

PC1 : Rappel de notions de base de la mécanique des fluides

Cette PC a pour but de réviser quelques notions de bases de la mécanique des fluides.

PC1.1 Traceurs dans un écoulement de déformation

On considère le mouvement de déformation suivant (λ est un paramètre fixe) :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \lambda(-x \underline{e}_x + y \underline{e}_y) . \quad (1)$$

1) Construire les lignes de courant associées à ce mouvement.

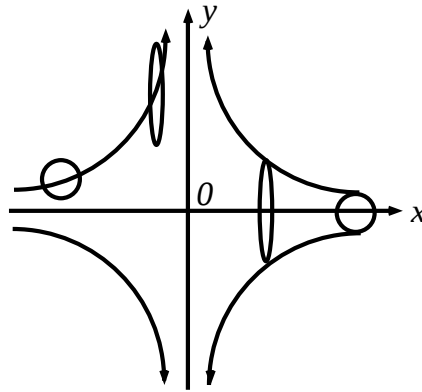
Les composantes de $\underline{U}$ s'écrivent $u = -\lambda x$, $v = \lambda y$ et $w = 0$. Les lignes de courant sont des courbes paramétrées $\underline{x}(s)$ (paramétrage non unique) telles que $\frac{d}{ds}\underline{x}(s) \wedge \underline{U}[\underline{x}(s), t] = \underline{0}$, ce que l'on écrit $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ de manière abrégée pour le plan (x, y) . Pour le présent exemple, la relation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ entraîne $d(xy) = 0$ d'où $xy = \text{cte}$. Les lignes de courants sont des hyperboles.

2) Construire les trajectoires associées à ce mouvement.

Les trajectoires s'obtiennent en résolvant $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ ce qui s'écrit ici $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$, $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ et $\frac{dz}{dt} = 0$. On en déduit que $\underline{x}(t) = \phi(\underline{X}, t) = X e^{-\lambda t} \underline{e}_x + Y e^{\lambda t} \underline{e}_y + Z \underline{e}_z$. Les trajectoires parcourent des courbes $xy = XY$ qui sont confondues avec les lignes de courant, comme c'est toujours le cas lorsque le champ de vitesse est stationnaire (indépendant du temps).

3) Calculer l'évolution d'une ligne matérielle circulaire de rayon R transportée par ce mouvement et centrée initialement en $\underline{X}_0$.

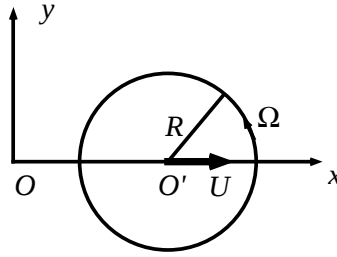
L'équation de la ligne matérielle à $t = 0$ est $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$, l'équation des trajectoires $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$ s'inverse en $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) = x e^{\lambda t} \underline{e}_x + y e^{-\lambda t} \underline{e}_y + z \underline{e}_z$. En notant $\underline{x}_0(t) = X_0 e^{-\lambda t} \underline{e}_x + Y_0 e^{\lambda t} \underline{e}_y + Z_0 \underline{e}_z$ la trajectoire issue de $\underline{X}_0$, l'équation de la ligne matérielle à l'instant t s'écrit $\left[\frac{x-x_0(t)}{R e^{-\lambda t}}\right]^2 + \left[\frac{y-y_0(t)}{R e^{\lambda t}}\right]^2 = 1$. C'est une ellipse qui devient de plus en plus allongée dans la direction y , le rapport entre grand axe et petit axe étant égale à $\exp(2\lambda t)$. Cet étirement est une première étape favorisant le mélange de grandeurs scalaires (par exemple l'ozone).



4) Calculer l'évolution d'un traceur passif $b(\underline{x}, t)$ pour ce mouvement en supposant que la concentration initiale est $b(\underline{x}, 0) = \alpha x$. Vérifier que $\frac{Db}{Dt} = 0$.

