

PC3 : Forces d'inertie et ondes d'inertie

L'objet de cette PC est d'illustrer le rôle des forces d'inertie. La première partie s'intéresse au cas de mouvements horizontaux stationnaires. La seconde partie s'intéresse aux ondes d'inertie.

PC3.1 Écoulements circulaires

On s'intéresse aux écoulements circulaires $\underline{U}(r, \theta) = U_\theta(r) \underline{e}_\theta(\theta)$ en supposant connue la distribution de pression radiale $p(r)$. On cherche les distributions de vitesse azimuthale $U_\theta(r)$ permettant de satisfaire l'équilibre $\underline{0} = \underline{C}_e + \underline{C}_o + \underline{P}$ entre la force centrifuge $\underline{C}_e$, la force de Coriolis $\underline{C}_o$ et la force de pression $\underline{P}$. On note $f = 2\Omega \sin \phi$ le paramètre de Coriolis.

- 1) Exprimer les forces $\underline{C}_e = C_e \underline{e}_r$, $\underline{C}_o = C_o \underline{e}_r$ et $\underline{P} = P \underline{e}_r$ en fonction de $U_\theta(r)$, $\frac{\partial p}{\partial r}(r)$ et r , ainsi que l'équation de leur équilibre.

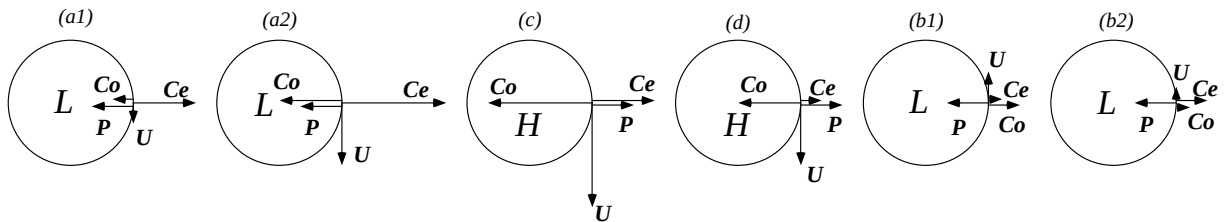
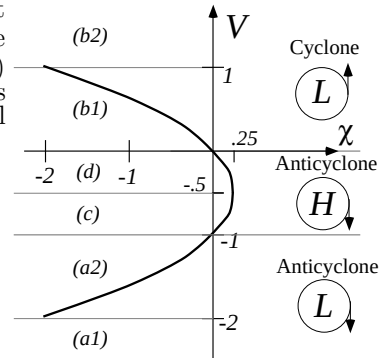
La force centrifuge est $\underline{C}_e = C_e \underline{e}_r = \frac{U_\theta^2}{r} \underline{e}_r$, d'où $C_e = \frac{U_\theta^2}{r}$. La force de Coriolis est $\underline{C}_o = C_o \underline{e}_r = f U_\theta \underline{e}_r$, d'où $C_o = f U_\theta$. La force de de pression est $\underline{P} = P \underline{e}_r = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r$, d'où $P = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$. L'équilibre $0 = C_e + C_o + P$ s'écrit donc $0 = \frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta - \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$.

- 2) En notant $V = \frac{U_\theta}{f r}$ et $\chi = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{f^2 r}$, représenter la courbe des solutions de l'équilibre dans un diagramme (χ, V) . Distinguer les cas où $\underline{0}$ est un maximum (H) ou minimum (L) de pression, ainsi que les cas où la circulation est anticyclonique ou cyclonique. Montrer que $\frac{C_e}{C_o} = V$, $\frac{P}{C_e} = -1 - \frac{1}{V}$ et $\frac{P}{C_o} = -1 - V$. En déduire six schémas de trajectoires circulaires correspondant aux différents signes des forces ainsi qu'à la comparaison de leurs modules respectifs.

