

PC2 : Ondes de gravité internes

L'objet de cette PC est d'examiner en détail les propriétés des ondes de gravité internes. La PC est construite à partir de l'exemple d'un gaz parfait, tirant ainsi partie de la simplicité de la loi d'état. Les propriétés des ondes de gravité internes mise en évidence dans cette PC sont identiques pour un gaz plus complexe ou pour un fluide.

NB : Des animations de champs d'ondes internes monochromatiques ou émises par un obstacle oscillant (croix de Saint-André) peuvent être consultées à la rubrique "Ondes dans les Fluides" de l'URL suivant :

<http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/>

PC2.1 Rappel sur l'approximation de Boussinesq

- 1) Un gaz parfait est défini par les lois d'état $P = \rho R T$, $e = C_v T$ et $T dS = de + P d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ où C_v et R sont des constantes. On note $C_p = C_v + R$ et $\Gamma = C_p/C_v$. Dédurre de ces définitions l'expression de l'entropie S en fonction de P et de ρ .

On peut écrire $T dS = C_v dT - \frac{P}{\rho^2} d\rho$ d'où $dS = C_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$. On a aussi $\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$ qui entraîne alors $dS = C_v \frac{dP}{P} - C_p \frac{d\rho}{\rho}$. On a finalement $S = C_v \ln P - C_p \ln \rho + Cste = C_v \ln (P \rho^{-\Gamma}) + Cste$.

- 2) On considère un état de référence tel que ρ_r et S_r sont constants. Montrer que l'on peut écrire $S - S_r \sim -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$ si ρ et S sont "proches" de l'état de référence et si la vitesse du son $c^2 = \Gamma R T$ tend vers l'infini. En déduire que l'expression $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim -\gamma(S - S_r)$ définissant γ entraîne $\gamma = g/C_p$.

L'équation d'état $dS = C_v \frac{dP}{P} - C_p \frac{d\rho}{\rho}$ entraîne $dS = -\frac{C_p}{\rho} (d\rho - \frac{1}{\Gamma R T} dP)$. En considérant que la vitesse du son est infinie et en remplaçant $d\rho$ et dS par $\rho - \rho_r$ et $S - S_r$, on obtient finalement $S - S_r \sim -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$. On en déduit que $\gamma = g/C_p$.

- 3) On considère un état de référence (P_r, S_r, ρ_r) où ρ_r et S_r sont des constantes et $P_r(z)$ dépend de z . Montrer que cet état ne peut pas simultanément satisfaire l'équation d'état et l'équilibre hydrostatique. Donner l'expression de $P_r(z)$ qui découle de l'équilibre hydrostatique.

Comme ρ_r et S_r sont constants, P_r devrait l'être aussi si la loi d'état était satisfaite. Le profil de pression de référence vérifie $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$, ce qui entraîne $P_r(z) = -\rho_r g z + Cste$.

- 4) Écrire les équations d'évolution d'un fluide parfait dans le cadre de l'approximation de Boussinesq $\rho \sim \rho_r$ et $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim \gamma(S - S_r)$ en notant $(P, S, \rho) = (P_r + p, S_r + s, \rho_r + \delta\rho)$ la masse volumique, la pression totale et l'entropie.

En utilisant $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$, les équations d'évolution sont $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g \underline{k} = -\frac{1}{\rho} (\nabla p + g \delta\rho \underline{k})$, $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{DS}{Dt} = \frac{Ds}{Dt} = 0$. En utilisant les approximations $\rho \sim \rho_r$ et $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim \gamma(S - S_r)$, on peut écrire $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \gamma s \underline{k}$. Ces équations ne sont valides que dans la mesure où $(p, s, \delta\rho)$ ne sont pas trop "grands".

- 5) On considère l'état de base $(u, v, w, P_r + p, S_r + s, \rho) = [0, 0, 0, P_r + \bar{p}(z), S_r + \bar{s}(z), \bar{\rho}(z)]$. On choisit désormais ρ plutôt que $\delta\rho = \rho - \rho_r$ pour exprimer les équations. On suppose connu le profil $\bar{s}(z)$. En déduire les profils $\bar{p}(z)$ et $\bar{\rho}(z)$ en supposant que cet état de base est solution des équations dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Montrer que cet état ne vérifie pas la loi d'état

des gaz parfaits.

