

Contrôle Classant

Dynamique de l'atmosphère et des océans, MEC 433
Sujet proposé par Olivier Thual
Durée 3h

Vendredi 6 juillet 2007

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les notations sont celles du cours. Chaque question est notée sur 1 point. Pour les applications numériques, on pourra utiliser les valeurs simplifiées $a = 6 \cdot 10^6$ m, $\rho_r = 1$ kg/m³ pour l'atmosphère, $\rho_r = 1000$ kg/m³ dans l'océan et considérer que le périmètre de la terre est de 36 000 km.

Préambule : Approximations à l'échelle planétaire (1 point)

On considère les équations d'échelle planétaire suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \frac{Du}{Dt} - \operatorname{tg} \phi \frac{uv}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi, \\ \frac{Dv}{Dt} + \operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho_r \gamma_s, \quad \frac{Ds}{Dt} = \frac{F_e}{T}, \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}$.

- 1) Quelles sont, dans la liste ci-dessous, les approximations qui ont été utilisées pour écrire ces équations : B) approximation de Boussinesq, CM) approximation de couche mince, G) approximation géostrophique, F) approximation des frottements visqueux nuls ou H) approximation hydrostatique.

Problème 2 : Cellules de Hadley (10 points)

On suppose ici que l'écoulement est stationnaire et qu'il représente la moyenne temporelle de la circulation atmosphérique pour les mois de décembre à février (hiver boréal). On définit le débit massique $\mathbf{Q}(\phi, r) = Q_v \mathbf{j} + Q_w \mathbf{k}$ de cet écoulement par les relations

$$Q_v = 2 \pi \rho_r a \cos \phi [v], \quad Q_w = 2 \pi \rho_r a \cos \phi [w], \quad (2)$$

la moyenne zonale $[b]$ d'un champ atmosphérique quelconque b étant définie par la relation

$$[b](\phi, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\lambda, \phi, r) d\lambda. \quad (3)$$

- 2) Montrer que $\frac{1}{a} \frac{\partial Q_v}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_w}{\partial r} = 0$. Interpréter cette relation.

La figure 1a) représente les isolignes de la fonction de courant $\psi(\phi, r)$ définie par les relations

$$Q_v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad Q_w = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (4)$$

- 3) Indiquer, de manière très approchée, la distance $y_{20N} - y_{10S}$ entre les latitudes 20°N et 10°S . À quelles altitudes $r - a$ notées z_{1000} , z_{800} et z_{200} correspondent à peu près les niveaux de pression $P = 1000$ hPa, $P = 800$ hPa et $P = 200$ hPa ? Quel est l'ordre grandeur de l'erreur sur ψ effectuée lorsque l'on considère qu'une particule virtuelle advectée par l'écoulement en moyenne zonale passe par les points suivants de la figure 1a) : $A(\phi_A=10^\circ\text{S}, P_A=800 \text{ hPa})$, $B(\phi_B=10^\circ\text{S}, P_B=200 \text{ hPa})$, $C(\phi_C=20^\circ\text{N}, P_C=200 \text{ hPa})$ et $D(\phi_D=20^\circ\text{N}, P_D=1000 \text{ hPa})$.
- 4) À partir de la figure 1a), estimer les valeurs de ψ en $\phi=10^\circ\text{N}$ aux niveaux de pression $P=1000$ hPa puis $P=800$ hPa. En déduire une approximation grossière du gradient $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ sur le chemin DA . En déduire une estimation de la moyenne zonale $[v]$ sur ce chemin.
- 5) Donner une estimation grossière du gradient $\frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$ à partir des valeurs de ψ lues sur la figure 1a) au niveau $P=500$ hPa et entre les latitudes $\phi = 15^\circ\text{N}$ et $\phi = 25^\circ\text{N}$. En déduire une estimation grossière de la moyenne zonale $[w]$ sur le chemin CD .
- 6) En déduire une estimation approximative du nombre de jours que met une particule pour effectuer la boucle $ABCD$ en effectuant les hypothèses suivantes :
- sur les chemins AB et CD : $[v] = 0$ et $[w] = w_0$ constant.
 - sur les chemins BC et DA : $[w] = 0$ et $[v] = v_0$ constant.

