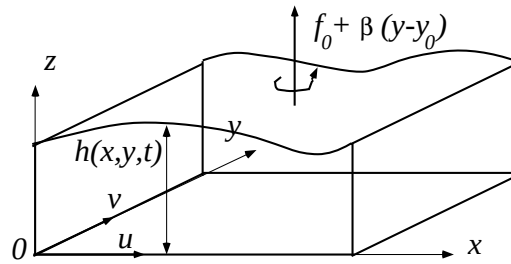


PC5 : Classification des ondes barotropes dans un β -plan

L'objet de cette PC est d'effectuer une classification des ondes obtenues dans le cadre du modèle de Saint-Venant et de l'approximation du β -plan. Les cas $\beta = 0$ (f_0 -plan) et $f_0 = 0$ (ondes équatoriales) sont des cas particuliers de cette étude. Dans le cas général (f_0, β) quelconque, on montre que seules les ondes de Rossby subsistent lorsque l'on passe du modèle de Saint-Venant au modèle quasi-géostrophique. Les autres ondes sont "filtrées" par cette approximation, comme le sont les ondes sonores dans l'approximation incompressible ou l'approximation de Boussinesq.

PC5.1 Modèle de Saint-Venant sur un β -planFigure 1: Écoulement à surface libre dans un β -plan.

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant dans le cas où le paramètre de Coriolis $f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$ est celui d'un " β -plan" et où le fond est horizontal ($h_{\text{inf}} = 0$). On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $h(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre. Linéariser ensuite ces équations autour de l'état de base $(u, v, h) = (0, 0, h_r)$ où h_r est une hauteur constante. On notera $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ les perturbations autour de cet état de base.

Les équations de Saint-Venant de l'approximation du β -plan [$f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$] s'écrivent

$$\frac{Du}{Dt} - f(y) v = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + f(y) u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{Dh}{Dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

On en déduit les équations linéarisées qui s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f(y) \tilde{v} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f(y) \tilde{u} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0.$$

On cherche une classification des ondes qui se propagent sans amplification ni amortissement dans la direction x . On s'intéresse alors aux solutions bornées ou non bornées dans la direction y . Ces dernières ne sont valides que sur un sous-ensemble des $y \in \mathbb{R}$ et doivent donc être raccordées à des conditions aux limites ou à d'autres solutions situées en-dehors du domaine de validité de l'approximation du β -plan.

- 2) Justifier la recherche de solutions sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{h}(y)]e^{i(kx - \omega t)}$ et écrire le système linéaire d'équations différentielles ordinaires que doivent satisfaire les fonctions $\hat{u}$, $\hat{v}$ et $\hat{h}$. Éliminer $\hat{u}$ et $\hat{h}$ pour n'obtenir qu'une équation différentielle ordinaire pour $\hat{v}$. On notera $c^2 = g h_r$.

Le système est invariant par translation en x et t mais pas en y . Les solutions de base ont donc la forme recherchée dans la mesure où elles doivent être propagatives dans la direction x . Le système s'écrit alors

$$-i\omega \hat{u} - f(y) \hat{v} = -ik g\hat{h}, \quad -i\omega \hat{v} + f(y) \hat{u} = -g \frac{d\hat{h}}{dy} \quad \text{et} \quad -i\omega \hat{h} + h_r ik \hat{u} + h_r \frac{d\hat{v}}{dy} = 0.$$

L'élimination de $\hat{u}$ s'écrit $\omega \hat{u} = [i f(y) \hat{v} + k g\hat{h}]$. Celle de $\hat{h}$ entraîne

$$(\omega^2 - k^2 c^2) g\hat{h} = -i c^2 \omega \frac{d\hat{v}}{dy} + i c^2 k f(y) \hat{v} \quad \text{et} \quad \omega (\omega^2 - k^2 c^2) \hat{u} = i \omega \left(f \omega \hat{v} - c^2 k \frac{d\hat{v}}{dy} \right).$$

On en déduit alors la relation $\omega^2 \left\{ -\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} + \left[\left(\frac{k\beta}{\omega} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{f^2(y)}{c^2} \right] \hat{v} \right\} = 0$.

- 3) On s'intéresse au cas $\omega = 0$. Exprimer les solutions stationnaires $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ dans le cas où $f(y)$ n'est pas nul. Quel nom donner à ces équilibres ?