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, la loi d'état est remplacée par la relation $S - S_r = -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$ et la pression P n'est plus qu'un champ déterminé par les équations du mouvement (c'est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité). Le profil de densité $\bar{\rho}(z)$ est donné par la relation $\bar{s}(z) = -\frac{C_p}{\rho_r}[\bar{\rho}(z) - \rho_r]$ et le profil d'écart de pression $\bar{p}(z)$ découle des équations à travers la relation hydrostatique $\frac{d}{dz}\bar{p}(z) = \rho_r \gamma \bar{s}(z)$.

PC2.2 Relation de dispersion des ondes internes

Les équations de l'approximation de Boussinesq s'écrivent donc

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0, \quad \frac{D\underline{U}}{Dt} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \gamma s \underline{k} \quad \text{et} \quad \frac{Ds}{Dt} = 0.$$

Les variables d'état sont $(P, S, \rho) = [P_r(z) + p, S_r + s, \rho_r + \delta \rho]$ avec ρ_r et S_r constants et $P_r(z)$ défini par $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$ où g est la gravité locale ($\Phi \sim g z$). Dans cette approximation, la loi d'état a été remplacée par la relation $\delta \rho = -\frac{\gamma \rho_r}{g} s$.

- 6) On suppose maintenant que le repère est cartésien avec $\underline{k} = \underline{e}_z$ et que $\underline{\Omega} = \underline{0}$, ce qui revient à s'intéresser à des écoulements pour lesquels les effets de la rotation sont négligeables. On se donne un état de base $[P_r(z) + \bar{p}(z), S_r + \bar{s}(z), \bar{\rho}(z)]$. Montrer qu'il vérifie $\frac{d\bar{p}}{dz}(z) = \rho_r \gamma \bar{s}(z)$ et $\bar{\rho}(z) = \rho_r - \frac{\gamma \rho_r}{g} \bar{s}(z)$. Écrire les équations du mouvement linéarisées autour de l'état de base en notant $(u, v, w, P_r + p, S_r + s, \rho) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, P_r + \bar{p} + \tilde{p}, S_r + \bar{s} + \tilde{s}, \bar{\rho} + \tilde{\rho})$. Montrer que la fréquence de Brunt-Väisälä $\bar{N}(z)$, définie par la relation $\bar{N}^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz}$, vérifie la relation $\bar{N}^2 = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{d\bar{\rho}}{dz}(z)$.

L'état de base étant solution des équations, il vérifie les relations indiquées. La relation entre $\bar{p}(z)$ et $\bar{s}(z)$ entraîne que $\bar{N}^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz} = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$. Les équations linéarisées s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \gamma \tilde{s}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \bar{N}^2 \tilde{w}.$$

On peut ajouter à ces équations la relation $\tilde{s} = -\frac{g}{\rho_r} \tilde{\rho}$.

- 7) On suppose que $\bar{N} = N_0$ est constant et on cherche alors des solutions du système linéarisé sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{s}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s}) \exp(ikx + ily + imz - i\omega t)$. Écrire le système linéaire que vérifient les amplitudes complexe de cette onde plane.

Le système linéaire s'écrit

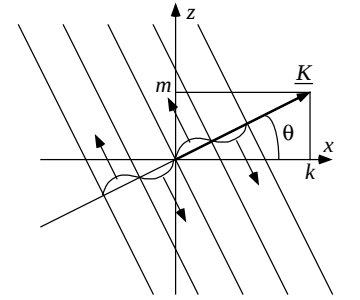
$$-i\omega \hat{u} + i k \frac{\hat{p}}{\rho_r} = 0, \quad -i\omega \hat{v} + i l \frac{\hat{p}}{\rho_r} = 0, \quad -i\omega \hat{w} + i m \frac{\hat{p}}{\rho_r} - \gamma \hat{s} = 0, \quad k \hat{u} + l \hat{v} + m \hat{w} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\gamma} N_0^2 \hat{w} - i\omega \hat{s} = 0.$$

- 8) En supposant que $\omega \neq 0$, éliminer $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{s})$ pour n'obtenir qu'une seule équation en $\hat{w}$. En déduire la relation de dispersion des ondes gravité interne peut s'écrire $\omega^2 = N_0^2 \frac{k_H^2}{K^2}$ avec $k_H = \sqrt{k^2 + l^2}$ et $K = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$.