En notant $\tilde{u} = u - [u]$, $\tilde{v} = v - [v]$ et $\tilde{w} = w - [w]$, on définit la grandeur M_u par la relation

$$\frac{M_u}{a \rho_r \cos \phi} = -\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} - \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\text{tg } \phi}{a} \tilde{u} \tilde{v} . \quad (5)$$

- 7) Montrer que l'on peut écrire $\left[\frac{Du}{Dt}\right] = \left[\frac{D}{Dt}\right] [u] + \left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi}\right] + \left[\tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right]$ où $\tilde{u} = u - [u]$ est l'écart du champ de vitesse u à sa moyenne zonale et $\left[\frac{D}{Dt}\right] = \frac{\partial}{\partial t} + [v] \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + [w] \frac{\partial}{\partial r}$.
- 8) En déduire que $\left[\frac{D}{Dt}\right] [m_a] = [M_u]$ où m_a est le moment cinétique de l'atmosphère.
- 9) À partir de la figure 1b), estimer grossièrement les valeurs respectives de la moyenne zonale $[m_a]$ du moment cinétique aux points A , B , C et D . On pourra se servir de la table 1 sans interpolation.
- 10) En supposant que $[M_u]$ prend respectivement des valeurs constantes sur chacun des chemins AB , BC , CD et DA et en reprenant les hypothèses de la question 6), donner une estimation, en Pascals, de $[M_u]$ sur chacun de ces quatre chemins.
- 11) Commenter brièvement les phénomènes qui pourraient expliquer les signes obtenus pour les différentes valeurs de $[M_u]$.

$\phi \setminus u$	-5 m/s	0 m/s	5 m/s	10 m/s	15 m/s	20 m/s	25 m/s	30 m/s
0°	462	467	472	477	482	487	492	497
10°	448	452	457	462	467	472	477	482
20°	407	412	417	421	426	431	435	440
30°	346	350	354	359	363	367	372	376
40°	270	274	278	281	285	289	293	297

Table 1: Abaque pour la fonction $\frac{m_a}{a \rho_r} = \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$.

