

PC6 : Instabilité barocline aux moyennes latitudes

L'objet de cette PC est d'estimer les valeurs numériques des grandeurs qui permettent d'appréhender la circulation générale de l'atmosphère. On étudie ici les instabilités barocline aux moyennes latitudes.

PC6.1 Instabilité barocline et problème d'Eady

On s'intéresse aux perturbations de l'équilibre géostrophique au niveau du jet d'Ouest. On se place alors dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique en supposant que le paramètre de Coriolis $f = f_0$ et la fréquence de Brunt-Vaisala $\bar{N} = N_0$ sont des constantes.

- 1) Écrire les équations exprimant l'évolution de la vorticité potentielle quasi-géostrophique tridimensionnelle $\eta_{qg}/N_0^2 = f_0 + \nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$ ainsi que la valeur de la vitesse verticale w . La fonction $\psi(x, y, z, t)$ désigne la fonction de courant dont découle la vitesse géostrophique $(u_g, v_g) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Les équations du modèle quasi-géostrophique 3D entraînent que } \left(\frac{D}{Dt} \right)_g \left[f_0 + \nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \text{ et} \\ w = -\frac{f_0^2}{N_0^2} \left(\frac{D}{Dt} \right)_g \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ avec } \left(\frac{D}{Dt} \right)_g = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}. \end{array} \right.$$

On s'intéresse au temps de croissance des instabilités baroclines qui vont venir déstabiliser l'écoulement simplifié $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\Lambda z, 0, 0)$ qui modélise le jet d'Ouest, en équilibre avec le gradient zonal d'entropie $\frac{\partial \bar{s}}{\partial y}$. On rappelle que la linéarisation du modèle d'Eady entraîne $c^2 - \Lambda H c - \frac{\Lambda^2}{\alpha^2} [1 - \alpha H \coth(\alpha H)] = 0$.

- 2) En utilisant les résultats du modèle d'Eady, montrer que le taux de croissance d'une onde barocline de longueur d'onde $L = 2\pi/k$ est relié à la partie imaginaire de $c = c_r + i c_i$ solution de l'équation $\left(\frac{\alpha c}{\Lambda} - \frac{\alpha H}{2} \right)^2 = F \left(\frac{\alpha H}{2} \right)$ où H est la hauteur de la troposphère, $\alpha = \frac{N_0 k}{f_0}$ et $F(\kappa) = 1 + \kappa^2 - \frac{2\kappa}{\text{th}(2\kappa)} = (\kappa \text{th} \kappa - 1) \left(\frac{\kappa}{\text{th} \kappa} - 1 \right)$. En prenant $\phi_0 = 40^\circ$ N pour le calcul de $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$, $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $\Lambda = 1.7 \cdot 10^{-3}$, estimer la valeur de la longueur d'onde L_* la plus amplifiée ainsi que le temps de croissance $T_* = L_*/c_{i*}$ et la vitesse de propagation c_{r*} correspondant. Comparer avec le régime de temps des régions tempérées.

La résolution du problème d'Eady s'effectue en linéarisant les équations quasi-géostrophiques autour de l'écoulement de base $(\bar{u}, 0, 0)$ et en imposant à la vitesse verticale w d'être nulle au sol et à la tropopause. On vérifie trivialement la factorisation de la fonction $F(\kappa)$ qui est négative entre $\kappa = 0$ et κ_0 solution de l'équation $\text{th} \kappa_0 = 1/\kappa_0$. Par résolution graphique sur le tracé de la fonction F , on voit que $\kappa_0 \sim 1.2$ et que $\kappa_* \sim 0.8$ avec $F_* = F(\kappa_*) \sim -0.1$. Comme $\kappa_* = \frac{\alpha_* H}{2} = \frac{N_0 k_* H}{2f_0}$, on a $k_* = \frac{2f_0 \kappa_*}{N_0 H}$ et donc $L_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{\pi N_0}{f_0 \kappa_*} H \sim 3600 \text{ km}$. Le temps de croissance maximale correspond à $\alpha_* c_{i*}/\Lambda = \sqrt{-F_*}$, d'où $T_* = L_*/c_{i*} \sim 11 \text{ j}$. La vitesse de propagation de la perturbation est $c_{r*} \sim 3 \text{ m/s}$. Ces valeurs correspondent bien aux caractéristiques des perturbations qui traversent les régions tempérées aux moyennes latitudes.

