

PC4 : Circulation générale de l'atmosphère

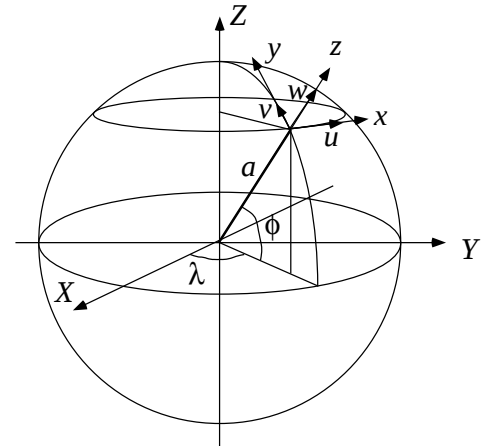
L'objet de cette PC est d'estimer les valeurs numériques des grandeurs qui permettent d'appréhender la circulation générale de l'atmosphère. On étudie ici la cellule de Hadley.

PC4.1 Mouvement d'échelle planétaire

- 1) Écrire les équations du mouvement d'échelle planétaire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, de l'approximation hydrostatique et de l'approximation de couche mince. Expliciter, en particulier, l'expression de la dérivée particulaire en coordonnées sphériques.

Les équations du mouvement d'échelle planétaire s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 &= \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{Du}{Dt} - \operatorname{tg} \phi \frac{uv}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi + F_u \\ \frac{Dv}{Dt} + \operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi + F_v \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho_r \gamma_s \\ \frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{F_e}{T} \end{aligned}$$



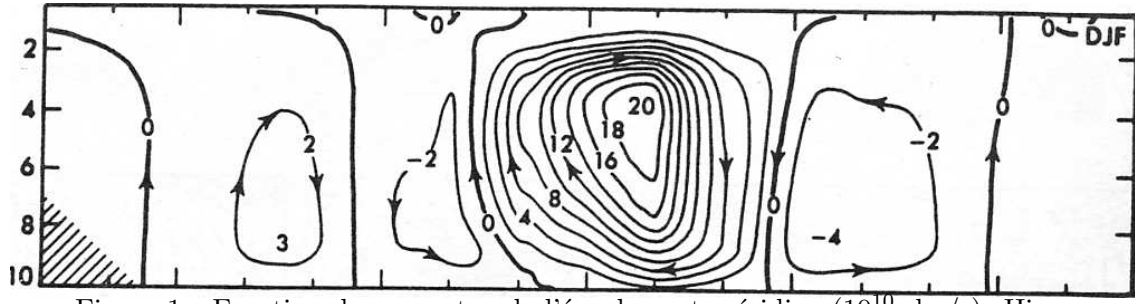
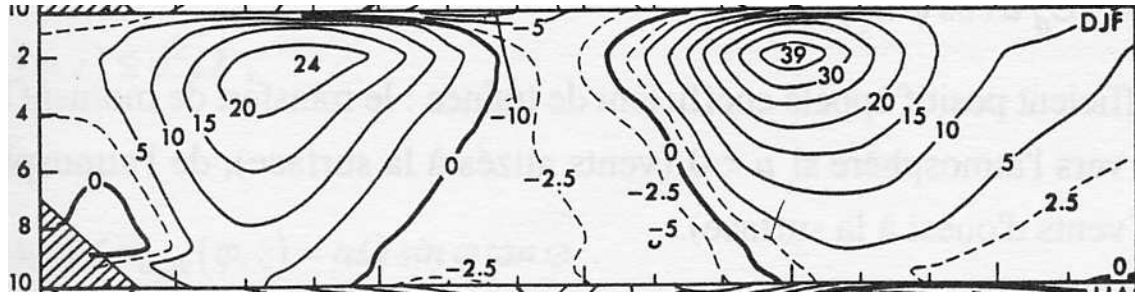
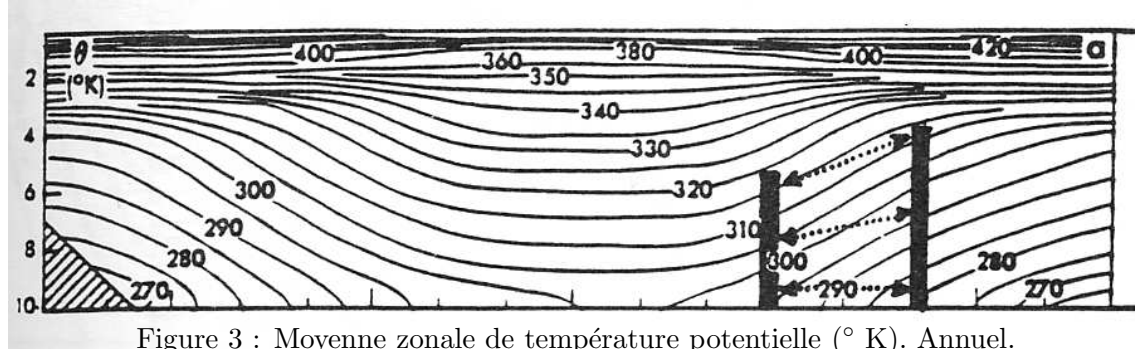
- 2) On note $m_a(x, y, z, t)$ le moment cinétique absolu d'une particule fluide par rapport à l'axe de rotation de la terre. Donner l'expression de m_a en fonction de u et ϕ ainsi que son équation de conservation.

