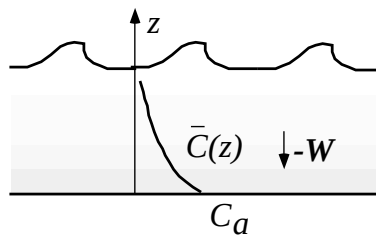


PC7 : Couches limites turbulentes

Cette PC illustre le paragraphe intitulé “Conditions aux limites” à travers l'exemple de la mise en suspension de sédiments par un écoulement turbulent. On aurait pu, de manière semblable, prendre l'exemple d'un polluant émis dans la couche limite atmosphérique.

PC7.1 Équilibre sédimentation / diffusion turbulente

On cherche à calculer la concentration de fines particules mises en suspension par un écoulement turbulent incompressible et animées d'une vitesse de chute supposée constante. On s'intéresse, par exemple, au profil vertical de concentration $\bar{C}(z)$ (en kg/m^3) du sable mis en suspension par la turbulence générée par le courant ou le déferlement des vagues sur une plage.



- 1) On considère un champ de vitesse solénoïdal $\underline{U}(x, y, z, t)$ de composantes (u, v, w) . On note $C(x, y, z, t)$ la concentration du constituant transporté par le mouvement et animé d'une vitesse de chute constante W . Écrire l'équation de bilan intégrale de la masse de constituant contenu dans un domaine fixe Ω . En déduire l'équation de bilan local de la concentration. Dans tout ce qui suit, on néglige l'effet de la viscosité moléculaire.

Étant donné un domaine Ω immobile, le flux sortant de concentration à travers un élément de surface de la frontière $\partial\Omega$ et de normale $\underline{n}$ est égale à $(C \underline{U} - C W \underline{e}_z) \cdot \underline{n}$. On peut donc écrire $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} C \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} C (\underline{U} - W \underline{e}_z) \cdot \underline{n} \, da = 0$. On en déduit que $\frac{DC}{Dt} - W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + (w - W) \frac{\partial C}{\partial z} = 0$.

- 2) On suppose que le champ de vitesse est turbulent et on note $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$. On note alors $C = \bar{C} + C'$ la concentration. Écrire les équations de Reynolds décrivant l'évolution du champ de concentration moyenne $\bar{C}(x, y, z, t)$.

En appliquant l'opérateur de moyenne $\bar{(\)}$ à l'équation de bilan de concentration, on obtient

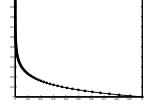
$$\frac{D\bar{C}}{Dt} + \frac{\partial \overline{u'C'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'C'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}.$$

- 3) On suppose que la turbulence est stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, homogène dans les directions horizontales ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$) et que la vitesse verticale moyenne est nulle ($\bar{w} = 0$). On n'exclut pas le cas où les vitesses horizontales moyennes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont non nulles. Écrire l'équilibre vérifié par la concentration moyenne $\bar{C}(z)$ que l'on suppose indépendante des directions horizontales. On suppose que le flux de sédiment à la surface est nul (pas d'apport par le vent). En déduire la relation entre $\bar{C}$ et le flux turbulent $\overline{w'C'}$.

L'équation de bilan local devient $\frac{\partial \overline{w'C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$. On l'intègre en $\overline{w'C'} = W \overline{C} + cste$. La constante d'intégration est nulle dans la mesure où le flux à travers la surface est nul. On est donc en présence de l'équilibre $\overline{w'C'} = W \overline{C}$ qui indique que le flux turbulent compense exactement le flux dû à la chute constante des particules.

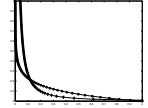
- 4) On choisit de paramétriser le flux turbulent par la relation empirique $\overline{w'C'} = -K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ où K est constant. Calculer le profil $\overline{C}(z)$ en supposant que la concentration au sol en $z = 0$ est égale à C_a . Montrer que flux turbulent au sol ne dépend pas de la valeur du coefficient K .

L'équilibre s'écrit $-K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = W \overline{C}$ et s'intègre en $\overline{C}(z) = C_a e^{-\frac{W}{K} z}$. Le flux turbulent au sol est donc égal à $W C_a$. C'est le flux qui permet de compenser la chute des particules.