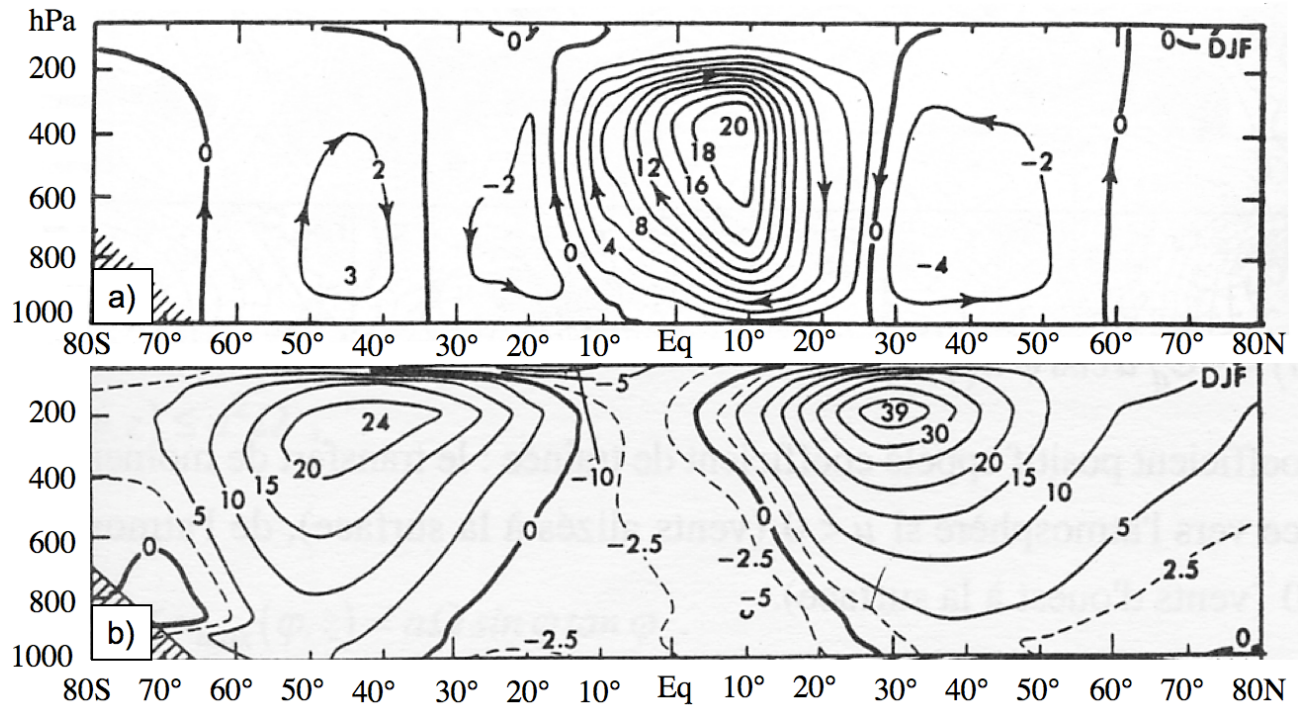


Figure 1: Moyenne de l'hiver boréal. a) Fonction de courant ψ de l'écoulement en moyenne zonale exprimée en débit massique (10^{10} kg/s). b) Vent zonal $[u]$ (5 m/s).

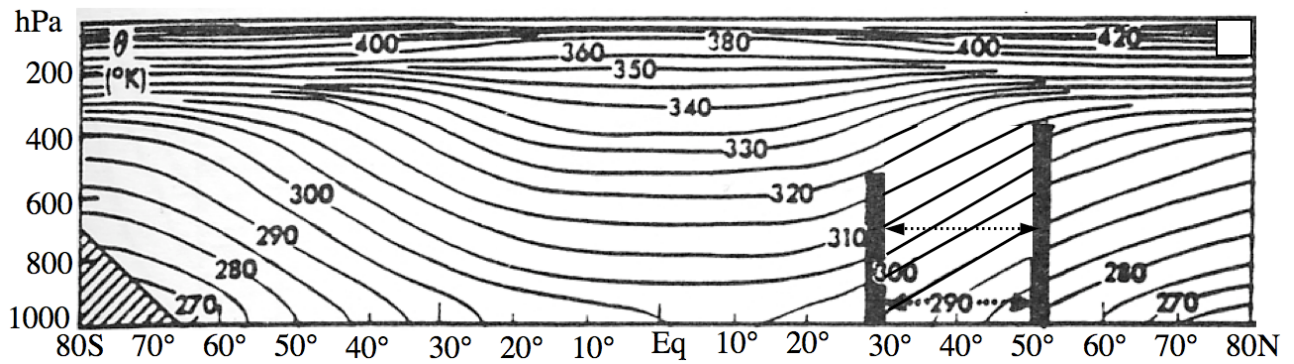


Figure 2: Moyenne annuelle et zonale de la température potentielle θ ($^{\circ}\text{K}$).

Problème 3 : Vent thermique et jet d'ouest (4 points)

On suppose ici que l'écoulement est stationnaire et qu'il représente la moyenne annuelle de la circulation atmosphérique. On suppose qu'entre $\phi = 30^\circ\text{N}$ et $\phi = 50^\circ\text{N}$ cet écoulement peut être décrit avec les approximations suivantes : $F_e = 0$ et l'écoulement est zonal, c'est-à-dire $v = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0$ pour tout champ b .

- 12) Dédurre de cette approximation et de conditions aux limites évidentes que $w = 0$. Écrire les équations d'équilibre dans le cadre de cette approximation.
- 13) En déduire une relation entre u , $\frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ où θ est la température potentielle. On considérera que l'atmosphère est un gaz parfait pour éliminer C_p des équations.
- 14) On effectue maintenant l'approximation qui consiste à négliger u devant $2a\Omega \cos \phi$. À partir des valeurs observées de la figure 1b), estimer l'erreur relative sur $\frac{\partial u}{\partial r}$ induite par cette approximation.
- 15) À partir de la figure 2, donner une estimation grossière du gradient $\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ pour la boîte définie par $30^\circ\text{N} \leq \phi \leq 50^\circ\text{N}$ et $400 \text{ hPa} \leq P \leq 1000 \text{ hPa}$. En déduire, de manière approximative, la valeur du vent u au niveau $P = 200 \text{ hPa}$ en supposant que u est nul au sol. On pourra utiliser la valeur numérique simplifiée $g = 10 \text{ m/s}^2$. Comparer avec la figure 1b).