Avec ces notations, l'équilibre s'écrit $V^2 + V + \chi = 0$. La courbe des solutions est une parabole dans le plan (χ, V) . Les solutions n'existent que pour $\chi \leq \frac{1}{4}$. La circulation est cyclonique pour $V > 0$ et anticyclonique pour $V < 0$. La pression est maximum (H) pour $\chi > 0$ et minimum (L) pour $\chi < 0$. La courbe des solutions est donc divisée en trois régions caractérisées par un cyclone normal pour $V > 0$, un anticyclone normal pour $V < 0$ et un anticyclone anormal pour $V < 0$ et $\chi < 0$. Les six cas

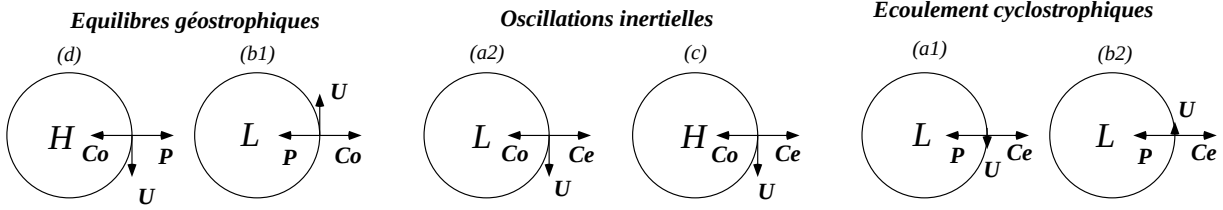
- | | | |
|---------------------|-------------------------|---|
| (a ₁) : | $V < -2$ | avec $P < C_o < 0 < C_e$ et $ C_e = P + C_o $ |
| (a ₂) : | $-2 < V < -1$ | avec $C_o < P < 0 < C_e$ et $ C_e = P + C_o $ |
| (c) : | $-1 < V < -\frac{1}{2}$ | avec $C_o < 0 < P < C_e$ et $ C_o = P + C_e $ |
| (d) : | $-\frac{1}{2} < V < 0$ | avec $C_o < 0 < C_e < P$ et $ C_o = P + C_e $ |
| (b ₁) : | $0 < V < 1$ | avec $P < 0 < C_e < C_o$ et $ P = C_e + C_o $ |
| (b ₂) : | $1 < V$ | avec $P < 0 < C_o < C_e$ et $ P = C_e + C_o $ |

correspondent à six schémas de trajectoires circulaires différents.



- 3) On s'intéresse aux cas limites pour lesquels une force est négligeable devant les deux autres. Décrire les "équilibres géostrophiques" correspondant au cas où C_e est négligeable, les "oscillations inertielles" correspondant au cas où P est négligeable et enfin les "écoulements cyclostrophiques" correspondant au cas où C_o est négligeable. Pourquoi peut-on appeler $Ro = |V|$ le nombre de Rossby local ? Quel régime correspond aux petits nombres de Rossby locaux ?

Les “équilibres géostrophiques” sont obtenus pour $|V| \ll 1$, c'est-à-dire lorsque le nombre de Rossby local $Ro = |V|$ est petit devant 1. La force centrifuge C_e est négligeable et l'équilibre $C_o + P = 0$ s'écrit $f U_\theta = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$. On peut avoir un anticyclone normal (d) ou un cyclone normal (b_1). Les “oscillations inertielles” sont obtenues pour $V \sim -1$. La force de pression P est négligeable et l'équilibre $C_e + C_o = 0$ s'écrit $\frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta = 0$. On peut avoir un anticyclone anormal (a_2) ou un anticyclone normal (c). Les “écoulements cyclostrophiques” sont obtenus pour $Ro = V \gg 1$, c'est-à-dire pour de très grands nombres de Rossby. La force de Coriolis C_o est négligeable et l'équilibre $C_e + P = 0$ s'écrit $\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$. On peut avoir un anticyclone anormal (a_1) ou un cyclone normal (b_2).



- 4) On considère une tornade telle que $U \sim 50$ m/s, $R \sim 300$ m et $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et un cyclone tropical tel que $U \sim 50$ m/s, $R \sim 10^5$ m et $f \sim 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. À quels types d'équilibres correspondent ces écoulements.

Le nombre de Rossby $Ro = V = \frac{U}{fR}$ est tel que $|Ro| = 10^3 \gg 1$ pour la tornade et $|Ro| = 20 > 2$ pour le cyclone. La tornade est clairement un écoulement cyclostrophique, insensible à la force de Coriolis, tandis que le cyclone tropical est un écoulement de type (a_1) ou (b_2). Leur centre correspond toujours à un minimum de pression. Théoriquement, la tornade et le cyclone tropical peuvent être cycloniques ou anticycloniques. Dans la réalité (et dans l'hémisphère Nord), le cas anticyclonique est rarement observé pour les tornades et jamais pour les cyclones tropicaux.