Les équilibres géostrophiques s'écrivent $\tilde{u}(x, y) = -\frac{g}{f(y)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(x, y)$ et $\tilde{v}(x, y) = \frac{g}{f(y)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}(x, y)$ où $\tilde{h}(x, y)$ est une fonction quelconque.

- 4) On s'intéresse au cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y) = 0$. Montrer que l'on obtient des solutions non triviales si et seulement si $\omega^2 = c^2 k^2$. Exprimer dans ce cas les fonctions $\hat{u}(y)$ et $\hat{h}(y)$. On appelle "ondes de Kelvin" ces solutions.

Dans le cas $\hat{v}(y) = 0$, les équations deviennent

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega} k g\hat{h}, \quad 0 = -i f(y) k g\hat{h} - i\omega \frac{d(g\hat{h})}{dy} \quad \text{et} \quad (\omega^2 - k^2 c^2) g\hat{h} = 0.$$

On a donc $\omega^2 = k^2 c^2$ et $g\hat{h}(y) = gh_* e^{-\frac{k}{\omega}[f_0(y-y_0) + \frac{1}{2}\beta(y-y_0)^2]}$ où gh_* est l'amplitude arbitraire de l'onde. On obtient donc deux familles d'ondes de Kelvin $\omega = \pm k c$ avec $g\hat{h}_{\pm}(y) = gh_* e^{\mp \frac{1}{c}[f_0(y-y_0) + \frac{1}{2}\beta(y-y_0)^2]}$ et $\hat{u}(y) = \pm \frac{1}{c} g\hat{h}_{\pm}(y)$.

- 5) On s'intéresse au cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y)$ non identiquement nul. Montrer que les solutions $\hat{v}(y)$ sont alors des modes propres (bornées ou non) de l'opérateur $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{f^2(y)}{c^2}$. Quel est la dimension de l'espace vectoriel des solutions $\hat{v}(y)$ associées à une valeur propre de $\mathcal{L}$? En notant χ les valeurs propres (plus exactement les valeurs du spectre), exprimer la relation de dispersion $\chi = Q(k, \omega)$ que l'on doit imposer pour trouver des solutions. En supposant le profil de vitesse $\hat{v}(y)$ connu, exprimer les fonctions $\hat{u}(y)$ et $\hat{h}(y)$ en excluant les couples (ω, k) tels que $\omega^2 = k^2 c^2$ et dont l'étude a déjà été traitée (ondes de Kelvin).

La relation de dispersion s'écrit $\chi = Q(k, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}$. Pour une valeur de χ donnée, il existe deux ondes bornées ou non bornées en y . En supposant que $\hat{v}(y)$ est le profil d'une telle onde et $\omega^2 - k^2 c^2 \neq 0$, on a $g\hat{h}(y) = \frac{i c^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \left[-\omega \frac{d\hat{v}}{dy} + k f(y) \hat{v} \right]$ et $\hat{u}(y) = i \frac{f(y)}{\omega} \hat{v}(y) + \frac{k}{\omega} g\hat{h}(y)$.

PC5.2 Étude de la fonction $\chi = Q(k, \omega)$

- 6) Remarquer que $\chi = Q(k, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \left(\frac{\omega}{c} + k + \frac{\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{c} - k \right) - \frac{\beta}{c} = \left(\frac{\omega}{c} - k - \frac{\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{c} + k \right) + \frac{\beta}{c}$. En déduire l'équation et le tracé des courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ puis des courbes $\chi = \frac{\beta}{c}$. En déduire que le point $(k, \omega) = \left(-\sqrt{\frac{\beta}{2c}}, \sqrt{\frac{\beta c}{2}} \right)$ est un point selle de la fonction $Q(k, \omega)$ avec $\chi = \frac{\beta}{c}$. Tracer le lieu des points (k, ω) pour lesquels les iso- χ sont parallèles à l'un des axes. Déduire de cette étude un