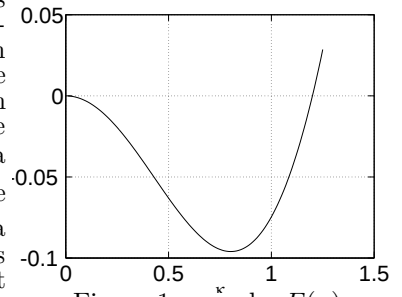


Figure 1 : courbe $F(\kappa)$

PC6.2 Moment cinétique et flux d'Eliaassen-Palm

On s'intéresse maintenant au bilan de moment cinétique dans la branche descendante commune à la cellule de Hadley et à la cellule de Ferrel à 40° N. Pour cela, on utilise les figures et les tableaux de la PC4 et on suppose que le moment cinétique absolu $m_a = a \rho \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ est, en l'absence de frottement F_u et de gradient de pression latitudinal $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$, conservé le d'une trajectoire, même dans le cas où la masse ρ est variable.

- 3) À partir de la figure 2 et de la table 1 de la PC4, estimer la différence de moment cinétique entre les niveaux 200 hPa et 1000 hPa. En déduire que le mouvement est accéléré par un mécanisme plus puissant que le frottement. Estimer le moment $\overline{M}$, moyenné sur une trajectoire descendante, de la résultante de ces forces antagonistes. Comparer cette valeur à celles des moments moyens du frottement le long des trajectoires horizontales de la cellule de Hadley.

À la latitude 40° N, on lit sur la figure 2 de la PC4 les valeurs $u \sim 25$ m/s à 200 hPa et $u \sim 5$ m/s à 1000 hPa. En prenant en compte la valeur de la densité ρ à chaque niveau (multipliée par 4 en descendant), on obtient $\frac{\Delta m_a}{a} = 1.2 \times 278 - 0.3 \times 293 = 245$ N s/m³. On voit que le frottement F_u , qui seul diminuerait m_a dans la mesure où u reste positif, est contrecarré par une autre force qui tend à accélérer le mouvement. On peut estimer l'effet accélérateur du bilan des moments de cette force et de la force de frottement en calculant le moment moyen $\overline{M}_u = \Delta m_a / \tau$ où $\tau = 20$ j est le temps que met une particule pour descendre. On obtient alors la valeur $\overline{M}_u = 900$ N /m² qui est grande en comparaison avec le frottement moyen calculé dans les branches horizontales de la cellule de Hadley (entre 200 et 500 N /m²).

- 4) On suppose que l'apport de moment cinétique qui vient d'être mis en évidence est dû au flux d'Eliassen-Palm $\underline{E}$. La figure 5 représente le vecteur flux $\underline{E}$, ainsi que les isocontours de la quantité $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi) \nabla \underline{E}$ avec un intervalle égal à 10^{15} m³. À partir de la figure, estimer le moment $-\frac{a}{\rho g} \nabla \underline{E}$ moyenné sur une trajectoire qui descend de 900 hPa à 1000 hPa à 40° N. Donner alors une description globale du bilan de moment cinétique de la cellule de Hadley.

