où Re est le “nombre de Reynolds”. Une autre présentation de la perte de charge linéique est obtenue en écrivant la “loi de Darcy” :

where Re is the “Reynolds number”. Another presentation of the lineic head loss is obtained by writing the “Darcy law”

$$U = -K_p \frac{\partial H}{\partial x}, \quad K_p = \frac{gD^2}{32\nu}, \quad (1.48)$$

où K_p a la dimension d'une vitesse.

where K_p has the dimension of a velocity.

Nous notons $\tau(r) = -\underline{e}_x \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$ la contrainte tangentielle de cisaillement définie à partir du tenseur des contraintes

We denote by $\tau(r) = -\underline{e}_x \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$ the tangential shear stress defined from the stress tensor

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2 \rho \nu \underline{\underline{d}} \quad , \quad \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_r) \quad , \quad (1.49)$$

où $\underline{\underline{d}}$ est le tenseur des taux de déformation et \underline{e}_r le vecteur unitaire radial (le produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ de deux vecteurs est le tenseur d'ordre deux de composantes $a_i b_j$). En notant τ_* la valeur absolue de la contrainte de cisaillement appliquée par le fluide sur le tuyau, on peut écrire

where $\underline{\underline{d}}$ is the deformation rate tensor and \underline{e}_r the radial unit vector (the tensorial product $\underline{a} \otimes \underline{b}$ of two vectors is the order two tensor of components $a_i b_j$). Denoting by τ_* the absolute value of the shear stress applied by the fluid on the pipe, one can write

$$\tau_* = \rho g R_H J \quad . \quad (1.50)$$

Pour un tuyau horizontal de 100 m de long connectant un réservoir d'eau (masse volumique $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) sous 3 bar de pression ($3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, soit environ 30 m de hauteur d'eau) à l'atmosphère (1 bar), la vitesse moyenne U , calculée à l'aide de (1.43), est environ 25 cm/s pour un diamètre de 2 mm et de 25 m/s (environ 100 km/h) pour un diamètre de 2 cm.

For a horizontal pipe of 100 m length connecting a water tank (mass density $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, kinematic viscosity $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) under 3 bar of pressure (about 30 m of water height) to the atmosphere (1 bar), the mean velocity U , computed with the help of (1.43), is about 25 cm/s for a 2 mm diameter and of 25 m/s (about 100 km/h) for a 2 cm diameter.

Si la première estimation de la vitesse, correspondant à un nombre de Reynolds d'environ 500, semble réaliste, la seconde, qui correspond à un nombre de Reynolds d'environ $5 \cdot 10^5$ n'est pas correcte. Ceci est dû au fait que la solution "laminaire" que nous avons calculée n'est plus pertinente lorsque le nombre de Reynolds est plus grand qu'une valeur critique au-delà de laquelle l'écoulement devient "turbulent".

If the first estimation of the velocity, corresponding to a Reynolds number of about 500, seems realistic, the second, which corresponds to a Reynolds number of about $5 \cdot 10^5$, is not correct. This is due to the fact that the "laminar" solution that we have computed is no longer pertinent when the Reynolds number is higher than a critical value beyond which the flow becomes "turbulent".

3.3 Poiseuille plan à surface libre

Open plane Poiseuille flow

Nous considérons maintenant l'écoulement stationnaire, visqueux, à surface libre d'une couche d'eau de profondeur h sur un plan incliné (figure 1). Il n'y a pas de gradient de pression imposé, mais l'écoulement est ici forcé par les forces volumiques de gravité $\underline{F} = -g \underline{e}_z$, où z est la coordonnée verticale.

We now consider the stationary, viscous, free surface flow of a water layer of depth h on a tilted plane (Figure 1). There is no imposed pressure gradient, but the flow is forced by the volume forces $\underline{F} = -g \underline{e}_z$ of gravity, where z is the vertical coordinate.

On note γ l'angle du plan incliné avec le plan horizontal et p_a la pression atmosphérique, que nous supposons constante, en contact avec la surface libre.

We denote by γ the angle of the tilted plane with the horizontal plane and p_a the atmospheric pressure, which we assume constant, in contact with the free surface.