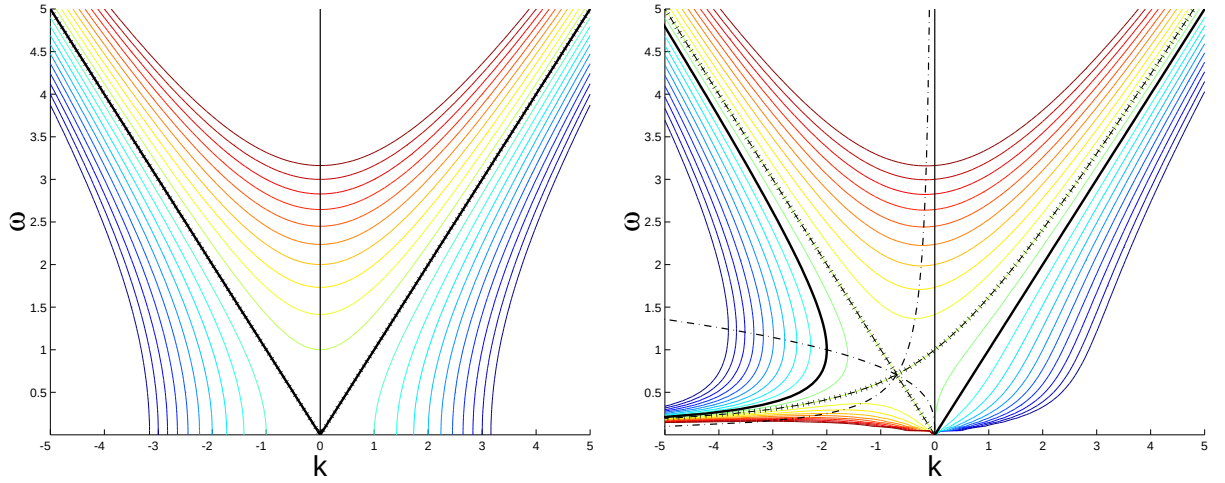


Figure 2: Isovaleurs $\chi = Q(k, \omega)$. a) cas $\beta = 0$. b) cas général avec un intervalle de $\frac{\beta}{c}$ entre les contours. (—) : courbe $\chi = -\frac{\beta}{c}$, (- - -) : courbe $\chi = \frac{\beta}{c}$. (---) : courbes $\frac{\partial Q}{\partial k} = 0$ ou $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = 0$.

tracé approximatif des courbes iso- χ .

Les courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ sont définies par $\left(\frac{\omega}{c} + k + \frac{\beta}{\omega}\right)\left(\frac{\omega}{c} - k\right) = 0$. Il s'agit donc de la droite $\omega = kc$ et de l'hyperbole $k = -\frac{\omega}{c} - \frac{\beta}{\omega}$. Les courbes $\chi = \frac{\beta}{c}$ sont définies par $\left(\frac{\omega}{c} - k - \frac{\beta}{\omega}\right)\left(\frac{\omega}{c} + k\right) = 0$. Il s'agit donc de la droite $\omega = -kc$ et de l'hyperbole $k = \frac{\omega}{c} - \frac{\beta}{\omega}$. Cette droite et cette hyperbole se coupent en un point qui vérifie automatiquement $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{\partial Q}{\partial k} = 0$. Il s'agit donc d'un point selle. La courbe $\frac{\partial Q}{\partial k} = -2k - \frac{\beta}{\omega} = 0$ c'est-à-dire l'hyperbole $\omega = -\frac{\beta}{2k}$ définit le lieu des points où les iso- χ sont parallèles à l'axe des k . La courbe $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{c^2} + \frac{k\beta}{\omega^2} = 0$, c'est-à-dire la cubique $k = -\frac{2\omega^3}{\beta c^2}$, définit le lieu des points où les iso- χ sont parallèles à l'axe des ω . La figure (b) représente les iso- χ pour des valeurs espacées d'un intervalle $\frac{\beta}{c}$.

7) Tracer les iso- χ dans le cas $\beta = 0$. En déduire comment se modifient les iso- χ lorsque $\beta \rightarrow 0$.

Pour $\beta = 0$, la relation de dispersion s'écrit $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$. Les iso- χ sont donc des hyperboles avec comme asymptotes les droites d'équations $\omega = \pm kc$. Dans la limite $\beta \rightarrow 0$, les courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ et $\chi = \frac{\beta}{c}$ tendent vers ces asymptotes.

PC5.3 Ondes dans le f_0 -plan

On suppose ici que $\beta = 0$. On a donc $f(y) = f_0$.

8) Dans le cas $\omega = 0$, on obtient les équilibres géostrophiques caractérisés par un champ $h(x, y)$ arbitraire. Montrer que les trajectoires suivent les courbes iso- h .