Le moment cinétique absolu est $m_a = a \rho_r \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ et son équation de conservation s'écrit $\frac{Dm_a}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} + a \rho_r \cos \phi F_u$.

PC4.2 Cellules de Hadley

Dans ce paragraphe, on suppose que la contrainte d'incompressibilité $\operatorname{div} \underline{U}$ est remplacée par la contrainte $\operatorname{div} (\rho \underline{U})$ où la masse volumique ρ peut varier. Cet abandon de l'approximation d'incompressibilité est nécessaire pour calculer étudier le débit massique $\rho \underline{U}$ en couplant la basse et la haute atmosphère. On dit alors que l'approximation de Boussinesq est remplacée par l'approximation "anélastique".

- 3) La figure 1 représente la fonction de courant φ du débit massique méridien pour les mois d'hiver (boréal). L'unité des iso- φ est égale à 10^{10} kg/s. Les latitudes sont graduées de 80° S à 80° N avec un intervalle de 10° . La verticale est représentée à l'aide des coordonnées pression graduées avec un intervalle de 200 hPa. À partir de la lecture de ce graphique, estimer grossièrement le temps que met une particule d'air de la cellule de Hadley pour faire un tour complet. On supposera que la température est de 300° K à 1000 hPa au sol et 225° K à 200 hPa au sommet de la troposphère afin de calculer la densité de l'air, que l'on supposera sec, par l'intermédiaire de la loi d'état ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). On pourra considérer une particule animée d'un mouvement vertical à 10° S et 20° N et horizontal aux niveaux 1000 hPa et 200 hPa.

Figure 1 : Fonction de courant φ de l'écoulement méridien (10^{10} kg/s). Hiver.Figure 2 : Moyenne zonale de la vitesse du vent u (5 m/s). Hiver.Figure 3 : Moyenne zonale de température potentielle ($^{\circ}$ K). Annuel.

$\frac{m_a}{a\rho}$ (m/s)	-5 m/s	0 m/s	5 m/s	10 m/s	15 m/s	20 m/s	25 m/s	30 m/s
0°	462	467	472	477	482	487	492	497
10°	448	452	457	462	467	472	477	482
20°	407	412	417	421	426	431	435	440
30°	346	350	354	359	363	367	372	376
40°	270	274	278	281	285	289	293	297

Table 1 : Abaque pour la fonction $\frac{m_a}{a\rho} = \cos \phi(u + \Omega a \cos \phi)$.

u_0	ϕ_0	ϕ_0	ϕ_0	ϕ_0
ϕ_1				
ϕ_1				
ϕ_1				
ϕ_1				

0	0°	10°	20°	30°
0°	0	-14	-55	-117
10°	14	0	-41	-104
20°	58	43	0	-66
30°	135	118	72	0

20	0°	10°	20°	30°
0°	20	6	-36	-99
10°	35	20	-22	-87
20°	79	64	20	-48
30°	158	141	93	20

Table 2 : Abaques pour la fonction $u_1 = u_0 \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} + \Omega a \left(\frac{\cos^2 \phi_0}{\cos \phi_1} - \cos \phi_1 \right)$.