On élimine tout d'abord $\hat{u}$ et $\hat{v}$ et $\hat{p}$ en écrivant $\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{p}$, $\hat{v} = \frac{l}{\omega} \hat{p}$, $\hat{p} = -\rho_r \frac{m\omega}{k^2+l^2} \hat{w}$. L'élimination de $\hat{s}$ s'écrit $\hat{s} = \frac{N_0^2}{i\gamma\omega} \hat{w}$. En reportant dans l'équation d'évolution de la vitesse verticale, on obtient alors $-i\omega \hat{w} - im \frac{m\omega}{k^2+l^2} \hat{w} = \frac{N_0^2}{i\gamma\omega} \gamma \hat{w}$ d'où $[\omega^2(k^2+l^2+m^2) - N_0^2(k^2+l^2)]\hat{w} = 0$. Le système admet des solutions non nulles si et seulement si la relation de dispersion $\omega^2 = N_0^2 \frac{k^2+l^2}{k^2+l^2+m^2} = N_0^2 \frac{k^2}{K^2}$ est satisfaite. On peut résumer les éliminations successives en écrivant $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s}) = \hat{w} \left(-\frac{mk}{k^2+l^2}, -\frac{ml}{k^2+l^2}, 1, -\rho_r \frac{m\omega}{k^2+l^2}, -i \frac{N_0^2}{\gamma\omega} \right)$.

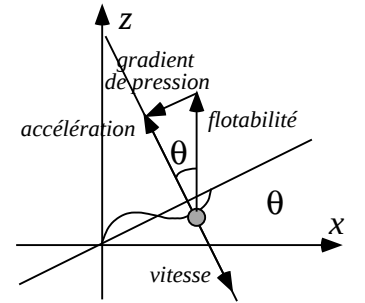
- 9) Montrer que l'on peut toujours ramener cette recherche d'onde plane au cas $l = 0$, sans perte de généralité. On note $\underline{K} = k \underline{e}_x + m \underline{e}_z$, $K = \sqrt{k^2 + m^2}$, $\underline{e}_k = \frac{1}{K} \underline{K} = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ et $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_z$. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $\omega = \pm N_0 \frac{k}{K} = \pm N_0 \cos \theta$. Montrer ensuite que le champ de vitesse d'une onde de gravité interne peut s'écrire, dans l'espace réel, sous la forme $\tilde{\underline{U}}(x, y, z, t) = U_m \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_\theta$, où U_m est un nombre réel quelconque. Relier le fait que les trajectoires soient parallèles aux plans des phases à l'incompressibilité du fluide.

Comme le problème est invariant par rotation des axes horizontaux autour d'un axe vertical, on peut se ramener au cas $l = 0$. Les deux relations de dispersion $\omega = \pm N_0 \frac{|k|}{K}$ sont équivalentes aux deux relations $\omega = \pm N_0 \frac{k}{K} = \pm N_0 \cos \theta$ où θ varie entre 0 et 2π . En changeant l'origine de l'espace ou du temps, on peut se ramener au cas où $\hat{w}$ est réel et poser $\tilde{u} = -\frac{m}{k^2+m^2} U_m$ et $\tilde{w} = \frac{k}{k^2+m^2} U_m$ avec U_m réel. Comme $\tilde{v} = 0$ (puisque $l = 0$), on peut écrire $\tilde{\underline{U}} = U_m \underline{e}_\theta$. La relation $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ entraîne que le vecteur $\tilde{\underline{U}}$ des composantes complexes vérifie $\underline{K} \cdot \tilde{\underline{U}} = 0$, ce qui impose au champ de vitesse $\tilde{\underline{U}}$ d'osciller en restant parallèle aux plans de phase. Dans le cas des ondes internes, les trajectoires décrivent des segments de droite dans le plan engendré par le vecteur d'onde $\underline{K}$ et la verticale.