Problème 4 : Courant antarctique circumpolaire (5 points)

On modélise l'océan antarctique circumpolaire par une couche sphérique comprise entre les latitudes $\phi = 70^\circ\text{S}$ et $\phi = 50^\circ\text{S}$ et les altitudes $r = a - H$ et $r = a - H + h(\phi)$ où $H = 4 \text{ km}$ est une profondeur constante et h est la hauteur de la surface libre. On suppose que l'on peut faire ici les approximations suivantes : $F_e = 0$, l'écoulement est zonal et stationnaire, c'est-à-dire $v = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial t} = 0$ pour tout champ b .

- 16) On néglige le terme d'accélération $\frac{u^2}{a} \phi$ devant l'accélération de Coriolis. En supposant que u est au plus égal à 1 m/s , estimer l'ordre de grandeur de l'erreur relative induite par cette approximation. En déduire la relation de l'équilibre géostrophique en faisant intervenir la pression totale $P = P_r(r) + p$ avec $\frac{dP_r}{dr}(r) = -\rho_r g$.
- 17) On suppose que la température $T(\phi)$ et la salinité $r_s(\phi)$ ne dépendent pas de r et λ dans le domaine étudié et que leur variation est monotone. En utilisant l'approximation hydrostatique, exprimer la pression totale $P(\phi, r)$ en fonction de $\rho(\phi)$ et $h(\phi)$ en supposant que la pression atmosphérique P_a est constante à la surface en $r = a - H + h(\phi)$.
- 18) On considère maintenant la condition aux limites au fond $u = 0$ pour $r = a - H$. En déduire que le produit $\rho(\phi) h(\phi)$ ne dépend pas de ϕ . En déduire l'expression de $u(\phi, r)$ en fonction de $\frac{d\rho}{d\phi}$.
- 19) Les observations permettent de choisir les valeurs approximatives $T(50^\circ\text{S}) = 276^\circ\text{K}$, $T(70^\circ\text{S}) = 273^\circ\text{K}$, $r_s(50^\circ\text{S}) = 34,4 \text{ g/kg}$ et $r_s(70^\circ\text{S}) = 34,5 \text{ g/kg}$. Calculer la variation relative de masse volumique $\delta\rho/\rho_r$ avec $\delta\rho = \rho(50^\circ\text{S}) - \rho(70^\circ\text{S})$ en utilisant la loi d'état linéaire de l'eau de mer où $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et $B = 7,6 \cdot 10^{-4} (\text{g/kg})^{-1}$. En déduire la valeur en m du dénivelé approximatif $\delta h = h(50^\circ\text{S}) - h(70^\circ\text{S})$ que l'on supposera petit.
- 20) À l'aide des approximations $\sin \phi \sim -1$ et $h \sim H$ dans la couche sphérique considérée, estimer la valeur maximale de la vitesse ainsi que le débit approximatif de l'océan antarctique circumpolaire. Comparer avec la valeur de 130 Sv mesurée au niveau du Déroit de Drake et commenter.

CORRIGÉ

Préambule : Approximations à l'échelle planétaire

1) Les approximations B), CM), H) et F) ont été utilisées pour écrire le système d'équations.

Problème 2 : Cellules de Hadley

2) En invoquant l'équation de conservation de la masse du système (1) et la relation $\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda = 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial Q_v}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_w}{\partial r} = \rho_r \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} + a \cos \phi \frac{\partial w}{\partial r} \right] d\lambda = 0. \quad (6)$$

Cette relation montre que la moyenne zonale d'un écoulement isochore est isochore.

3) Une distance d'environ $y_{20N} - y_{10S} \sim 3000$ km sépare les latitudes 10°S et 20°N . Les niveaux de pression $P = 1000$ hPa, $P = 800$ hPa et $P = 200$ hPa correspondent respectivement aux altitudes $z_{1000} \sim 0$ m, $z_{800} \sim 1000$ m et $z_{200} \sim 10\,000$ m. Les points A, B, C et D sont à peu près sur l'iso-valeur $\psi = 2 \cdot 10^{10}$ kg/s. Dans la mesure où la trajectoire d'une particule advectée par l'écoulement en moyenne zonale est une iso- ψ , on fait une erreur d'environ $\delta\psi = 10^{10}$ kg/s en affirmant que ces quatre points sont sur une même trajectoire.

