

PC9 : Modèles en couches pour l'océan

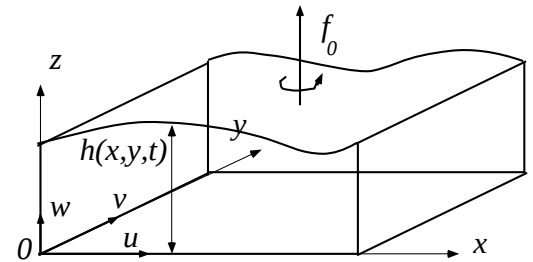
Cette PC a pour but de se familiariser avec les modèles en couches et leur pertinence pour décrire la dynamique océanique. Une autre justification, non abordée ici, repose sur la décompositions en modes verticaux.

PC9.1 Équations sur un f_0 plan

- 1) Écrire les équations du mouvement dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de l'approximation hydrostatique sur un f_0 -plan, c'est-à-dire en supposant que f_0 est constant dans un repère cartésien.

Les équations du mouvement sur un f_0 -plan s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial x} + f_0 v + F_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial y} - f_0 u + F_v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_r \gamma s \quad \text{et} \quad \frac{Ds}{Dt} = \frac{F_e}{T} \end{aligned}$$



- 2) On note $P = p_r(z) + p$ la pression totale et $\rho = \rho_r - \frac{\rho_r \gamma}{g} s$ la masse volumique. Vérifier la pertinence de ces notations et reformuler les équations avec ces nouvelles variables.

Par définition de γ la masse volumique ρ s'exprime bien ainsi en fonction de l'entropie s . Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x} + f_0 v + F_u, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial y} - f_0 u + F_v, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{et} \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho_r \gamma}{g} \frac{F_e}{T}$$

- 3) On s'intéresse au mouvement d'un domaine océanique à surface libre d'équation $z = h(x, y, t)$, l'origine de l'axe z étant prise au fond supposé plat. Écrire les conditions aux limites en utilisant les grandeurs P et ρ . On négligera la variation de la pression atmosphérique P_a avec l'altitude.

Les conditions aux limites au fond $z = 0$ sont $w(x, y, 0) = 0$. Les conditions aux limites à la surface $z = h(x, y, t)$ sont $\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = w$ et $P = P_a$ où P_a est la pression atmosphérique.

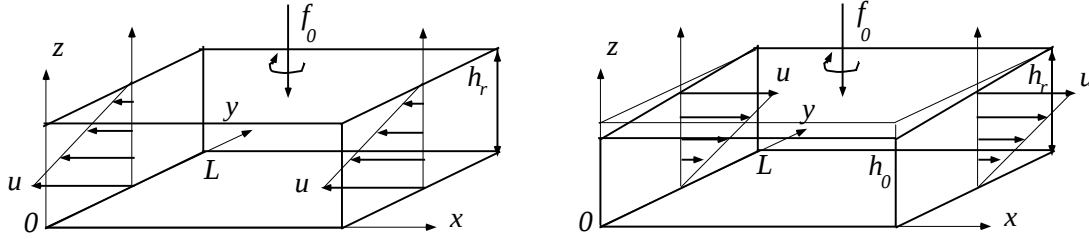
PC9.2 Océan circumpolaire et surface libre

- 4) On considère un modèle simplifié de l'océan circumpolaire où le mouvement est forcé par l'existence d'une densité $\rho(y)$ entre $y = 0$ (70° S) et $y = L$ (50° S) dont le gradient pointe vers le sud. Le modèle est basé sur les équations du f_0 -plan avec $f_0 < 0$. On suppose que F_u , F_v et F_e sont nuls, que l'écoulement est zonal ($v = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} = 0$). Montrer que la solution stationnaire vérifie l'équilibre géostrophique. Exprimer tous les champs en supposant connue la forme $h(y)$ de la surface libre.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $v = 0$, on a $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. À l'équilibre, la condition aux limites cinématique supérieure $\frac{Dh}{Dt} = w$ entraîne $w = 0$ à la surface puisque $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ et $v = 0$. On en déduit que $w = 0$ dans tout le domaine. L'équilibre hydrostatique $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(y) g$ s'intègre en $P(y, z) = P_a - \rho(y) g [z - h(y)]$ en tenant compte des conditions aux limites pour la pression. L'équation de bilan $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et la conservation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe Ox sont trivialement satisfaites. La projection sur l'axe Oy exprime l'équilibre géostrophique $u = -\frac{1}{f_0 \rho_r} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-g}{f_0 \rho_r} \left\{ \frac{d}{dy} [\rho(y) h(y)] - \frac{d\rho}{dy}(y) z \right\}$.