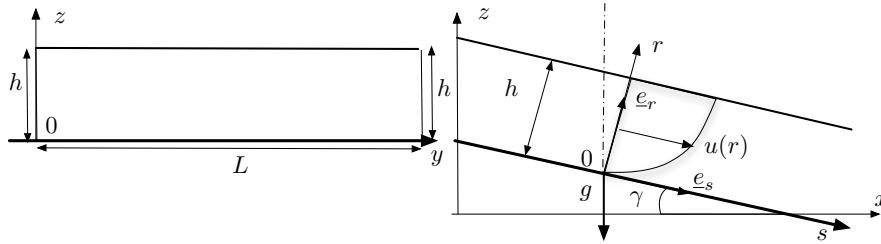


FIG. 1.14 – Écoulement de Poiseuille à surface libre sur un plan incliné.

Free surface Poiseuille flow on a tilted plane.

On note s la coordonnée dans la direction de la pente et \underline{e}_s le vecteur unitaire qui lui est parallèle. On note $z = Z_f(s)$ l'équation du fond et $I = -Z'_f(s) = \sin \gamma$ sa “pente” (par abus de langage).

We denote by s the coordinate in the direction of the slope and \underline{e}_s the unit vector parallel to it. We denote by $z = Z_f(s)$ the equation of the bottom and $I = -Z'_f(s) = \sin \gamma$ its “slope” (by misnomer).

On suppose que la section du canal est rectangulaire et on note L sa largeur. On définit le “périmètre mouillé” comme étant la longueur de fluide en contact avec la paroi pour une section donnée, qui vaut ici $P = L + 2h$. L'aire de la section est $A = Lh$. Le “rayon hydraulique” R_H est défini par la relation $R_H = A/P = Lh/(L + 2h)$. On suppose que $h \ll L$ ce qui implique $R_H \sim h$.

We assume that the section of the channel is rectangular and we denote by L its width. We defined the “wet perimeter” as the length of fluid in contact with the wall in a given section, which reads here $P = L + 2h$. The area of the section is $A = Lh$. The “hydraulic radius” R_H is defined by the relation $R_H = A/P = Lh/(L + 2h)$. We suppose $h \ll L$ which implies $R_H \sim h$.

Nous cherchons maintenant une solution stationnaire sous la forme $\underline{U} = u(r)\underline{e}_s$ où \underline{e}_s est dans la direction de la pente et r est la coordonnée normale au fond. Par symétrie, on peut supposer que $\frac{\partial p}{\partial s}(r, s) = 0$. En projetant les équations de Navier-Stokes incompressibles sur les axes \underline{e}_s et \underline{e}_z (ils ne sont pas orthogonaux), on obtient

We now look at a stationary solution of the form $\underline{U} = u(r)\underline{e}_s$ where \underline{e}_s is in the direction of the slope and r is the coordinate normal to the bottom. By symmetry, one can assume that $\frac{\partial p}{\partial s}(r, s) = 0$. By projecting the incompressible Navier-Stokes equation on the axes \underline{e}_s and \underline{e}_z (they are not orthogonal), one obtains

$$0 = gI + \nu \frac{d^2 u}{dr^2}(r) \quad , \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}(x, z) - g \quad , \quad (1.51)$$

la vitesse $u(r)$ étant indépendante de s pour un r fixé. La condition aux limites rigide au fond est $u(0) = 0$. Le tenseur des taux de déformation $\underline{d} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$ est utilisé pour exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\rho\nu \underline{d}$.

the velocity $u(r)$ being independent of s for a fixed r . The no-slip boundary condition at the bottom reads $u(0) = 0$. The deformation rate tensor $\underline{d} = \frac{1}{2} \frac{du}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$ is used to express the stress tensor $\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\rho\nu \underline{d}$.

La continuité de la contrainte à travers la surface libre est $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -p_a \underline{e}_r$ où p_a est la pression atmosphérique. Ceci conduit à $p(x, z) = p_a$ pour $r = h$ et $\frac{du}{dr}(h) = 0$. À partir de ce résultat et du changement de variable $[x, z] = [s \cos \gamma + r \sin \gamma, Z_f(s) + r \cos \gamma]$ avec $Z_f(s) = -s \sin \gamma$, on déduit que

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_a}{\rho g} + h \cos \gamma + Z_f(s) \quad , \quad u = \frac{gI}{\nu} \left(hr - r^2/2 \right) . \quad (1.52)$$

Le débit Q et la vitesse moyennée sur la verticale U sont alors

$$Q = \frac{gI h^3 L}{3\nu} \quad , \quad U = \frac{Q}{A} = \frac{gI h^2}{3\nu} . \quad (1.53)$$

La “charge hydraulique”, définie par $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$, est alors

$$H(s, r) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h \cos \gamma + \frac{u^2(r)}{2g} . \quad (1.54)$$

La perte de charge linéique J due aux frottements visqueux sur le fond est définie par $J = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{g} \left(-\nu \frac{d^2 u}{dr^2} \right) dr$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -J \quad \Longrightarrow \quad I = J . \quad (1.55)$$

Cette relation traduit l'équilibre en le forçage dû à la gravité et le frottement.