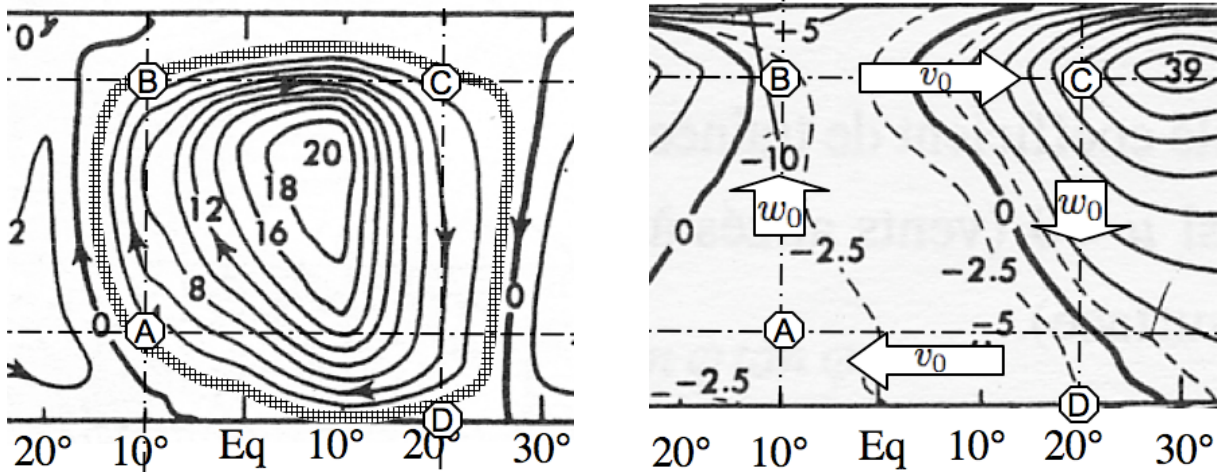


Figure 3: Points A, B, C et D. a) Isoligne $\psi = 2 \cdot 10^{10}$ kg/s en grisé. b) Schématisation de la circulation de Hadley le long de la boucle ABCD. Valeurs approchées $u_A = u_B = u_D \sim 0$ m/s et $u_C \sim 25$ m/s.

4) Pour $\phi = 10^\circ\text{N}$, on lit sur la figure 1a) $\psi_{800} \sim 14 \cdot 10^{10}$ kg/s au niveau de pression $P = 800$ hPa et $\psi_{1000} \sim 2 \cdot 10^{10}$ kg/s au niveau de pression $P = 1000$ hPa. On en déduit une estimation de

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \sim \frac{\psi_{800} - \psi_{1000}}{z_{800} - z_{1000}} = 12 \cdot 10^7 \text{ kg/(ms)}. \quad (7)$$

Comme $Q_v = 2\pi \rho_r a \cos \phi [v] = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, on peut écrire

$$[v] = -\frac{1}{2\pi \rho_r a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sim 3 \text{ m/s}. \quad (8)$$

5) Au niveau de pression $P=500$ hPa, on lit sur la figure 1a) $\psi_{15N} \sim 12 \cdot 10^{10}$ kg/s pour $\phi=15^\circ N$ et $\psi_{25N} \sim 2 \cdot 10^{10}$ kg/s pour $\phi=25^\circ N$. En notant $y_{25N} - y_{15N} \sim 1000$ km la distance entre les latitudes $15^\circ N$ et $25^\circ N$, on peut estimer

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \sim \frac{\psi_{25N} - \psi_{15N}}{y_{25N} - y_{15N}} = 10^5 \text{ kg/(ms)} . \quad (9)$$

Comme $Q_w = 2 \pi \rho_r a \cos \phi [w] = \frac{\partial \psi}{\partial \phi}$, on peut écrire

$$[w] = -\frac{1}{2 \pi \rho_r a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} . \quad (10)$$

6) Le temps τ que met une particule à parcourir la boucle $ABCD$ est

$$\tau = 2 \frac{y_{20N} - y_{10S}}{v_0} + \frac{z_{200} - z_{1000}}{w_0} + \frac{z_{200} - z_{800}}{w_0} \sim 10^7 \text{ s} \sim 120 \text{ jours} . \quad (11)$$

7) Comme $[\tilde{b}] = 0$, on remarque que $[b_1 b_2] = [b_1] [b_2] + [\tilde{b}_1 \tilde{b}_2]$ pour deux champs b_1 et b_2 quelconques. Comme $\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{u}^2$, on peut écrire $[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda}] = 0$. On en déduit donc $[\frac{Du}{Dt}] = [\frac{D}{Dt}] [u] + [\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi}] + [\tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}]$.