La description eulérienne $b(\underline{x}, t)$ est liée à la description lagrangienne $B(\underline{X}, t)$ par $b[\phi(\underline{X}, t), t] = B(\underline{X}, t)$. En l'absence de puit ou de source, $B(\underline{X}, t) = B(\underline{X}) = \alpha X$ est indépendant du temps. En utilisant $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t) = x e^{\lambda t} \underline{e}_x + y e^{-\lambda t} \underline{e}_y + z \underline{e}_z$, on obtient $b(\underline{x}, t) = \alpha e^{\lambda t} x$. Le gradient du traceur devient de plus en plus grand dans la direction x . On vérifie que l'on a bien $\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \underline{U} = 0$.

PC1.2 Fonctions et lignes de courant



- 5) On considère le mouvement de translation uniforme de vitesse $\underline{U}_1 = U \underline{e}_x$. Écrire la fonction de courant $\psi_1(x, y, t)$ associée à ce mouvement et décrire les lignes de courant.

La fonction de courant est définie par les relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ou encore $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \nabla \psi$ (on a automatiquement $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$). Comme $\underline{U} \cdot \nabla \psi = 0$, les lignes de courant sont des iso- ψ . On a ici $\psi_1(x, y, t) = -U y$. Les lignes de courant sont les droites de directions $\underline{e}_x$.

- 6) On considère le mouvement $\underline{U}_2$ constitué d'une rotation solide de vitesse angulaire Ω . Écrire la fonction de courant $\psi_2(x, y, t)$ associée à ce mouvement et tracer les lignes de courant.

La vitesse dans le tourbillon est $u(x, y) = -\Omega r \sin \theta$ et $v(x, y) = \Omega r \cos \theta$ où $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance au centre du tourbillon et $\theta(x, y)$ l'angle polaire que fait le vecteur $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y$ avec l'axe $\underline{e}_x$. On peut aussi écrire $\underline{U} = \Omega r \underline{e}_\theta$. On a donc $\psi_2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega r^2(x, y)$. En effet, $\nabla \psi_2 = \Omega r \underline{e}_r$ conduit à $\underline{e}_z \wedge \nabla \psi_2 = \Omega r \underline{e}_\theta$. En conclusion, la fonction de courant s'écrit $\psi_2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega r^2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega (x^2 + y^2)$. Les lignes de courant sont des cercles de centre $\underline{O}$.

- 7) On considère le mouvement $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ obtenu en composant les deux mouvements précédents. Écrire la fonction de courant $\psi_3(x, y, t)$ associée à ce mouvement et décrire les lignes de courants.

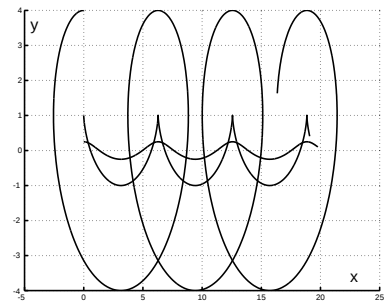
La fonction de courant est $\psi_3(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x - Ut, y)$. On a donc $\psi_3(x, y, t) = -U y + \frac{1}{2} \Omega [(x - Ut)^2 + y^2] = \frac{1}{2} \Omega [(x - Ut)^2 + (y - U/\Omega)^2] - \frac{1}{2} U^2/\Omega$. Les lignes de courant à l'instant t sont des cercles de centre $(Ut, U/\Omega)$.

- 8) Tracer les trajectoires de ce mouvement $\underline{U}_3$ et comparer avec les lignes de courant.

Les trajectoires s'obtiennent en résolvant les équations différentielles ordinaires couplées $\frac{dx}{dt} = U - \Omega y$ et $\frac{dy}{dt} = \Omega(x - Ut)$. En éliminant y on obtient $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\Omega^2(x - Ut)$ d'où $x = Ut + A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$ et $y = \frac{1}{\Omega}(U - \frac{dx}{dt}) = A \sin \Omega t - B \cos \Omega t$. En notant $\underline{x}(0) = X_0 \underline{e}_x + Y_0 \underline{e}_y$ la condition initiale, l'équation des trajectoires $\underline{x}(t)$ est donc

$$x = Ut + X_0 \cos(\Omega t) - Y_0 \sin(\Omega t) \quad \text{et} \quad y = X_0 \sin(\Omega t) + Y_0 \cos(\Omega t)$$

La figure ci-contre représente trois trajectoires obtenues pour $Y_0 = \lambda \frac{U}{\Omega}$ avec $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1, 4]$. Ce sont des trochoïdes avec comme cas particulier une cycloïde obtenue pour $Y_0 = \frac{U}{\Omega}$.