- 10) Interpréter physiquement ces oscillations en considérant une particule solide de volume $\mathcal{V}$ constant et de densité $\rho_* = \bar{\rho}(z_*)$ constante oscillant autour de la position z_* et contraintes par le gradient de pression du fluide à rester dans un plan de phase.

Soit $x \underline{e}_x + z \underline{e}_z = X(t)(-\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_z)$ le mouvement de la particule solide. Son altitude est alors $z_* + \zeta(t)$ avec $\zeta(t) = X \cos \theta$. La force de flottabilité est $g \mathcal{V} [\bar{\rho}(z_* + \zeta) - \bar{\rho}(z_*)] \underline{e}_z \sim \mathcal{V} g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}(z_*) \zeta(t) \underline{e}_z$. En utilisant la définition $N_0^2 = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}(z)$, cette poussée d'Archimède est égale à $-\mathcal{V} \rho_r N_0^2 \zeta(t) \underline{e}_z$. Pour une onde monochromatique, la force de pression $\nabla \bar{p} = i \underline{K} \bar{p} \exp(i \underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ est parallèle à $\underline{K}$. En projetant les forces sur la direction $\underline{e}_\theta$, la loi fondamentale de la dynamique entraîne donc $\ddot{X}(t) = -N_0^2 \cos \theta \zeta(t) = -N_0^2 \cos^2 \theta X(t)$. On obtient alors $X(t) = X_m \cos[(N_0 \cos \theta)t + \varphi]$ et $\zeta(t) = \zeta_m \cos[(N_0 \cos \theta)t + \varphi]$ avec $X_m = \zeta_m \cos \theta$. La fréquence $N_0 \cos \theta$ est bien celle de l'oscillation des ondes.

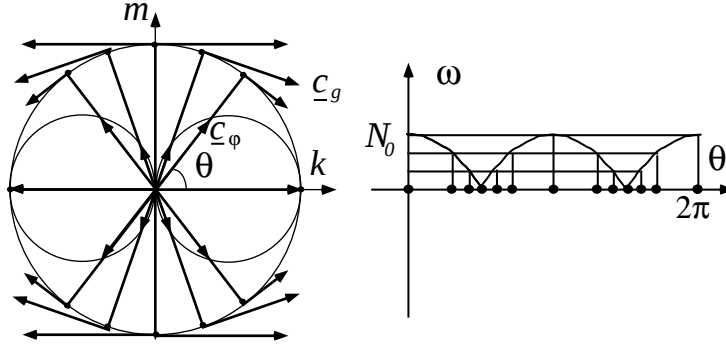


- 11) En considérant la relation de dispersion $\omega = N_0 \frac{k}{K} = N_0 \cos \theta$, donner l'expression des champs de pression $\tilde{p}(x, y, z, t)$, d'entropie $\tilde{s}(x, y, z, t)$ et de masse volumique $\tilde{\rho}(x, y, z, t)$ dans l'espace réel en fonction de U_m . Montrer que les ondes $(\omega, \underline{K})$ associées à la relation de dispersion $\omega = -N_0 \cos \theta$ peuvent être vues comme des ondes $(-\omega, -\underline{K})$ associées à la relation de dispersion $\omega = N_0 \cos \theta$. En déduire que l'on peut se limiter à l'étude des $\omega \geq 0$.

Comme $\hat{p} = -\frac{m\omega}{\rho_r K^2} \hat{w}$ et $\hat{s} = -i \frac{N_0^2}{\gamma\omega} \hat{w}$, on a $\tilde{p} = -\frac{mN_0}{\rho_r K^3} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\tilde{s} = \frac{N_0}{\gamma} U_m \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\tilde{\rho} = \frac{N_0 \rho_r}{g} U_m \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$. Comme les équations du problème sont réelles, toute solution de la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{K})$ est telle que $-\omega = \Omega(-\underline{K})$. On peut donc ne considérer que les $\omega \geq 0$.