The continuity of the stress through the free surface reads $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -p_a \underline{e}_r$ where p_a is the atmospheric pressure. This leads to $p(x, z) = p_a$ for $r = h$ and $\frac{du}{dr}(h) = 0$. From this result and the relation and the change of variable $[x, z] = [s \cos \gamma + r \sin \gamma, Z_f(s) + r \cos \gamma]$ with $Z_f(s) = -s \sin \gamma$, one deduces that

The discharge flux Q and the vertically averaged velocity U are then

The “hydraulic head”, defined by, $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}$, is thus

The lineic head loss J due to the viscous friction on the bottom is defined by $J = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{g} \left(-\nu \frac{d^2 u}{dr^2} \right) dr$ which allows to write

This relation traduces the equilibrium between the forcing due to the gravity and the friction.

La perte de charge linéique obéit à la relation de Darcy-Weissbach

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} , \quad (1.56)$$

où λ est le coefficient de frottement et D_H le diamètre hydraulique est défini par $D_H = 4R_H = 4h$. En utilisant l'expression (1.53), on a ici

$$\lambda = \frac{96}{Re} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} , \quad (1.57)$$

où Re est le nombre de Reynolds.

The lineic head loss obeys the Darcy-Weissbach relation

where λ is the friction coefficient and D_H the hydraulic diameter is defined by $D_H = 4R_H = 4h$. Using the analytic expression (1.53), one has here

where Re is the Reynolds number.

Le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\rho\nu \underline{\underline{d}}$, où $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \frac{d\underline{\underline{u}}}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$ est le tenseur des taux de déformation, permet la définition de la contrainte tangentielle $\tau(r) = \underline{e}_s \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r$. En notant τ_* la valeur absolue de la contrainte de cisaillement exercée par le fluide sur le fond, on peut écrire

The stress tensor $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\rho\nu \underline{\underline{d}}$, where $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \frac{d\underline{\underline{u}}}{dr} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_s + \underline{e}_s \otimes \underline{e}_r)$ is the deformation rate tensor, allows the definition of the tangential stress $\tau(r) = \underline{e}_s \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r$. Denoting by τ_* the absolute value of the shear stress applied by the fluid on the bottom, one can then write

$$\tau_* = \rho g R_H J. \tag{1.58}$$

Pour une pente I de 3%, une masse volumique $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ et une viscosité moléculaire ν de l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, on trouve que U est de l'ordre de 10 cm/s pour une hauteur de l'ordre 1 mm et que U est de l'ordre de 10^5 m/s pour une hauteur h de 1m. Le premier résultat, qui correspond à un nombre de Reynolds $Re \sim 400$ semble réaliste, alors que le second, correspondant à un nombre de Reynolds de $Re \sim 4 \cdot 10^{11}$ n'est pas correct. Ceci est dû au fait que la solution "laminaire" que nous avons calculée n'est plus pertinente pour décrire l'écoulement quand il devient turbulent au-delà d'un nombre de Reynolds critique.

For a slope I of 3%, a mass density $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ and a molecular viscosity ν of the order of $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, one finds that U is of the order of 10 cm/s for a height of the order of 1 mm and that U is of the order of 10^5 m/s for a height h of 1m. The first result, which corresponds to a Reynolds number $Re \sim 400$ seems realistic, while the second, corresponding to a Reynolds number of $Re \sim 4 \cdot 10^{11}$ is not correct. This is due to the fact that the "laminar" solution that we have computed is no longer pertinent to describe the flow when it becomes turbulent beyond a critical Reynolds number.

Une modélisation de la turbulence est donc nécessaire pour décrire les écoulements à grand Reynolds.

A modelling of turbulence is thus necessary to describe the high Reynolds numbers flows.