- 9) On considère le mouvement $\underline{U}_{24}$ obtenu en restreignant le mouvement de rotation solide $\underline{U}_2$ à un disque de centre O et de rayon R et en supposant que le mouvement est axisymétrique et irrotationnel à l'extérieur de ce disque. On suppose que le champ de vitesse est continu dans tout l'espace. Calculer la fonction de courant $\psi_4(x, y, t)$ associé au mouvement extérieur au disque.

Comme l'écoulement est irrotationnel à l'extérieur du disque, la formule de Stokes entraîne $\int_{C_r} \underline{U} dl = 0$, où C_r est une courbe entourant le disque de rayon R , est constant. On note $\underline{U}_4 = U_r(r) \underline{e}_r + U_\theta(r) \underline{e}_\theta$ la vitesse à l'extérieur du disque. La relation de continuité $\text{div } \underline{U}_4 = 0$, qui s'écrit $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0$ et la continuité de la vitesse en $r = R$ entraînent que $U_r = 0$. On a $2\pi U_\theta r = 2\pi (\Omega R) R$, d'où $U_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}$. Par définition de la fonction de courant, on a $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \nabla \psi_4$, ce qui entraîne $\frac{\partial}{\partial r} \psi_4 = v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}$ et donc $\psi_4 = \Omega R^2 \text{Ln } \frac{r}{R} + D$ où D est une constante. Comme $\psi_4 = \frac{1}{2} \Omega r^2$ pour $r \leq R$, la continuité entraîne que $D = \frac{1}{2} \Omega R^2$. En conclusion, la fonction de courant pour $r \geq R$ s'écrit

$$\psi_4(x, y, t) = \frac{\Omega R^2}{2} \left[1 + \text{Ln} \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \right].$$

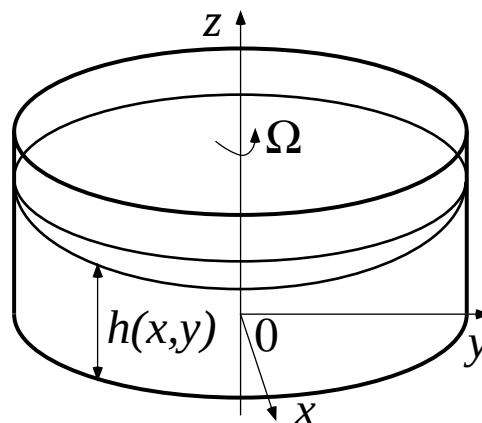
- 10) On considère le mouvement $\underline{U}_5 = \underline{U}_1 + \underline{U}_{24}$. Donner l'expression de la fonction de courant $\psi_5(x, y, t)$ associée à ce mouvement de tornade mobile.

On a $\psi_5(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x - Ut, y)$ pour $(x - Ut)^2 + y^2 \leq R$ et $\psi_5(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_4(x - Ut, y)$ pour $(x - Ut)^2 + y^2 \geq R$.

PC1.3 Repère tournant

- 11) On veut démontrer que la relation $\underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$ est vraie pour tout vecteur $\underline{\Omega}$ constant. Démontrer cette relation dans le cas $\underline{\Omega} = \underline{e}_z$. En déduire qu'elle est vraie pour un $\underline{\Omega}$ quelconque. Retrouver cette relation en utilisant l'expression $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ où $\underline{c} = \underline{a} \wedge \underline{b}$, ϵ_{ijk} est le pseudo-tenseur alterné et où la convention de sommation des indices répétés (convention d'Einstein) est utilisée.