La fonction de courant φ correspond à des débits intégrés sur des cercles de latitude de rayon $a \cos \phi$. Sur la figure 1, on observe qu'un écart de $\Delta\varphi$ de la fonction de courant du débit méridien sur une longueur ΔL correspond donc à une vitesse V déterminée par l'équation $2\pi a \cos \phi \rho V = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}$, donc $V = \frac{1}{2\pi a \cos \phi \rho} \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}$. Un écart de $\Delta\varphi \sim 10 \times 10^{10}$ kg/s correspond à un écart de $\Delta\phi = 10^\circ$, donc $\Delta Y \sim 10^6$ m, à 10° S et 20° N, et à un écart de $\Delta Z \sim 10^3$ m au sol ou au sommet de la troposphère. Comme la hauteur de la troposphère est environ 10 km et la distance entre 20° N et 10° S est environ 3000 km, on obtient les valeurs des vitesses verticales w ou horizontales v ainsi que les temps de transfert τ qui sont résumées dans le tableau ci-dessous. Le temps moyen total mis par une particule pour faire un cycle complet est alors de 33 jours.

$P = 200$ HPa $T = 225$ K $\rho = 0.3$ kg/m ³	$\uparrow$ $w = 0.01$ m/s $\tau = 5$ j	$\longrightarrow$ $v = 10$ m/s $\tau = 3$ j	$w = -0.01$ m/s $\downarrow$ $\tau = 5$ j
$P = 1000$ HPa $T = 300$ K $\rho = 1.2$ kg/m ³	$\uparrow$ $w = 0.003$ m/s $\tau = 15$ j	$v = -3$ m/s $\tau = 10$ j $\longleftarrow$	$w = -0.003$ m/s $\downarrow$ $\tau = 15$ j
Total : 33 j	10° S	10° S à 20° N	20° N

- 4) Pour décrire les cellules de Hadley, on suppose que l'écoulement est stationnaire et indépendant de la longitude λ . On suppose que la masse volumique $\rho(z)$ ne dépend que de l'altitude. On note alors $m_a = a \rho \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ le moment cinétique d'une particule qui reste à une altitude constante et Δm_a la différence de moment cinétique entre deux positions de sa trajectoire. Justifier sans calculs la relation $\Delta m_a = \overline{M_u} \tau$ où τ est le temps qu'a mis la particule pour passer d'une position à l'autre et $\overline{M_u}$ est la valeur moyenne le long de ce parcours du moment $M_u = a \rho \cos \phi F_u$ de la force de frottement.

Puisque ρ reste constant, il suffit de remplacer ρ_r par ρ dans les équations du mouvement d'échelle planétaire initialement écrites dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En intégrant l'équation, on obtient alors $\frac{Dm_a}{Dt} = M_u$ puisque $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$. En définissant $\overline{M_u} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M_u dt$, on obtient le résultat indiqué.

- 5) À partir de la figure 2 qui représente la moyenne zonale du vent u en hiver estimer grossièrement le frottement moyen $\overline{M_u}$ le long de la trajectoire supérieure (10° S $\rightarrow$ 20° N, 200 HPa) et la trajectoire inférieure (20° N $\rightarrow$ 10° S, 1 000 HPa). On pourra utiliser la table 1 pour ce calcul.

En notant S la latitude 10° S et N la latitude 20° N, H le niveau 200 HPa et B le niveau 1000 HPa, on peut lire sur la figure que $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ m/s. On en déduit la valeur de m_a pour ces quatre régions et donc $\frac{\Delta m_a}{a \rho}$ qui vaut $431 - 452 = -21$ m/s pour la branche haute de la cellule de Hadley et $452 - 412 = 40$ m/s pour la branche basse. Pour l'estimation du frottement moyen, on peut négliger les vitesses négatives de faible intensité dans la région équatoriale. On peut donc considérer que u est toujours positif, ce qui entraîne que M_u est toujours négatif. On en déduit $\overline{M_u} = -\frac{|\Delta m_a|}{\tau}$. Le tableau ci-dessous ($a = 6,3$ km) indique les valeurs numériques du moment moyen de cette force de frottement.