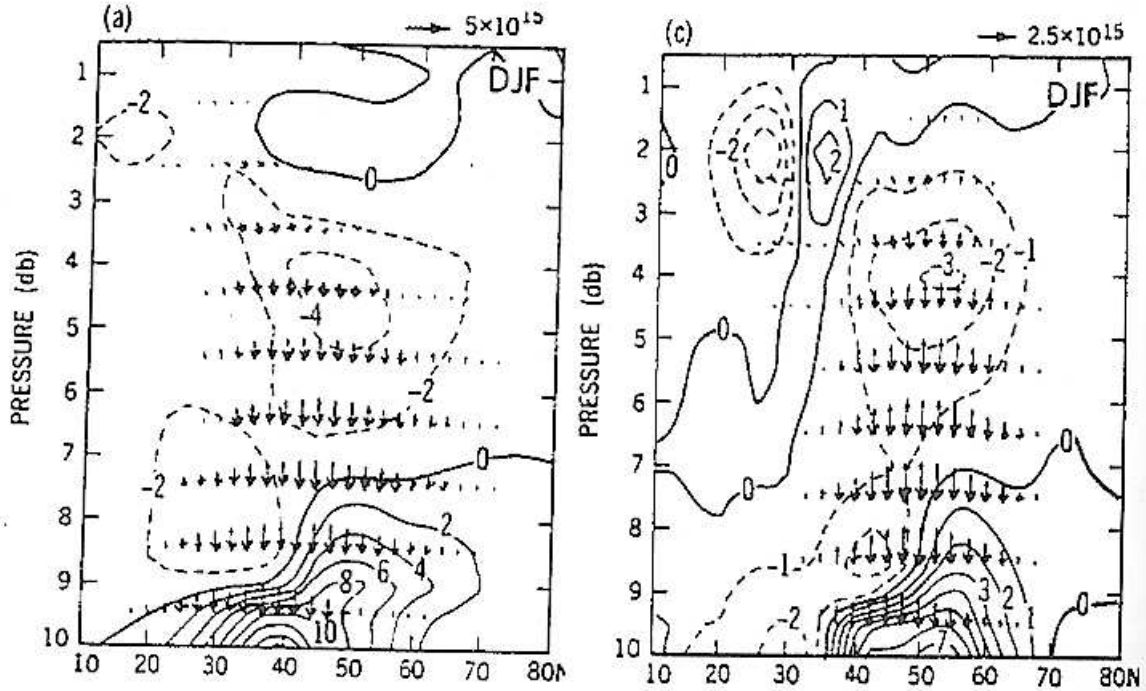


Figure 2 : Flux d'Eliassen-Palm et convergence $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi) \nabla \underline{E}$ (10^{15} m³) en hiver dus a) aux transitoires baroclines et b) aux ondes stationnaires.

À partir de la figure, on voit que la valeur de la quantité $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi)\nabla \underline{E}$ moyennée entre 900 et 1000 hPa est environ $6 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ pour les transitoires baroclines et $2 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ pour les ondes stationnaires, soit $8 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ au total. On en déduit que $-\nabla \underline{E} \sim 400 \text{ N/m}^2$. Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur des moments calculés précédemment. On peut alors esquisser le scénario suivant : une particule fluide monte dans la Zone de Convergence Inter-Tropicale (ZCIT) avec une vitesse moyenne $u \sim 0$ puis monte vers les moyennes latitudes pour former le jet d'ouest. La perte de moment cinétique par frottement est d'autant moins grande que l'altitude est haute, à cause de la densité. En arrivant aux moyennes latitudes le moment cinétique est absorbé par les ondes stationnaires et les transitoires baroclines pour être réinjecté dans les basses couches. Ce mécanisme est à l'origine de la circulation de Ferrel. Tous ces effets sont du même ordre de grandeur (moment moyen de l'ordre de plusieurs centaines de N/m^2).

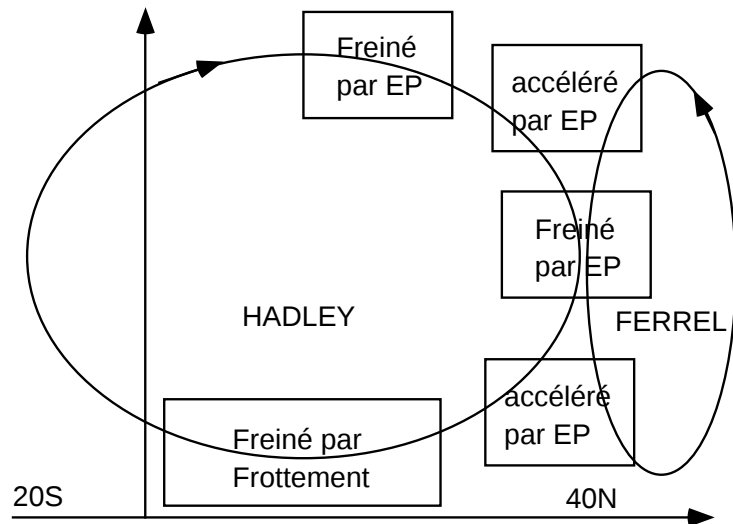


Figure 3 : représentation schématique de l'action du flux d'Eliassen-Palm (EP)