FORMULAIRE

FORMULAS

Cinématique

Kinematics

Différentielle de la déformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$:

Differential of the deformation $\underline{X}(\underline{a}, t)$:

$$\delta \underline{x}(t) = \underline{F}(\underline{a}, t) \cdot \delta \underline{a} + \mathcal{O}(\|\delta \underline{a}\|^2) \quad , \quad F_{ij}(\underline{a}, t) = \frac{\partial X_i}{\partial a_j}(\underline{a}, t).$$

Transport de volumes :

Volume transport :

$$\delta \mathcal{V}(t) = \delta \mathcal{V}(0) J(\underline{a}, t) \quad , \quad J(\underline{a}, t) = \det \underline{F}(\underline{a}, t) > 0.$$

Représentation eulérienne et lagrangienne :

Eulerian and Lagrangian representations :

$$B(\underline{x}, t) = B^{(L)}(\underline{a}, t) \quad , \quad \underline{x} = \underline{X}(\underline{a}, t) \iff \underline{a} = \underline{A}(\underline{x}, t).$$

Loi de conservation de la masse : | Mass conservation law :

$$\rho^{(L)}(\underline{a}, t) J(\underline{a}, t) = \rho_0 .$$

Dérivée particulaire : | Particular derivative :

$$\frac{dB}{dt}(\underline{x}, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{U}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\text{grad}} B(\underline{x}, t) .$$

Gradient du champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$: | Gradient of the velocity field $\underline{U}(\underline{x}, t)$:

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t)] = \underline{K}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}(t) \quad , \quad K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} .$$

Tenseur des taux de déformations : | strain tensor :

$$\frac{d}{dt} [\underline{\delta x}(t) \cdot \underline{\delta x}'(t)] = 2 \underline{\delta x}(t) \cdot \underline{d}[\underline{x}(t), t] \cdot \underline{\delta x}'(t) \quad , \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) .$$

Transport des volumes par une trajectoire $\underline{x}(t)$: | Volumes transport by a trajectory $\underline{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathcal{V}(t) = \delta \mathcal{V}(t) \text{div } \underline{U}[\underline{x}(t), t] .$$

Lois de conservation

Conservation laws

Loi de conservation pour la grandeur c : | Conservation law for the quantity c :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} c(\underline{x}, t) d^3x + \iint_{\partial \mathcal{D}(t)} \underline{Q}_c(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} dS = \iiint_{\mathcal{D}(t)} f_c(\underline{x}, t) d^3x .$$

Loi de conservation de la masse : | Mass conservation law :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0 .$$

Tenseur des contraintes : | Stress tensor :

$$\underline{T}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} .$$

Conservation de la quantité de mouvement : | Momentum conservation :

$$\rho \frac{d\underline{U}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} \right) = \rho \underline{F} + \text{div } \underline{\underline{\sigma}} .$$

Fluides newtoniens

Newtonian fluids

Fluides newtoniens incompressibles : | Incompressible Newtonian fluids :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2 \mu \underline{d}.$$

Équations de Navier-Stokes incompressibles : | Incompressible Navier-Stokes equations :

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \underline{F} + \nu \Delta \underline{U}.$$

Charge hydraulique : | Hydraulic head :

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{U^2}{2g}.$$

Poiseuille circulaire en charge

Circular Poiseuille flow in a pipe

Charge hydraulique : | Hydraulic head :

$$H(x, r) = \frac{p_r - Gx}{\rho g} + \frac{u^2(r)}{2g}.$$

Équilibre forçage-frottement : | Forcing-friction equilibrium :

$$\frac{dH}{dx} = -J \quad \implies \quad \frac{G}{\rho g} = J.$$

Équation de Darcy-Weissbach : | Darcy-Weissbach equation :

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} \quad , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad \implies \quad \lambda = \frac{64}{Re}.$$

Loi de Darcy : | Darcy law :

$$U = -K_p \frac{dH}{dx} \quad \implies \quad K_p = \frac{gD^2}{32\nu}.$$

Poiseuille plan à surface libre

Open plane Poiseuille

Charge hydraulique : | Hydraulic head :

$$H(s, r) = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f(s) + h \cos \gamma + \frac{u^2(r)}{2g}.$$

Équilibre forçage-frottement : | Forcing-friction equilibrium :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -J \quad \Longrightarrow \quad I = J .$$

Équation de Darcy-Weissbach : | Darcy-Weissbach equation :

$$J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} , \quad Re = \frac{U D_H}{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{96}{Re} .$$

Contrainte de cisaillement au fond : | Bottom shear stress :

$$D_H = 4 R_H = 4 h \quad \Longrightarrow \quad \tau_* = \rho g R_H J .$$

EXERCICES

EXERCISES

EXERCICE 1.1 Charge hydraulique

- 1) On considère un champ de vitesse $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ et son gradient $\underline{K} = \text{grad } \underline{U}$ de composantes $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Montrer, en explicitant leurs composantes, que $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U}$ et $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U}$. En déduire que $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$.