8) Comme $\frac{Dm_a}{Dt} = 0$, on a

$$0 = \left[\frac{D}{Dt} \right] [m_a] + \left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{m}_a}{\partial \phi} \right] + \left[\tilde{w} \frac{\partial \tilde{m}_a}{\partial r} \right] \quad (12)$$

avec $m_a = \rho_r a \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ et $\tilde{m}_a = \rho_r a \cos \phi \tilde{u}$. On calcule alors

$$\frac{\partial \tilde{m}_a}{\partial \phi} = \rho_r a \cos \phi \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} - \frac{\text{tg } \phi}{a} \tilde{u} \right) . \quad (13)$$

On obtient finalement

$$0 = \left[\frac{D}{Dt} \right] [m_a] + \rho_r a \cos \phi \left(\left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} \right] - \frac{\text{tg } \phi}{a} [\tilde{u} \tilde{v}] + \left[\tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right] \right) , \quad (14)$$

ce qui s'écrit bien $[\frac{D}{Dt}] [m_a] = [M_u]$.

9) On lit, sur la figure 1b), les valeurs approximatives $u_A = u_B = u_D \sim 0$ m/s et $u_c \sim 25$ m/s. À partir de la table 1, on en déduit que

$$[m_a]_A = [m_a]_B = 2,71 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} , \quad [m_a]_C = 2,61 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad \text{et} \quad [m_a]_D = 2,47 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} . \quad (15)$$

10) On note $\tau_{BC} = \tau_{DA} = (y_{20N} - y_{10S})/v_0$, $\tau_{AB} = (z_{200} - z_{800})/w_0$ et $\tau_{CD} = (z_{200} - z_{1000})/w_0$ les temps que met une particule à parcourir respectivement les chemins BC , DA , AB et CD . En supposant que $[M_u]$ est constant sur chacun des chemins, on peut écrire

$$\begin{aligned} [m_a]_B - [m_a]_A &= \tau_{AB} [M_u]_{AB} , & [m_a]_C - [m_a]_B &= \tau_{BC} [M_u]_{BC} , \\ [m_a]_D - [m_a]_C &= \tau_{CD} [M_u]_{CD} , & [m_a]_A - [m_a]_D &= \tau_{DA} [M_u]_{DA} . \end{aligned} \quad (16)$$

On en déduit

$$[M_u]_{AB} = 0 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{BC} = -50 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{CD} = -40 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{DA} = 120 \text{ Pa} . \quad (17)$$

11) Les trois valeurs non nulles de $[M_u]$ traduisent des phénomènes qui s'opposent à la circulation de Hadley. La valeur sur DA traduit le frottement dans les couches limites de surface que l'on devrait

modéliser par un terme de flux turbulent de vitesse. Les valeurs sur BC et CD traduisent le transfert de quantité de mouvement vers la cellule de Ferrel (transport par les fluctuations).

Problème 3 : Vent thermique et jet d'ouest

12) L'équation de conservation de la masse entraîne $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$. On en déduit que w est constant, donc nul compte tenu de la géométrie. L'équation de quantité de mouvement pour v s'écrit ici

$$\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u^2 = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (18)$$

13) En dérivant par rapport à ϕ la relation hydrostatique et par rapport à r cette relation d'équilibre, l'élimination de la pression conduit à la relation

$$2 \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u + \Omega \sin \phi \right) \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma}{a} \frac{\partial s}{\partial \phi} . \quad (19)$$

En utilisant les définitions $s = C_p \operatorname{Ln} \theta$ et $\gamma = g/C_p$ pour un gaz parfait, on obtient

$$2 \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u + \Omega \sin \phi \right) \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{a} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} . \quad (20)$$

14) Comme $2 a \Omega \cos \phi \sim 800$ m/s avec $|u| \leq 40$ m/s pour $\phi = 30^\circ \text{N}$ et $2 a \Omega \cos \phi \sim 600$ m/s avec $|u| \leq 30$ m/s pour $\phi = 50^\circ \text{N}$, on peut négliger $\operatorname{tg} \phi \frac{u}{a}$ devant $\Omega \sin \phi$ dans l'équation (20) en faisant une erreur relative de 5%.