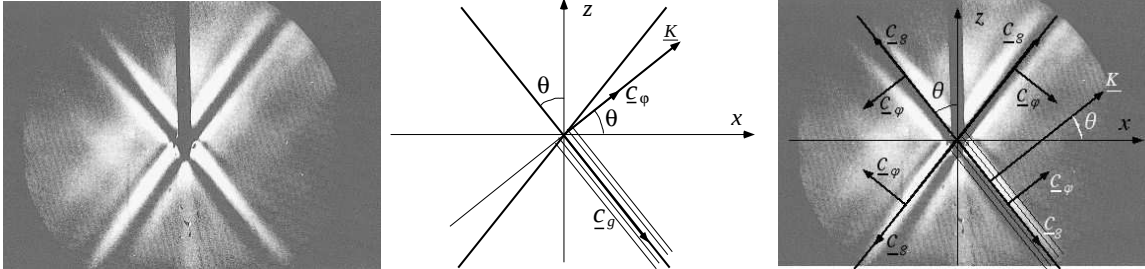
- 12) Tracer les courbes iso- ω de la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{K}) = N_0 |\cos \theta|$ dans le plan (k, m) en ne considérant que les $\omega \geq 0$. En déduire que la vitesse de groupe $\underline{c}_g$, définie par $\underline{c}_g(\underline{K}) = \frac{\partial \Omega}{\partial k} \underline{e}_k + \frac{\partial \Omega}{\partial m} \underline{e}_m$, est perpendiculaire à la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{K}) = \frac{\Omega(\underline{K})}{K} \underline{e}_k$. Mettre en relation ce résultat avec la direction des trajectoires.

Comme $\Omega(\underline{K}) = N_0 |\cos \theta|$ ne dépend pas du module K , les iso- ω sont des droites passant par l'origine. On en déduit que la vitesse de groupe $\underline{c}_g$, qui égale au gradient de la fonction $\Omega(\underline{K})$ est perpendiculaire à $\underline{K}$ et donc à la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi$. La vitesse de groupe est donc parallèle à la vitesse du fluide. Ceci est consistant avec le fait que la vitesse de groupe caractérise la vitesse de propagation de l'énergie. En utilisant l'expression du gradient en coordonnées polaires on peut écrire $\underline{c}_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} \underline{e}_k + \frac{1}{K} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$. On en déduit que $\underline{c}_g = -\frac{N_0}{K} \sin \theta \underline{e}_\theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ et $\underline{c}_g = \frac{N_0}{K} \sin \theta \underline{e}_\theta$ pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



PC2.3 Application à deux problèmes d'émission d'ondes

- 13) On fait osciller une sphère autour de sa position moyenne avec une pulsation ω_0 . Un faisceau lumineux traverse l'expérience. Les fluctuations de densité, influant sur l'indice de réfraction de la lumière, sont visualisés sur un écran. Expliquer l'existence de la croix de Saint-André observée sur la figure et relier l'angle de ses branches à ω_0 et N_0 . Discuter la forme de cette croix lorsque ω_0 varie.

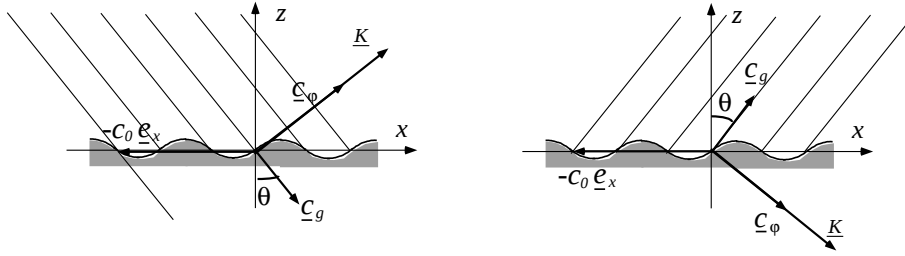


Seules les ondes de vecteur d'onde $\underline{K}$ vérifiant $\omega_0 = N_0 |\cos \theta|$ sont excitées par l'oscillation. Cette équation sélectionne donc les angles $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2\pi - \theta_0$, $\pi - \theta_0$ et $\pi + \theta_0$. Loin de la sphère (en pratique au bout de quelques longueurs d'ondes), seules les points de l'espace physique situés le long des droites passant par la sphère et parallèles aux quatre vitesses de groupe $\underline{c}_g$ possibles sont animées d'oscillations dues aux ondes. Le lieu des points oscillants forme alors une croix de Saint-André faisant un angle θ_0 avec la verticale. Pour $\omega_0 = 0$ on a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$: les particules oscillent infiniment lentement le long de l'axe des x . Lorsque ω_0 augmente, l'angle θ_0 diminue : les particules oscillent perpendiculairement à $\underline{K}$ et parallèlement à $\underline{c}_g$, propageant ainsi l'énergie dans cette direction. Pour $\omega_0 = N_0$, on a $\theta_0 = 0$: les particules oscillent sur un axe vertical. Pour $\omega_0 > N_0$, aucune onde n'est observée loin de la sphère : le milieu amortit les perturbations exponentiellement en fonction de la distance.