Les composantes $i = 1, 2, 3$ sont $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ pour $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}$, $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$ et $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2$. On a donc $\underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U} + (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U} = \frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}$.

- 2) On considère l'écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide newtonien de masse volumique ρ constante en présence d'un champ de gravité $\underline{F} = -g \underline{e}_z$. Montrer que les équations de Navier-Stokes entraînent la relation $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$ où $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$ est la "charge hydraulique" et $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \text{div } \underline{\tau}$ est le "vecteur perte de charge linéique", $\underline{\tau}$ étant le tenseur des contraintes visqueuses.

Comme $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = 0$, que $\underline{e}_z = \text{grad } (z)$ et que $\text{div } \underline{\sigma} = -\text{grad } p + \text{div } \underline{\tau}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement $\rho \frac{d}{dt} \underline{U} = \rho \underline{F} + \text{div } \underline{\sigma}$ s'écrit $\frac{1}{2} \text{grad } \underline{U}^2 + \text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \text{grad } (z) + \frac{1}{\rho} \text{div } \underline{\tau}$. Comme $(\text{rot } \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot \underline{U} = 0$, on en déduit $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$.

EXERCICE 1.2 Poiseuille plan en charge

On considère un fluide newtonien compris entre deux plaques rigides situées en $z = 0$ et $z = 2h$. On suppose que l'écoulement est tel qu'il peut être considéré comme incompressible et on note ρ la masse volumique. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que la vitesse est de la forme $\underline{U} = u(z) \underline{e}_x$ et qu'il est forcé par un gradient de pression horizontal constant $G = -\frac{\partial p}{\partial x}$, en présence du champ de gravité $\underline{g} = -g \underline{e}_z$.

- 1) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses formulées. On suppose que $p(0, 0) = p_r$. En déduire l'expression du champ de pression p . Montrer que l'on a

$\frac{\partial H}{\partial x} = -J$ où J est la “perte de charge linéique due aux frottements” définie par $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$.
 Montrer que J est constant et donner son expression en fonction de l’intensité G du forçage.

L’équation de conservation de la masse $\text{div } \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ est trivialement vérifiée. L’équation de quantité de mouvement conduit à $0 = G/\rho + \nu u''(z)$, $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. On en déduit $p(x, z) = p_r - Gx - \rho g z$. Comme $\underline{U} = u \underline{e}_x$ et $\underline{U} \cdot \text{grad } H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$, on a $\frac{\partial H}{\partial x} = \text{grad } H \cdot \underline{e}_x = -\underline{J} \cdot \underline{e}_x = -J$. On en déduit $J = G/(\rho g)$.

2) Calculer et tracer le profil de vitesse $u(z)$. Exprimer \underline{d} et $\underline{\sigma}$. Calculer et tracer le profil $\tau(z) = \underline{e}_x \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{e}_z$ où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. On note $\tau_* = \tau(0)$. Exprimer, en fonction de τ_* , les contraintes tangentielles τ_0 et τ_{2h} exercées par le fluide sur les parois.

Le profil $u(z) = \frac{G}{2\rho\nu}(2h - z)z$ est une parabole. On a $\underline{d} = \frac{1}{2}u'(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ et $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho\nu \underline{d} = -p \underline{I} + \tau(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ avec $\tau(z) = \rho\nu u'(z) = G(h - z)$. On a $\tau_* = Gh$ et $\tau(0) = \tau(2h) = \tau_*$. Le profil de $\tau(z)$ est une droite.

3) On considère le domaine $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq 2h\}$ où l et L sont des constantes. Calculer la résultante des forces de contact exercées par l’extérieur de \mathcal{D} sur les faces de normales \underline{e}_x et $-\underline{e}_x$. Calculer la résultante des forces de contact exercées par les parois sur le fluide. Calculer la résultante de toutes les forces de contact exercées par l’extérieur du parallélépipède sur sa frontière $\partial\mathcal{D}$. Commenter en remarquant que les équations de Navier-Stokes s’écrivent ici $\underline{0} = -\rho g \underline{e}_z + \text{div } \underline{\sigma}$. Calculer et interpréter la grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$. On définit le rayon hydraulique R_H comme étant le rapport entre l’aire $2hL$ de la face de \mathcal{D} transverse à l’écoulement et le périmètre de cette section en contact avec les parois. Montrer que $\tau_* = \rho g R_H J$.