- 5) On suppose tout d'abord que $h(y) = h_r$ est constant et que $\rho(y) = \rho_r + \Delta\rho \frac{L-y}{L}$. Donner l'expression du profil de vitesse $u(z)$ et montrer que la circulation est d'est en ouest. Calculer la valeur de la vitesse au fond en supposant que $\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = 5 \cdot 10^{-4}$, $L = 2000$ km, $h_r = 4000$ m et $f_0 = -1.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Ce modèle est-il réaliste ?

Dans le cas où la surface libre est plate, le profil de vitesse est $u = \frac{g}{f_0 \rho_r} \frac{\Delta\rho}{L} (h_r - z)$. Comme $f_0 < 0$, on a $u \leq 0$. La circulation est d'est en ouest. Le courant est nul à la surface et égale à -0.1 m/s au fond. Ce modèle n'est pas réaliste dans la mesure où le frottement au fond devrait freiner le courant.



- 6) On suppose la même expression pour $\rho(y)$ mais on impose $u = 0$ au fond en $z = 0$ pour prendre en compte les frottements. En déduire la forme $h(y)$ de la surface libre, en notant $h(L) = h_r$. Montrer que la circulation est d'ouest en est. Calculer la vitesse maximale ainsi que la différence maximale de niveau de la surface libre. Calculer le gradient horizontal de pression au fond de l'océan. On fera l'hypothèse $\Delta\rho/\rho_r \ll 1$ confirmée par les observations.

Si $u = 0$ est nul au fond, on peut écrire $\frac{d}{dy} [\rho(y) h(y)] = 0$. On en déduit $h(y) = \frac{\rho_r h_r}{\rho(y)} = \frac{h_r}{1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \frac{L-y}{L}} \sim h_r \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \frac{L-y}{L} \right)$. La vitesse maximale se rencontre maintenant à la surface et vaut $0,1$ m/s. La circulation va de l'ouest vers l'est. La surface libre est plus basse de $\Delta h = h_r \frac{\Delta\rho}{\rho_r} = 2$ m au sud qu'au nord. Le gradient horizontale de pression au fond de l'océan est nul. Cette circulation est cohérente avec la réalité.

PC9.3 Océan équatorial à deux couches

- 7) On considère un modèle de la couche océanique équatoriale pour lequel $f_0 = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ et $v = 0$. Écrire les équations et conditions aux limites en utilisant les notations P et ρ pour la pression et la masse volumique. On supposera que $F_e = 0$.

Les équations du modèle sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x} + F_u, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{et} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Les conditions aux limites sont $w = 0$ en $z = 0$ pour le fond et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ et $P = P_a$ en $z = h(x, y, t)$ pour la surface libre.

- 8) On suppose que l'écoulement vérifie $\rho = \rho_2$ et $u = u_2$ pour $z \in [0, h_2]$ et $\rho = \rho_1$ et $u = u_1$ pour $z \in [h_2, h_2 + h_1]$ où $\rho_1 < \rho_2$ sont des constantes, $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ sont indépendants de z et

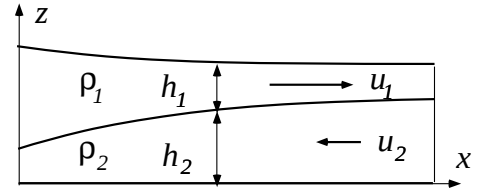
$h_1(x, t)$ et $h_2(x, t)$ sont les épaisseurs respectives des deux couches. Donner l'expression du champ de pression. Montrer que cet écoulement pourrait être solution des équations si F_u prend deux valeurs F_{u1} et F_{u2} indépendantes de z dans chacune des couches. Montrer que l'on est alors en présence de deux modèles de Saint-Venant couplés et écrire le système d'équations correspondant.