On a $u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{f_0} h(x, y) \right]$ et $v(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{f_0} h(x, y) \right]$. La fonction $\frac{1}{f_0} h(x, y)$ est donc une fonction de courant du champ de vitesse. Les trajectoires suivent donc les iso- h .

9) Dans le cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y) = 0$, montrer que les ondes de Kelvin, qui vérifient la relation de dispersion $\omega = kc$, ne sont pas bornées. Montrer que dans un canal ou dans l'océan, ces ondes peuvent se propager le long d'une paroi ou d'une côte rectiligne de direction quelconque. On parle alors d'ondes de "Kelvin de bord". Tracer schématiquement les champs de vitesse et de hauteur de la surface libre.

Les deux familles d'ondes de Kelvin de relations de dispersion $\omega = \pm k c$ vérifient $\hat{g}h_{\pm}(y) = gh(0) e^{\mp \frac{f_0}{c}(y-y_0)}$ et $\hat{u} = \pm \frac{1}{c} \hat{g}h_{\pm}(y)$. Ces profils croissent donc exponentiellement dans une direction parallèle à l'axe des y . La nullité de $\hat{v}(y)$ rend ces ondes compatibles avec une condition aux limites cinématique $v = 0$ le long d'une paroi parallèle à l'axe des x . Comme le f_0 -plan est isotrope, cette côte rectiligne peut être orientée dans n'importe quelle direction.

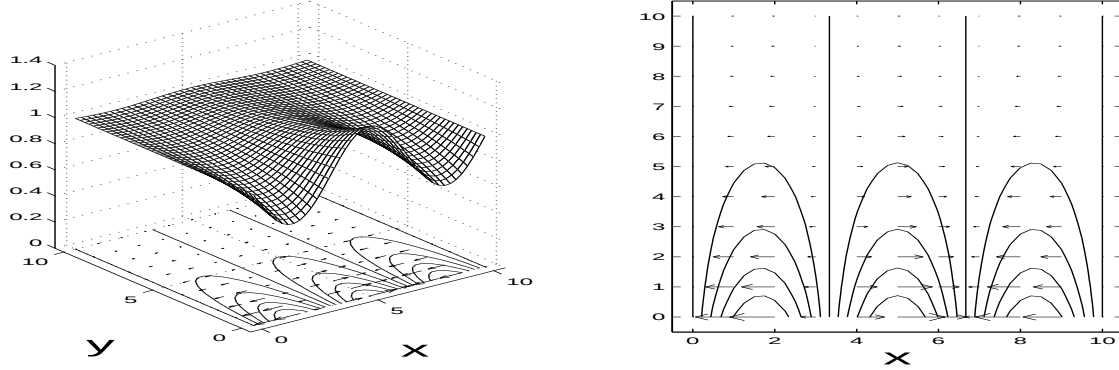


Figure 3: Onde de Kelvin de bord. Hauteur $\tilde{h}$ et champ de vitesse $\underline{U}_H$ pour $\omega/f_0 = 2.25$

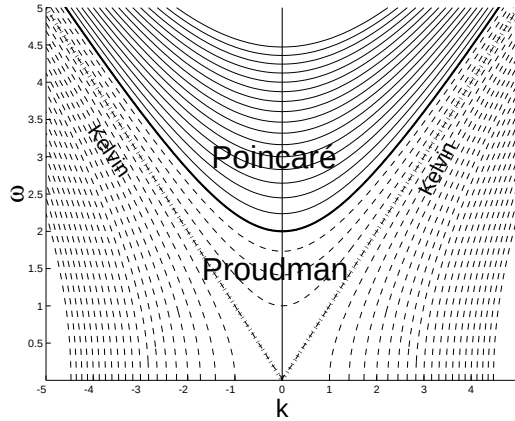


Figure 4: Relation de dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ des ondes de Poincaré et $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$ des ondes de Proudman. (- -) Relation de dispersion $\omega^2 = k^2 c^2$ des ondes de Kelvin de bord.

- 10) Dans le cas où $\hat{v}(y)$ n'est pas identiquement nul, montrer que l'on a $\hat{v}(y) = v_* e^{il y}$ pour $\chi \geq \frac{f_0^2}{c^2}$ et $\hat{v}(y) = v_* e^{\alpha y}$ pour $\chi \leq \frac{f_0^2}{c^2}$. En déduire les relations de dispersion des ondes de Poincaré $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ et des ondes de Proudman $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$.