- 5) Les oscillations inertielles sont rares dans l'atmosphère, car le gradient de pression n'est jamais nul, mais fréquentes dans l'océan. Calculer le sens et la période de rotation d'une bouée dérivante soumises à de telles oscillations inertielles. Comparer cette période à la période d'un pendule de Foucault.

Dans l'hémisphère Nord, ces mouvements sont anticycloniques. Comme $\frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta = 0$, on a $U_\theta = -f r$. La période de rotation est donc $T = \left| \frac{2\pi r}{U_\theta} \right| = \frac{2\pi}{f}$. La période du pendule de Foucault est $T_f = \frac{2\pi}{\Omega \sin \phi}$ où Ω est la vitesse de rotation de la terre et ϕ la latitude. Comme $f = 2\Omega \sin \phi$, on a $T = \frac{1}{2} T_f$.

- 6) On considère des vents typiques $U_\theta \sim 10$ m/s observés aux moyennes latitudes pour $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. À partir de quelle échelle R peut-on considérer que la vitesse est presque géostrophique ? Montrer que dans ce cas on peut écrire $U_g/U_\theta = 1 + V$ où U_g est la vitesse géostrophique et $V = \frac{U_\theta}{fR}$ le nombre de Rossby. En déduire une règle pratique permettant de comparer la vitesse réelle et la vitesse géostrophique dans les anticyclones et dépressions de petites tailles. Expliquer pourquoi les vents peuvent être plus intenses dans les dépressions que dans les anticyclones.

La vitesse est géostrophique pour $Ro = |V| = \left| \frac{U_\theta}{fR} \right| \ll 1$, c'est-à-dire $R \gg 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km}$. C'est le cas des anticyclones (d) et dépressions (b_1) observés aux moyennes latitudes. En utilisant la définition de la vitesse géostrophique, l'équilibre des forces s'écrit $\frac{U_\theta^2}{R} + f U_\theta = f U_g$. On en déduit $\frac{U_g}{U_\theta} = 1 + \frac{U_\theta}{fR} = 1 + V$. Si l'anticyclone ou la dépression sont de petite taille Ro sera grand (moins petit). Comme $U_\theta < 0$ (donc $V < 0$) pour les anticyclones, le vent réel y est plus fort que le vent géostrophique. Comme $U_\theta > 0$ (donc $V > 0$) pour les dépressions, le vent réel y est à l'inverse plus faible. On a vu que l'on doit avoir $\frac{1}{\rho_r} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq \frac{f^2 |R|}{4}$ pour les anticyclones, alors qu'aucune limitation n'est imposée pour le gradient de pression des dépressions. Ceci explique pourquoi les vents des dépressions sont souvent plus intenses que les vents des anticyclones.

PC3.2 Ondes d'inertie

- 7) Écrire les équations de base dans le cadre de l'approximation de Boussinesq à une latitude où le paramètre de Coriolis est f . Montrer que l'on peut se ramener au cas $s = 0$ si l'entropie est homogène à un instant donné et si $F_e = 0$. Rappeler l'expression de la pression totale.

Les équations sont $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{D}{Dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \gamma s \underline{k} - f \underline{k} \wedge \underline{U}$ où $\underline{k}$ est le vecteur vertical unitaire. En effet, $\underline{F} = 0$ puisque le fluide est parfait, et, puisque $F_e = 0$, on a $\frac{Ds}{Dt} = 0$. On peut alors choisir l'état homogène observé à un instant particulier pour l'entropie de référence. La pression totale est $P_r + p$.

- 8) Écrire les équations linéarisées autour de l'état de base au repos $p = 0$, $s = 0$ et $\rho = 0$ et en notant $\underline{U}$ la vitesse et $\tilde{p}$ la perturbation de pression.

Les équations linéarisées sont $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + f \underline{k} \wedge \underline{U} + \frac{1}{\rho_r} \nabla \tilde{p} = 0$.

- 9) On cherche des solutions "ondes planes" sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}) e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$. Écrire le système linéaire que doivent vérifier les composantes complexes de cette solution.