La condition aux limites $P = P_a$ à la surface et la continuité de la pression à l'interface des deux couches entraînent que $P_1(x, z, t) = P_a - \rho_1 g[z - h_2(x, t) - h_1(x, t)]$ pour $z \in [h_2, h_2 + h_1]$ et $P_2(x, z, t) = P_a + \rho_1 g h_1(x, t) - \rho_2 g[z - h_2(x, t)]$ pour $z \in [0, h_2]$. On peut alors remplacer ces expressions dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. La condition aux limites cinématique à la surface s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}(h_2 + h_1) = w \text{ pour } z = h_2 + h_1.$$

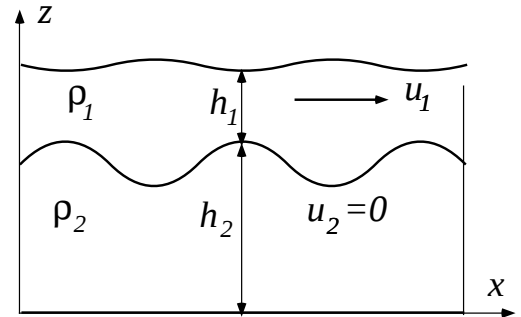
Comme il n'y a pas de transfert de masse entre les deux couches, on peut écrire $\frac{Dh_2}{Dt} = w$ pour $z = h_2$. On intègre alors l'équation de continuité sur chacune des couches et on applique les conditions aux limites cinématiques au fond, à l'interface ou sur la surface libre. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 h_1) &= 0 & \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_2 h_2) &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{\rho_1}{\rho_r} g \frac{\partial}{\partial x}(h_2 + h_1) + F_{u1} & \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{\rho_2}{\rho_r} g \frac{\partial}{\partial x}\left(h_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1\right) + F_{u2} \end{aligned} \quad (1)$$



- 9) On suppose que u_2 est petit devant u_1 et que $F_{u2} = 0$. Justifier cette hypothèse dans le cas où l'interface entre les deux couches est la thermocline équatoriale. Dédire de cette hypothèse une relation entre les pentes des fonctions h_1 et h_2 . On note $\tilde{g} = g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$ la "gravité réduite". Exprimer le rapport entre la pente de la surface libre d'élévation $h = h_1 + h_2$ et la pente de l'interface d'élévation h_2 en fonction de g et $\tilde{g}$. Estimer la valeur de ce rapport pour un écart de température de 10°C entre les deux couches. À partir de la Figure 1, estimer la différence de niveau de la mer à l'équateur entre l'est et l'ouest du Pacifique

Dans le cas d'un océan équatorial, l'épaisseur de la couche supérieure est de l'ordre de la centaine de mètres pour une profondeur totale de l'ordre de 4000 m. Le mouvement moyen de la couche inférieure est très petit devant l'intensité des courants de surface. On peut donc considérer que u_2 est négligeable. Le flux de quantité de mouvement à travers la thermocline est faible et F_{u2} ne représente donc que les frottements. Ceux-ci sont donc nuls puisque $u_2 \sim 0$. On en déduit donc que le gradient horizontal de pression dans la couche inférieure est nul, ce qui entraîne $\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) = 0$. On en déduit que $\frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x}$ et l'expression suivante pour le rapport des pentes : $\frac{\partial h}{\partial x} / \frac{\partial h_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) / \frac{\partial h_1}{\partial x} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = \tilde{g}/g$. Une différence $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ en température se



traduit par une différence de masse volumique $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 = \alpha \Delta T = 1.7 \cdot 10^{-3}$. On en déduit que $\tilde{g} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ et $\frac{\partial h}{\partial x} / \frac{\partial h_1}{\partial x} = 1.7 \cdot 10^{-3}$. La lecture de la figure 1 montre que l'identification de deux couches séparées par la thermocline est raisonnable et que l'écart de température est bien d'environ 10°C . À l'ouest du bassin, un enfoncement de la thermocline de $\Delta h_1 = -200 \text{ m}$ correspond à une élévation de $\Delta h = \frac{\tilde{g}}{g} \Delta h_1 \sim 0.34 \text{ m}$.

- 10) En supposant toujours que le gradient horizontal de pression sous la thermocline est nul, écrire les équations d'évolution de la couche supérieure après avoir éliminé h_2 . On suppose que $h_1 = h_{r1}$ lorsque $u_1 = 0$ avec $F_{u1} = 0$. Calculer la vitesse des ondes autour de cet état de base en supposant que $\frac{\rho_1 - \rho_r}{\rho_r} \ll 1$. Donner la valeur de cette vitesse en supposant que $h_{1r} = 100 \text{ m}$.

En utilisant la relation $\frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x}$ les équations d'évolution de la couche 1 s'écrivent alors

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 h_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_r} \tilde{g} \frac{\partial h_1}{\partial x} + F_{u1}.$$

Comme $\frac{|\rho_1 - \rho_r|}{\rho_r} \ll 1$, on peut remplacer $\frac{\rho_1}{\rho_r}$ par 1 dans les équations. La vitesse de propagation des ondes du mode barocline (couche inférieure quasi-immobile) est alors $c = \sqrt{\tilde{g} h_{r1}}$. On en déduit que $c \sim 1,3$ m/s.