Les forces de contact sur les faces de normales \underline{e}_x et $-\underline{e}_x$ sont respectivement $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z) \underline{e}_x + \tau(z) \underline{e}_z$ et $\underline{T}(0, y, z, \underline{e}_x) = p(0, z) \underline{e}_x - \tau(z) \underline{e}_z$. Leur résultante est $[p(0, z) - p(l, z)] (2hL) \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_x$. Les forces de contact sur les faces de normales \underline{e}_z et $-\underline{e}_z$ sont respectivement $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h) \underline{e}_z + \tau(2h) \underline{e}_x$ et $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0) \underline{e}_z - \tau(0) \underline{e}_x$. Leur résultante est le vecteur $[p(x, 0) - p(x, 2h)] lL \underline{e}_z - [\tau(0) - \tau(2h)] lL \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_z - 2hlLG \underline{e}_x$. Comme $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z) \underline{e}_y$ et $\underline{T}(x, L, z, -\underline{e}_y) = p(x, z) \underline{e}_y$, la résultante de toutes les forces de contact exercées sur $\partial\mathcal{D}$ est $\rho g (2hlL) \underline{e}_z$. C’est l’opposé du poids du fluide contenu dans \mathcal{D} , supporté par la paroi. En intégrant $\underline{0} = \rho g \underline{e}_z + \text{div } \underline{\sigma}$ sur \mathcal{D} , on retrouve bien l’équilibre $\underline{0} = \int_{\mathcal{D}} \rho g \underline{e}_z d^3x + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS$ entre le poids et les forces de contact sur $\partial\mathcal{D}$. La grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = -2\tau_* lL \underline{e}_x = -2(Gh)lL \underline{e}_x$ est égale à $\int_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{\tau} d^3x = -(\rho g J) (2hlL) \underline{e}_x$ en appliquant le théorème de la divergence. C’est la résultante des forces tangentielles exercées par le paroi sur \mathcal{D} . Elle s’oppose au gradient de pression. On a $R_H = 2hL/(2L) = h$ et $\tau_* = \rho g R_H J$.

4) Calculer la vitesse moyenne $U = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u(z) dz$. On note $D_H = 4h$. Montrer que l’on peut

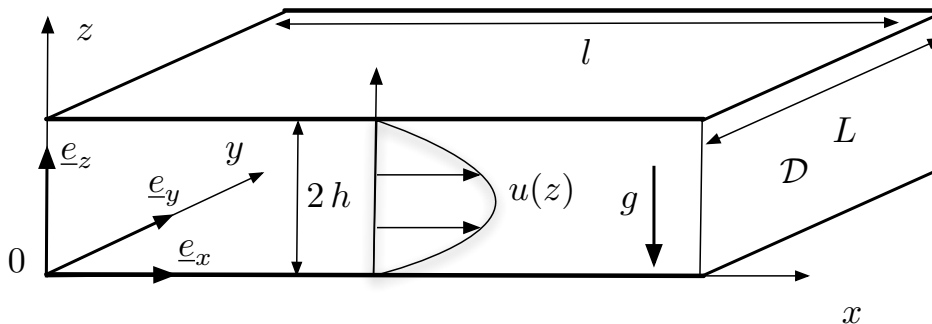


FIG. 1.15 – Écoulement de Poiseuille plan en charge.

écrire la “loi de Darcy” $U = -K_p \frac{dH}{dx}$ où K_p est une constante que l’on exprimera en fonction de D_H , ν et g . On définit le coefficient de frottement λ par la relation $J = \lambda \frac{U^2}{2g D_H}$. Exprimer λ en fonction du “nombre de Reynolds” $Re = U D_H / \nu$. Calculer U et Re pour une perte de charge de 2 Bars sur 100 m d’un écoulement d’eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) dans les cas $h = .5 \text{ mm}$ puis $h = 5 \text{ mm}$. Commenter.

On a $U = G h^2 / (3 \rho \nu)$. On a $K_p = D_H^2 g / (48 \nu)$. On a $\lambda = 96 / Re$. On a $U = 16 \text{ cm/s}$ et $Re \sim 300$ pour $h = .5 \text{ mm}$, $U = 16 \text{ m/s}$ et $Re \sim 3 \cdot 10^5$ pour $h = 5 \text{ mm}$. La solution laminaire est réaliste dans le premier cas. Dans le second cas, elle ne l’est pas car l’écoulement devient turbulent.