(H) $P = 200$ HPa $\rho = 0.3$ kg/m ³	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a \rho} = 452$ m/s	$\longrightarrow$ $\tau = 3$ j $\overline{M_u} = -500$ N/m ²	$u = 20$ m/s $\frac{m_a}{a \rho} = 431$ m/s
(B) $P = 1000$ HPa $\rho = 1.2$ kg/m ³	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a \rho} = 452$ m/s	$\tau = 10$ j $\overline{M_u} = -200$ N/m ² $\longleftarrow$	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a \rho} = 412$ m/s
	10° S	10° S à 20° N	20° N

- 6) Comparer les valeurs de u observées dans la cellule de Hadley avec celles que l'on obtiendrait si l'on faisait disparaître soudainement les forces de frottement ainsi que le forçage (thermique). On pourra utiliser la table 2 pour ce calcul.

En l'absence de frottement, l'équation de conservation $\frac{Dm_a}{Dt} = 0$ implique que m_a est constant le long d'une trajectoire. La relation $u_1 = u_0 \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} + \Omega a \left(\frac{\cos^2 \phi_0}{\cos \phi_1} - \cos \phi_1 \right)$ permet donc de calculer la vitesse u_1 à la latitude ϕ_1 connaissant la vitesse u_0 à la latitude ϕ_0 . En utilisant la table 2, on voit que les quatre vitesses seraient $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 43 \\ -41 & 43 \end{pmatrix}$ m/s au lieu des valeurs $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ m/s observées. La vitesse est donc freinée de 41 m/s près du sol et de 23 m/s près de la tropopause.

- 7) Est-il normal de trouver un frottement du même ordre de grandeur à la tropopause qu'à la troposphère ? En déduire une critique des hypothèses d'écoulement stationnaire et zonal et invoquer un mécanisme susceptible d'extraire de la quantité de mouvement à la partie haute de la cellule de Hadley.

On pourrait, à juste titre, supposer que le frottement turbulent de la cellule de Hadley sur la tropopause est négligeable devant le frottement sur le sol. Ce sont en fait les fluctuations temporelles et spatiales (en fonction de la longitude) qui sont responsables de l'extraction de moment cinétique dans la partie haute de la cellule de Hadley. Le moment cinétique ainsi perdu se retrouve aux moyennes et hautes latitudes. Les hypothèses d'écoulement stationnaire et zonal ne sont donc pas valides, sauf si on s'intéresse aux moyennes temporelles et zonales. Dans ce cas, il faut prendre en compte la moyenne des termes non linéaires dans les équations moyennées, ce qui introduit de nouveaux termes de flux. On appelle "flux d'Eliassen-Palm" le flux de moment cinétique obtenu après cette prise de moyenne.

PC4.3 Jet d'ouest aux moyennes latitudes

- 8) À partir du système d'équations dans le cadre des approximations hydrostatique, de Boussinesq et de couche mince, écrire la relation de l'équilibre géostrophique. On supposera que le frottement est négligeable et que l'écoulement est indépendant de la longitude λ . En examinant la figure 4, commenter la validité de ces hypothèses et de cet équilibre aux moyennes latitudes.