- 11) On suppose maintenant que $F_{u1} = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}$ avec $\tau_x = -\tau_s \frac{z-h_2}{h_1}$. Calculer la solution stationnaire forcée par la tension de vent τ_s dirigée vers l'ouest. À partir de la lecture de la Figure 1, estimer la valeur de la tension de vents des alizés.

Les équations de l'équilibre conduisent à $\tilde{g} \frac{\partial h_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_r} \tau_s / h_1$. On en déduit $\tau_s = -\rho_r \tilde{g} h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}$. En estimant que la thermocline s'enfonce d'environ $\Delta h_1 = 200$ m sur la largeur du Pacifique d'environ $L = 13\,000$ km et que sa profondeur moyenne est environ $h_{r1} = 100$ m, on obtient la valeur $\tau_s = \rho_r \tilde{g} h_{r1} \frac{\Delta h_1}{L}$. En prenant $\rho_r \sim 1\,000$ kg/m³, on obtient $\tau \sim 0.03$ Pa.

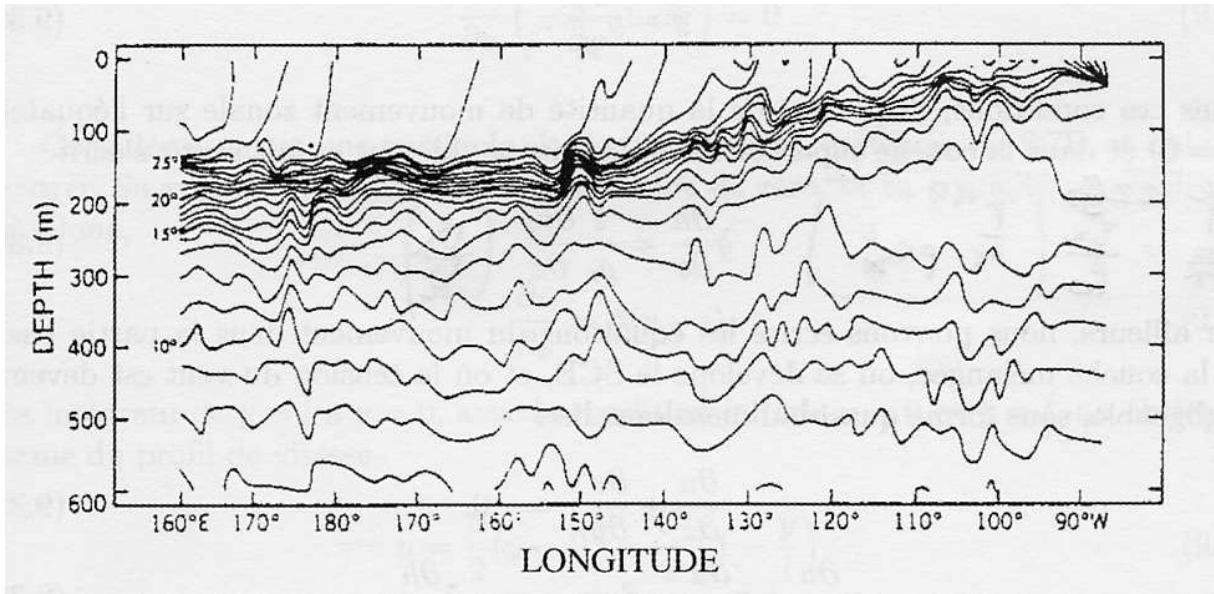


Figure 1: Coupe longitudinale de la thermocline sur l'équateur (Pacifique). Isothermes (intervalle 1°).

- 12) On généralise maintenant ce modèle 1D à deux couches au cas 2D du β -plan équatorial. Calculer le temps que met une onde de Kelvin pour traverser le Pacifique. Comparer avec les observations du satellite TOPEX/POSEIDON.

Une onde de Kelvin barocline, se propage à la vitesse $c = \sqrt{\tilde{g} h_r}$, toujours d'ouest en est. Cette vitesse est donc $c \sim 1.3$ m/s comme calculé précédemment pour les ondes barocline 1D. En prenant $L = 13\,000$ km, le temps nécessaire pour traverser le Pacifique est $T \sim 4$ mois. Ce résultat est en accord avec les observations satellitaires.