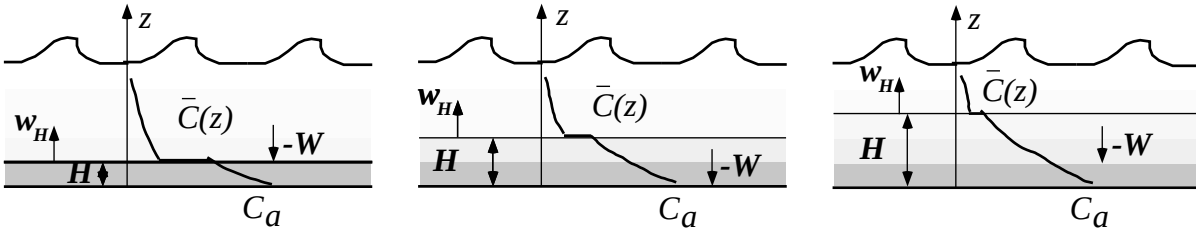


- 5) On choisit une nouvelle paramétrisation de K sous la forme $K = k u_* z$, où k est une constante sans dimension (constante de Karman) et u_* une vitesse constante qui traduit l'intensité du cisaillement de vitesse turbulent au sol (vitesse de frottement). Calculer le profil $\overline{C}(z)$ en supposant que la concentration en $z = z_0$ est égale à C_a , où z_0 traduit la rugosité du sol (longueur de rugosité). Donner l'expression du flux turbulent en $z = z_0$.

L'équilibre s'écrit $-k u_* z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = W \overline{C}$ et s'intègre en $\overline{C}(z) = C_a \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{W}{k u_*}}$. Le flux turbulent en $z = z_0$ est égal à $W C_a$.



PC7.2 Entraînement et propagation d'un front



On suppose maintenant que le niveau de turbulence dans la région située entre les altitudes $z = 0$ et $z = H(t)$ n'est pas le même que dans la région située entre $z = H(t)$ et la surface libre. En effet, la région du bas (région 1) est contrôlée par la turbulence due au cisaillement de vitesse sur le fond, tandis que la région du haut (région 2) est contrôlée par la turbulence générée par les vagues et leur déferlement. Cette discontinuité dans le niveau de turbulence est susceptible de se traduire par des discontinuités dans le profil de concentration $\overline{C}(z)$ ou de son flux. On suppose connue la variation de $H(t)$ en fonction du temps, et donc la vitesse $W_H(t) = H'(t)$ du front. On s'intéresse alors au profil de concentration $\overline{C}(z, t)$ dans les deux couches, au flux vertical net de sédiment extrait du sol que l'on note $G(t)$ et à la concentration au fond que l'on note $C_a(t)$. Comme précédemment, on suppose que le flux de sédiment à la surface est nul.

- 6) En revenant aux équations de bilan non moyennées, écrire le bilan de masse d'un constituant de concentration C sur un domaine $\Omega(t)$ transporté par le champ de vitesse $\underline{U}$, à l'intérieur duquel se propage une surface de discontinuité $\Sigma(t)$ animée d'une vitesse $\underline{W}_\Sigma$. On notera $\llbracket X \rrbracket = X_+ - X_-$ de la quantité X en choisissant (arbitrairement) une orientation de la normale $\underline{n}$ à la surface Σ pointant du $-$ vers le $+$. On notera $\underline{A}$ le flux sortant de la quantité C (dans le cas

particulier de la chute de sédiments, on a $\underline{A} = -C W \underline{e}_z$). Écrire le duo “bilan local / équation de saut” qui découle du bilan global $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} dA = 0$.

On démontre tout d’abord que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} da - \int_{\Sigma} \llbracket C \rrbracket \underline{W}_{\Sigma} \cdot \underline{n} da$. L’équation de bilan en présence d’une discontinuité s’écrit donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} da - \int_{\Sigma} \llbracket C \rrbracket \underline{W}_{\Sigma} \cdot \underline{n} da + \int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} da = 0.$$

En utilisant la relation $\int_{\partial\Omega} \underline{Q} \cdot \underline{n} da = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{Q} d\Omega + \int_{\Sigma} \llbracket \underline{Q} \rrbracket \cdot \underline{n} da$ qui généralise la formule de la divergence au cas discontinu, on obtient finalement les relations

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \underline{U} + \underline{A}) \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \left[C (\underline{U} - \underline{W}_{\Sigma}) + \underline{A} \right] \cdot \underline{n} da = 0.$$

On en déduit les équations $\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \underline{U} + \underline{A}) = \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{A} = 0$ pour le bilan local en tout point hors de Σ et $\llbracket C (\underline{U} - \underline{W}_{\Sigma}) + \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ pour la relation de saut en tout point de Σ .

- 7) On suppose que le champ de vitesse $\underline{U}$ est turbulent. Écrire les équations de Reynolds dans le cas général.

Les équations de Reynolds s’écrivent $\frac{\overline{\partial C}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\underline{U}' C'} + \underline{A}) = 0$ pour tout point $\underline{x}$ en dehors de Σ et $\llbracket \overline{C} \underline{U} + \overline{C'} \underline{U}' - \overline{C} \underline{W}_{\Sigma} + \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ pour tout point $\underline{x}$ sur la surface Σ .