Le problème aux valeurs propres $\mathcal{L} \hat{v} = \chi \hat{v}$ s'écrit, pour le présent cas du f_0 -plan, $-\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{c^2} \hat{v} = \chi \hat{v}$. On note alors l^2 ou $-\alpha^2$ le paramètre $\chi - \frac{f_0^2}{c^2}$ suivant son signe. Les ondes de Poincaré obéissent à la relation dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ et vérifient $\hat{v}(y) = v_* e^{il y}$. Le problème est alors isotrope et on peut choisir les axes de telle sorte que $l = 0$. Dans ce cas $\hat{g}h = i \frac{c_0^2 k}{f_0} \hat{v}$ et $\hat{u} = i \frac{\omega}{f_0} \hat{v}$. Les ondes de Proudman obéissent à la relation de dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$.

PC5.4 Ondes bornées du β -plan

On revient ici au cas général $f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$ du β -plan et l'on cherche les solutions bornées pour $y \in \mathbb{R}$. Les profils de ces solutions permettent de donner une idée de la structure spatiale de l'ensemble des solutions, en particulier pour les ondes "d'inertie-gravité" et de "Rossby" de petites longueurs d'ondes.

- 11) On considère l'opérateur $\mathcal{H}_a = -\frac{d^2}{dy^2} + V_a(y)$ avec $V_a(y) = a^2 (y - y_e)^2$ où y_e est une constante. Trouver l'ensemble des valeurs propres λ_n et des fonctions propres $\psi_n(y)$ cet opérateur dans $L^2(\mathbb{R})$. On supposera connu le fait que les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dY^2} + Y^2$ sont les entiers impairs $\Lambda_n = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$ et que les fonctions propres s'écrivent $\Psi_n(Y) = H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}}$ où $H_n(Y) = (-1)^n e^{Y^2} \frac{d^n}{dY^n} (e^{-Y^2})$ sont les polynômes d'Hermite $H_0(Y) = 1$, $H_1(Y) = 2Y$, $H_2(Y) = 4Y^2 - 2$, etc. Formuler une analogie avec la mécanique quantique.

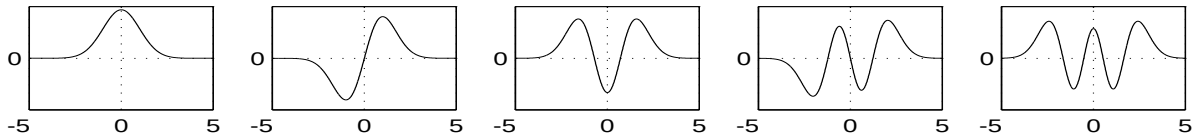


Figure 5: Tracé des premières fonctions propres normalisées $H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}} / (2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}$.

On sait que $\mathcal{H}\Psi_n(Y) = \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n(Y) = (2n + 1) \Psi_n(Y)$. En posant $Y = \sqrt{a} (y - y_e)$ et $\psi_n(y) = \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)]$ on peut écrire $\mathcal{H}_a \psi_n(y) = \left[-\frac{d^2}{dy^2} + a^2 (y - y_e)^2\right] \psi_n(y) = a \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)] = a \Lambda_n \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)] = a \Lambda_n \psi_n(y)$. On en déduit donc que $\lambda_n = a (2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\psi_n(y) = H_n[\sqrt{a} (y - y_e)] e^{-\frac{a(y - y_e)^2}{2}}$. On peut voir $\mathcal{H}_a$ comme le Hamiltonien de l'équation de Schrodinger associée au potentiel harmonique $V_a(y) = a^2 (y - y_e)^2$. Les valeurs propres $\lambda_n = a (2n + 1)$ sont alors les niveaux d'énergie associés à ce potentiel, et les fonctions propres $\psi_n(y)$ sont les densités de probabilité de la particule piégée dans le potentiel pour ces différents états quantiques.

- 12) En déduire que les profils $\hat{v}(y)$ non triviaux et bornés des ondes du β -plan sont obtenus pour $\chi = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Tracer les iso- χ correspondants.