- 14) On considère maintenant que l'écoulement est généré par le déplacement à la vitesse $-c_0 \underline{e}_x$ d'une surface rigide ondulée de période $L_0 = 2\pi/k_0$ et d'amplitude h_m , c'est-à-dire par une condition

aux limites de glissement sur la surface mobile d'équation $z = h(x, t) = h_m \sin[k_0(x - c_0 t)]$. On suppose que h_m est suffisamment petit pour que l'approximation linéaire reste valide. Décrire les vecteurs d'onde des ondes de gravité admissibles pour ce problème en invoquant la stationnarité de l'onde dans le repère mobile.

Les ondes liées à une surface rigide de forme quelconque sont définies par les relations $N_0 \frac{k}{K} + c_0 k = 0$ et $-N_0 \frac{k}{K} + c_0 k = 0$. En supposant $c_0 > 0$, seules les ondes vérifiant $K = N_0/c_0$ sont émises. Dans le cas d'un sol mobile périodique, les conditions aux limites imposent que la vitesse au sol soit une fonction périodique de période L_0 . On doit donc avoir $k = \pm k_0$, ce qui impose que l'angle θ est solution de $k_0 = \pm K \cos \theta$ ou encore $k_0 c_0 / N_0 = \pm \cos \theta$. Si on note θ_0 la solution comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il y a deux vecteurs d'ondes admissibles de module N_0/c_0 et d'angles $\theta = \theta_0$ et $\theta = 2\pi - \theta_0$.



- 15) Restreindre encore les vecteurs d'onde admissibles en distinguant les ondes qui “freinent le sol” de celles qui le “poussent”. Comparer ce résultat avec le direction des vitesses de groupe.

La condition aux limites cinématique entraîne que $\tilde{w} = \frac{dh}{dt} \sim \frac{\partial h}{\partial t} = c_0 h_m \cos[k_0(x - c_0 t)]$. On en déduit que $\tilde{p} = -\frac{m k}{\rho_r K^3} N_0 \tilde{w} = -\frac{1}{2} \rho_r \sin(2\theta) \frac{N_0}{K} \tilde{w} = -\frac{1}{2} \rho_r \sin(2\theta) U_0 c_0 h_m \cos[k_0(x - c_0 t)]$. La force exercée par le fluide sur une parcelle rectangulaire de longueur L_0 en x et D en y est $\underline{F} = D \int_C p \underline{n} ds$, où C est la courbe d'équation $z = h(x)$ sur une période L_0 en x , $\underline{n}$ la normale au sol et s la coordonnée curviligne. Comme h_m est petit, on peut écrire approximativement $\underline{F} = D \int_0^{L_0} p \underline{n} dx$ avec $\underline{n} \sim h' \underline{e}_x + \underline{e}_y$. Comme p est une fonction périodique en x , on a $\underline{F} = D \int_0^{L_0} p h' dx \underline{e}_x = D \int_0^{L_0} p w dx \underline{e}_x = -\frac{1}{4} \rho_r \sin(2\theta) \frac{N_0}{K} (c_0 h_m)^2 \underline{e}_x$. Cette force s'oppose au mouvement seulement lorsque $\sin(2\theta) < 0$. La seule onde émise par le solide mobile est donc celle dont l'angle est $\theta = 2\pi - \theta_0$. La vitesse de groupe $\underline{c}_g$ associée à cette onde fait un angle $\pi/2 - \theta_0$ avec $\underline{e}_x$. L'onde est émise uniquement en aval de la traction. Ce résultat est conforme avec le sens de la vitesse de groupe.