- 8) On suppose maintenant que la turbulence est homogène dans la direction horizontal et que la surface de discontinuité est un plan horizontal mobile d’équation $z = H(t)$. On notera $W_H = H'(t)$ la vitesse verticale de ce plan. On suppose que le mélange est suffisamment rapide par rapport à la vitesse W_H pour pouvoir considérer que le profil $\overline{C}$ atteint son équilibre instantanément dans chacune des régions séparées par la discontinuité. Dans le cas du flux de sédiment $\underline{A} = -W C \underline{e}_z$ résultant de la vitesse de chute constant W , écrire les équations de Reynolds.

L’équation de bilan local s’écrit $\frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ de part et d’autre de la surface de discontinuité. La relation de saut s’écrit $\llbracket \overline{w' C'} - W_H \overline{C} \rrbracket = \llbracket W \overline{C} \rrbracket$ ou encore $\llbracket \overline{w' C'} \rrbracket = (W_H + W) \llbracket \overline{C} \rrbracket$.

- 9) Montrer que le flux net de sédiment est nul dans la région 2 (supérieure) et égal à une valeur constante que l’on notera G dans la région 1 (inférieure) que l’on peut interpréter comme étant le flux de sédiment net extrait au sol. Relier ce flux vertical à la vitesse du front W_H et à la discontinuité de concentration $\llbracket C \rrbracket$ sur ce front.

En intégrant l’équation de bilan $\frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ par rapport à z , on trouve $\overline{w' C'} = W \overline{C}$ dans la région 2, puisque le flux net est nul en surface, et $\overline{w' C'} = W \overline{C} + G$ dans la région 1 où la constante d’intégration G représente le flux net de sédiment extrait du sol par entraînement. On soustrayant les deux relations précédentes, on obtient la relation $\llbracket \overline{w' C'} \rrbracket = W \llbracket \overline{C} \rrbracket - G$. La relation de saut peut donc s’écrire $W \llbracket \overline{C} \rrbracket - G = (W_H + W) \llbracket \overline{C} \rrbracket$, ce qui entraîne $G = -W_H \llbracket \overline{C} \rrbracket$.

- 10) On suppose que $\overline{C} = 0$ dans la région supérieure 1. Relier entre elles les quantité $G(t)$, $C_a(t)$ et $W_H(t)$ en supposant valide le modèle de turbulence $\overline{w' C'} = -K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$.

Comme $\bar{C} = 0$ dans la région 2, on peut écrire que le flux net de sédiment extrait par entraînement est $G = -W_H \llbracket \bar{C} \rrbracket = W_H \bar{C}(H)$. Pour la paramétrisation $\overline{w' \bar{C}'} = -K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$, on doit résoudre l'équation $-K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = W \bar{C} + G$ avec la condition $\bar{C}(0) = C_a$. On obtient alors $\bar{C}(z) = \left(\frac{G}{W} + C_a\right) e^{-\frac{W}{K}z} - \frac{G}{W}$, ce qui permet d'écrire $G = W_H \bar{C}(H) = \left(G \frac{W_H}{W} + C_a W_H\right) e^{-\frac{W}{K}H} - G \frac{W_H}{W}$. Cette relation s'écrit encore

$$G = C_a \frac{W W_H e^{-\frac{W}{K}H}}{W + W_H \left(1 - e^{-\frac{W}{K}H}\right)} = C_a W_H \frac{1}{\left(1 + \frac{W_H}{W}\right) e^{\frac{W}{K}H} - 1}.$$

PC7.3 Critique du modèle discontinu

On veut maintenant remplacer le modèle de propagation d'un front par un modèle plus réaliste. On adopte le modèle de turbulence $\overline{w' \bar{C}'} = -K(z, t) \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$ avec $K(z, t) = K_1$ pour $0 \leq z \leq H(t)$ et $K(z, t) = K_2$ pour $H(t) \leq z$. On étudie alors l'évolution temporelle de $\bar{C}(z, t)$.

11) Écrire l'équation d'évolution de $\bar{C}(z, t)$ pour le modèle de turbulence étudiée.

L'équation d'évolution de la concentration de sédiment s'écrit $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} - W \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right]$. C'est une équation d'advection diffusion.

12) Dessiner schématiquement l'évolution du profil de concentration pour ce modèle en supposant que la concentration au sol reste égale à C_a . Comparer l'évolution d'un front de concentration avec celle du modèle discontinu précédent.

L'évolution du profil de concentration fait apparaître une discontinuité dans la pente au niveau $z = H(t)$. La propagation d'un éventuel front de concentration (généré par exemple par les conditions initiales) diffère du modèle discontinu par le fait qu'il diffuse et que la discontinuité de concentration disparaît (seule la discontinuité de la pente subsiste). La résolution analytique de ce système est envisageable en imposant un flux nul à la surface.