Il suffit de remarquer que l'équation pour $\hat{v}$ s'écrit $\mathcal{H}_a \hat{v} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}\right) \hat{v}$ avec $a = \frac{\beta}{c}$ et $y_e = y_0 - \frac{f_0}{\beta}$. Les solutions sont alors $\hat{v} = 0$ ou $\hat{v} = v_* \psi_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}}\right) = v_* H_n \left[\sqrt{\frac{\beta}{c}} (y - y_e)\right] e^{-\frac{\beta(y - y_e)^2}{2c}}$ avec v_* arbitraire pour les valeurs de (ω, k) vérifiant $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec n entier.

- 13) On pose $l^2 = \chi - \frac{f_0^2}{c^2}$ avec $\chi = (2n + 1) \frac{\beta}{c}$ et on s'intéresse au cas où n , donc l , est grand. Montrer que la relation de dispersion se décompose alors en une relation $\omega \sim \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{c^2}}$ avec $\omega \ll 1$ (ondes de Rossby) et une relation $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ avec $\omega \gg 1$ (ondes d'inertie-gravité). Montrer que pour l grand, les ondes de Rossby et d'inertie-gravité vérifient $\hat{v}(y) \sim v_* e^{i l y}$. Tracer schématiquement les trajectoires, le champ de vitesse et la hauteur de la surface libre pour les ondes de Rossby.

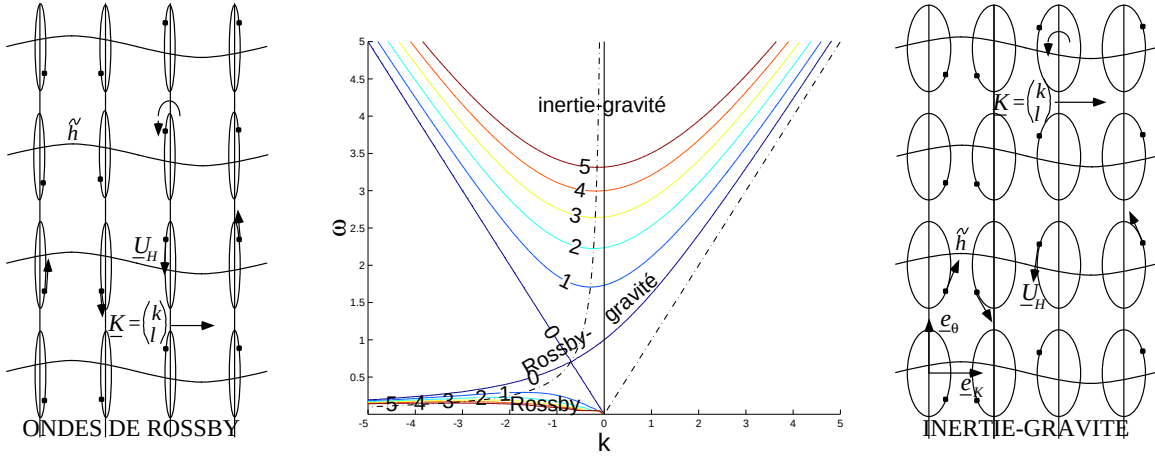


Figure 6: Ondes aux profils $\tilde{v}(y)$ non triviaux et bornés. (b) Relation de dispersion pour $\chi = \frac{\beta}{c}(2n+1)$ avec $n \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Cas limites n grand : (a) Ondes de Rossby ω petit. (c) Ondes d'inertie gravité ω grand.

La relation de dispersion s'écrit $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{f_0^2}{c^2} + l^2$. Pour les ondes d'inertie-gravité (ω grand), les solutions s'écrivent $\omega^2 \sim f_0^2 + c^2 (k^2 + l^2)$ et $\omega \sim \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{c^2}}$. Tant que l^2 est grand devant $\frac{f^2(y)}{c^2}$, le profil $\hat{v}$ vérifie la relation $-\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} \sim l^2 \hat{v}$ et donc $\hat{v}(y) \sim v_* e^{il y}$ avec $l \in \mathbb{R}$. Pour les ondes de Rossby (ω petit), on a $\hat{v} \sim i \frac{k}{f(y)} g \hat{h}$ et $\hat{u} \sim -\frac{1}{f(y)} g \frac{d\hat{h}}{dy} \sim -i \frac{l}{f(y)} g \hat{h}$. Le champ de vitesse est donc presque parallèle aux lignes de phase, et donc "quasi-géostrophique".