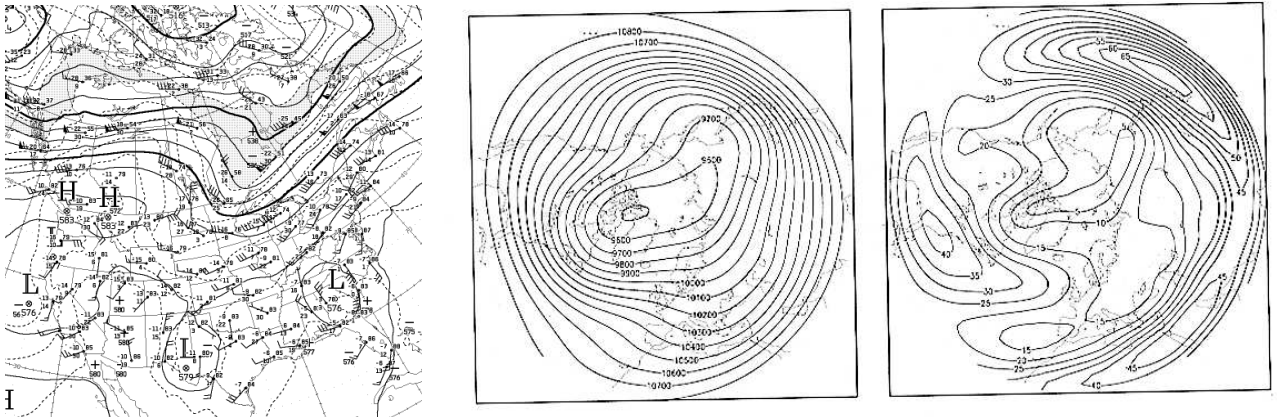


Figure 4 : a) Écoulement au niveau 500 HPa. — isobare, - - - isotherme, $\longleftrightarrow$ vecteur vitesse
Écoulement au niveau 250 HPa : b) géopotential (m) et c) module de la vitesse (m/s).

La relation géostrophique la plus générale s'écrit $\tan \phi \frac{uv}{a} = -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi$ et $-\tan \phi \frac{u^2}{a} = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi$. En supposant qu'il n'y a pas de dépendance avec λ , on obtient que $v = 0$ et $-\tan \phi \frac{u^2}{a} + 2 \Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi}$. La Figure 4a) montre que le vecteur champ de vitesse suit bien les isohypses (iso-géopotential) à 500 HPa qui ont une forme très voisine des isobares à altitude constante (environ 5000 m). Les figure 4b et 4c (250 HPa) montrent que l'intensité de la vitesse augmente lorsque les isohypses (iso-géopotential) se resserrent. Cependant, on voit que l'hypothèse de zonalité de l'écoulement n'est pas bien vérifiée.

- 9) Estimer le rapport entre le terme de sphéricité $\operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a}$ et le terme de Coriolis $2\Omega u \sin \phi$. En déduire que l'on peut négliger le terme de sphéricité pour un raisonnement qualitatif et semi-quantitatif.

La rapport du premier terme sur le second est $\frac{u}{2\Omega a \cos \phi}$ qui est de l'ordre de 10^{-1} . On peut donc négliger le terme de sphéricité pour une estimation grossière de la circulation.

- 10) On suppose que l'écoulement est zonal et géostrophique aux moyennes latitudes. Écrire la relation du vent thermique dans le cadre de ces hypothèses. À partir de l'examen de la figure 3, donner alors une estimation du profil de vent $u(z)$ aux moyennes latitudes que l'on centrera à 40° N. Comparer avec le profil de vitesse de la figure 2.

En négligeant le terme de sphéricité, l'équilibre géostrophique s'écrit $v = 0$ et $2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a\rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi}$. En dérivant cette relation par rapport à z , on obtient la relation du vent thermique $2\Omega \sin \phi \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{a\rho_r} \gamma \frac{\partial s}{\partial \phi}$. Comme $S = C_p \operatorname{Ln} \theta$ et $\gamma = \frac{g}{C_p}$, on obtient finalement $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$. En notant localement $dy = a d\phi$, on obtient la relation $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$. On voit sur la figure 3 qu'une distance $\Delta L \sim 2\,000$ km entre 30° N et 50° N correspond à un écart $\Delta \theta \sim 10^\circ$ K. On en déduit la valeur $\Lambda = \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ que l'on considère comme constante dans la troposphère. Comme la vitesse est nulle au sol, le modèle conduit à un profil linéaire $u(z) = \Lambda z$. Au sommet de la troposphère la vitesse u de ce profil est égale à 20 m/s, ce qui est conforme aux observations de la figure 2.