15) À partir de la lecture de la figure 2, on peut estimer un écart de température $\delta \theta \sim -15$ °K entre $\phi = 30^\circ \text{N}$ et $\phi = 50^\circ \text{N}$. Comme la distance $y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}$ entre les deux latitudes est d'environ 2000 km, on peut estimer

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \sim \frac{\delta \theta}{y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}} \sim -7,5 \cdot 10^{-6} \text{ °K/m} . \quad (21)$$

En approximant θ par la valeur moyenne $\theta_m \sim 300^\circ \text{K}$ et en utilisant la relation du vent thermique $2 \Omega \sin \phi \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{a} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ (à 5% près), cette équation entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sim -\frac{g}{2 \Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta_m} \frac{\delta \theta}{y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}} \sim 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} . \quad (22)$$

En supposant que $\frac{\partial u}{\partial r}$ est constant et en utilisant $z_{200} \sim 10^4$ m, on trouve que la vitesse pour $\phi = 40^\circ \text{N}$ et $P = 200$ hPa est $u(\phi = 40^\circ \text{N}, P = 200 \text{ hPa}) \sim 27$ m/s. Cette valeur est proche de la valeur d'environ 25 m/s que l'on peut lire sur la figure 1b).

Problème 4 : Courant antarctique circumpolaire

16) Le rapport $u/(2 a \Omega \cos \phi)$ entre $\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u^2$ et $2 \Omega u \sin \phi$ est maximal pour $\phi = 70^\circ$ et $u = 1$ m/s et vaut environ $3 \cdot 10^{-3}$. L'erreur relative maximale est donc de l'ordre de 0,3 %. Comme on a $\frac{\partial P_r}{\partial \phi} = 0$ on peut écrire l'équilibre géostrophique sous la forme

$$0 = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (23)$$

17) La relation hydrostatique $\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g$ pour la pression totale entraîne

$$P(\phi, r) = P_a - \rho(\phi) g [r - a + H - h(\phi)] . \quad (24)$$

18) L'équilibre géostrophique s'écrit

$$0 = \frac{g}{a \rho_r} \frac{d}{d\phi} [\rho(\phi) (r - a + H) - \rho(\phi) h(\phi)] - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (25)$$

Comme $u = 0$ pour $r = a - H$, on en déduit que $\frac{d}{d\phi} [\rho(\phi) h(\phi)] = 0$. On en déduit

$$u = \frac{g}{2 a \rho_r \Omega \sin \phi} \frac{d\rho}{d\phi} (r - a + H) . \quad (26)$$

19) En appliquant la loi d'état linéaire de l'eau de mer, on obtient

$$\delta\rho/\rho_0 = -A[T(50S) - T(70S)] + B[r_s(50S) - r_s(70S)] \sim 5,8 \cdot 10^{-4} . \quad (27)$$

À la précision de ce calcul, on a $\delta\rho/\rho_r \sim \delta\rho/\rho_0$. La relation $\frac{d}{d\phi} [\rho(\phi) h(\phi)] = 0$ peut être approximée par la relation

$$\frac{\delta h}{H} \sim \frac{\delta\rho}{\rho_r} \sim 5 \cdot 10^{-4} . \quad (28)$$

On trouve donc $\delta h \sim 2$ m.

20) En notant $y_{50S} - y_{70S} \sim 2000$ km la largeur de l'océan, on peut écrire

$$u = \frac{g}{2 a \rho_r \Omega \sin \phi} \frac{d\rho}{d\phi} (r - a + H) \sim -\frac{g}{2 \Omega \sin \phi} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{r - a + H}{y_{50S} - y_{70S}} . \quad (29)$$

Avec les valeurs $\sin \phi \sim -1$ et $h \sim H$, la valeur maximale u_{max} de u est obtenue à la surface libre en $r = a - H + h \sim a$ et vaut

$$u_{max} \sim \frac{g}{2 \Omega} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{H}{y_{50S} - y_{70S}} \sim 0,1 \text{ m/s} . \quad (30)$$

Le débit volumique de l'océan antarctique circumpolaire est

$$D \sim \int_{a-H}^a \int_{70S}^{50S} u(\phi, r) a d\phi dr = \frac{g}{2 \Omega} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{H^2}{2} \sim 300 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{s} = 300 \text{ Sv} . \quad (31)$$

L'absence de prise en compte des frottements de diverses natures constitue un début d'explication de cette sur-estimation du débit dans ce modèle très simple.