En reportant dans les équations linéarisées on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & 0 & ik \\ f & -i\omega & 0 & il \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ ik & il & im & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{p}/\rho_r \end{pmatrix} = 0. \quad (1)$$

- 10) Montrer que l'on peut se ramener au cas $l = 0$ sans perte de généralité. En déduire que la relation de dispersion des ondes d'inertie dans le cas général peut s'écrire sous la forme $\omega = f |\sin \theta|$.

Comme le système est invariant par rotation dans un plan horizontal, il suffit de changer les axes de coordonnées pour se ramener au cas $l = 0$. La relation de dispersion est obtenue en annulant le déterminant du système linéaire, ce qui conduit à

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & 0 & ik \\ f & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ ik & 0 & im & 0 \end{vmatrix} = f^2 m^2 - \omega^2 (k^2 + m^2) = 0. \quad (2)$$

On en déduit que la relation de dispersion est, dans le cas général $l \neq 0$, $\omega^2 = f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}$.

- 11) Transformer les équations en $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ en un système d'équations pour les nouvelles variables $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{w}, \tilde{p})$ avec $\tilde{\zeta} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ et $\tilde{\delta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$. Éliminer $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{p}$ pour n'obtenir qu'une seule équation en $\tilde{w}$. Retrouver la relation de dispersion dans le cadre de ce changement de variable.

En combinant les équations d'évolution de $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, on obtient $\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + f \tilde{\delta} = 0$ et $\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} - f \tilde{\zeta} + \frac{1}{\rho_r} \nabla_H \tilde{p} = 0$. L'équation d'évolution de la vitesse verticale est $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_r} \tilde{p} = 0$ et l'équation de continuité s'écrit $\tilde{\delta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0$. La relation de dispersion s'obtient donc en annulant le déterminant du nouveau système linéaire en $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{w}, \tilde{p}/\rho_r)$, ce qui conduit à

$$\begin{vmatrix} -i\omega & f & 0 & 0 \\ f & -i\omega & 0 & -k_H^2 \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ 0 & 1 & im & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(k_H^2 + m^2) + f^2 m^2 = 0, \quad (3)$$

avec $k_H^2 = k^2 + l^2$. En éliminant $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{p}/\rho_r)$, on obtient l'équation $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_H \tilde{w} = 0$ et donc la relation de dispersion $(-\omega^2 + f^2)m^2 - \omega^2 k_H^2 = 0$. Les deux approches permettent de retrouver la relation $\omega^2 = f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}$.

- 12) Appliquer l'opérateur rotationnel à l'équation de quantité de mouvement linéarisée pour obtenir l'équation d'évolution de $\nabla \wedge \underline{U}$. En déduire que si l'écoulement est irrotationnel ou stationnaire, la vitesse ne dépend pas de z (théorème de Taylor-Proudman).

En utilisant $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, on obtient $\nabla \wedge (\underline{k} \wedge \underline{U}) = -\frac{\partial}{\partial z} \underline{U}$. L'équation linéarisée de la vorticité est donc $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \underline{U}) = f \frac{\partial \underline{U}}{\partial z}$. Si le rotationnel est nul ou constant dans le temps on a $\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \underline{0}$. L'écoulement est donc bidimensionnel.

- 13) Appliquer une nouvelle fois l'opérateur rotationnel pour pouvoir déduire facilement la relation de dispersion.

En utilisant la relation $\nabla \wedge (\nabla \wedge \underline{U}) = -\Delta \underline{U}$ valable lorsque $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, on obtient l'équation $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \underline{U} + f^2 \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} = 0$. On en déduit la relation de dispersion $\omega^2(k^2 + l^2 + m^2) - f^2 m^2 = 0$.

- 14) On note θ l'angle polaire du vecteur $\underline{K}$. Tracer la pulsation ω en fonction de l'angle θ . Montrer que la vitesse $\underline{U}$ des particules ainsi que la vitesse de groupe appartiennent aux plans de phase.  tudier le cas limite $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(\underline{k}) = f |\sin \theta|$. La pulsation ω croît de 0 à f lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'incompressibilité $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ entraîne $\underline{k} \cdot \underline{U} = 0$, ce qui montre que la vitesse est orthogonale à $\underline{k}$ et appartient donc aux plans de phase. Comme la relation de dispersion ne dépend pas du module de $\underline{k}$, la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k}) = \text{grad}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k})$ est orthogonale à $\underline{k}$. Lorsque le vecteur d'onde $\underline{k}$ est vertical, la pulsation est donc égale à f . On retrouve les oscillations inertielles.