On calcule facilement $\underline{e}_z \wedge \underline{x} = -y \underline{e}_x + x \underline{e}_y$ si $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$. On en déduit que $\underline{e}_z \wedge (\underline{e}_z \wedge \underline{x}) = -x \underline{e}_x - y \underline{e}_y$. D'autre part, $(\underline{e}_z \wedge \underline{x})^2 = x^2 + y^2$. On en déduit facilement que $\underline{e}_z \wedge (\underline{e}_z \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{e}_z \wedge \underline{x})^2]$. Pour un vecteur $\underline{\Omega}$ quelconque, il suffit de choisir l'axe $\underline{e}_z$ parallèle à $\underline{\Omega}$ et de remarquer que la relation est homogène de degré deux en $\|\underline{\Omega}\|$. En notant $\underline{d} = \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$, on peut écrire $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{npq} \Omega_p x_q \epsilon_{nrs} \Omega_r x_s) = 2 \epsilon_{npq} \Omega_p \delta_{iq} \epsilon_{nrs} \Omega_r x_s = 2 \epsilon_{npi} \epsilon_{nrs} \Omega_p \Omega_r x_s$. En notant $\underline{c} = \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x})$, on peut écrire $c_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j \epsilon_{klm} \Omega_l x_m = -\epsilon_{kji} \epsilon_{klm} \Omega_j \Omega_l x_m$ en utilisant la relation $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}$. On voit donc que $c_i = -\frac{1}{2} d_i$ en comparant la position des indices répétés (donc sommés).



On considère une cuve animée d'un mouvement de rotation solide autour de l'axe Oz et de vecteur rotation $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$ constant. Cette cuve est remplie d'un liquide à surface libre d'équation $z = h(x, y)$.

La force de gravité est $-g \underline{e}_z$. On suppose que l'écoulement est incompressible. On note ρ la masse volumique du fluide et on suppose que les forces de tensions visqueuses sont négligeables.

12) En notant $\underline{U}_a$ la vitesse absolue du fluide dans un repère fixe, P le champ de pression et

$$\left(\frac{Db}{Dt} \right)_a = \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \underline{U}_a$$

la dérivée particulaire dans le mouvement absolu, écrire les équations du mouvement en faisant apparaître le potentiel de gravitation $\Phi_a = g z$. En déduire les équations du mouvement dans le repère tournant en notant $\underline{U}$ la vitesse relative et en faisant apparaître le géopotentiel $\Phi = \Phi_a - \frac{1}{2} (\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2$ que l'on explicitera en fonction des coordonnées (x, y, z) . On suppose que la pression atmosphérique P_a est constante. Déterminer l'élévation de la surface libre $h(x, y)$ dans le cas où le fluide est immobile dans le repère tournant en supposant que $h(0, 0) = h_0$ est connu.

Les équations du mouvement s'écrivent $\nabla \cdot \underline{U}_a = 0$ et $\left(\frac{D}{Dt} \right)_a \underline{U}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_a$ en remarquant que la force volumique de gravité peut s'écrire $-g \underline{e}_z = -\nabla \Phi_a$ avec $\Phi_a = g z$. Dans le repère tournant, les équations s'écrivent $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_a$. En utilisant la relation $\underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$ on peut écrire $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi$ avec $\Phi = \Phi_a - \frac{1}{2} (\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2$. On peut écrire $\Phi = g z - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$. Dans le cas où $\underline{U} = \underline{0}$, on peut écrire $\nabla(P + \rho \Phi) = 0$. En appliquant la condition aux limites $P = P_a$ en $\underline{x} = (0, 0, h_0)$ on obtient $P = P_a - \rho [g(h - h_0) - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)]$. En appliquant la même condition aux limites aux autres points de la surface libre on en déduit la forme parabolique $h(x, y) = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$.

13) Calculer la forme de la surface libre d'une aquaplanète de vecteur de rotation $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$.

On a $\Phi = g \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2)$. On en déduit que $P = P_a - \rho [g r - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)]$. La forme de la surface libre est donc donnée par l'équation $g \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0 \right) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - r_0^2) = 0$.