

PETITES CLASSES

Sciences de l'eau et environnement

Département de Mécanique

Ecole Polytechnique

Table des matières

PC1 : Écoulements de Poiseuille	4
PC2 : Écoulements de milieux poreux	6
PC3 : Applications des modèles turbulents	9
PC4 : Écoulement sur un obstacle	13
PC5 : Modélisation des ondes crues	17
PC6 : Canal à choc	20
PC7 : Ondes de surface	24
PC8 : Réfraction de la houle	27
PC9 : Seiches et marées	30

PC1 : Écoulements de Poiseuille

Cette PC aborde deux exemples d'application des équations de Navier-Stokes incompressibles et en interprète la solution avec le point de vue de l'hydraulique.

PC1.1 Charge hydraulique

- 1) On considère un champ de vitesse $\underline{U}(x, y, z, t) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y + w \underline{e}_z$ et son gradient $\underline{K} = \underline{\text{grad}} \underline{U}$ de composantes $K_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$. Montrer, en explicitant leurs composantes, que $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \underline{K} \cdot \underline{U}$, $\underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} = (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U}$ et $\frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U}$. En déduire que $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}$.

Les composantes $i = 1, 2, 3$ sont $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ pour $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U}$, $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}$ et $U_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i}$ pour $\frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2$. On a donc $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U} = {}^t \underline{K} \cdot \underline{U} + (\underline{K} - {}^t \underline{K}) \cdot \underline{U} = \frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}$.

- 2) On considère l'écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide newtonien de masse volumique ρ constante en présence d'un champ de gravité $\underline{F} = -g \underline{e}_z$. Montrer que les équations de Navier-Stokes entraînent la relation $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$ où $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{2g} \underline{U}^2$ est la "charge hydraulique" et $\underline{J} = -\frac{1}{\rho g} \underline{\text{div}} \underline{\tau}$ est le "vecteur perte de charge linéique", $\underline{\tau}$ étant le tenseur des contraintes visqueuses.

Comme $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} = 0$, que $\underline{e}_z = \underline{\text{grad}}(z)$ et que $\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = -\underline{\text{grad}} p + \underline{\text{div}} \underline{\tau}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement $\rho \frac{d}{dt} \underline{U} = \rho \underline{F} + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$ s'écrit $\frac{1}{2} \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 + \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p - g \underline{\text{grad}}(z) + \frac{1}{\rho} \underline{\text{div}} \underline{\tau}$. Comme $(\underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U}) \cdot \underline{U} = 0$, on en déduit $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$.

PC1.2 Poiseuille plan en charge

On considère un fluide newtonien compris entre deux plaques rigides situées en $z = 0$ et $z = 2h$. On suppose que l'écoulement est tel qu'il peut être considéré comme incompressible et on note ρ la masse volumique. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que la vitesse est de la forme $\underline{U} = u(z) \underline{e}_x$ et qu'il est forcé par un gradient de pression horizontal constant $G = -\frac{\partial p}{\partial x}$, en présence du champ de gravité $\underline{g} = -g \underline{e}_z$.

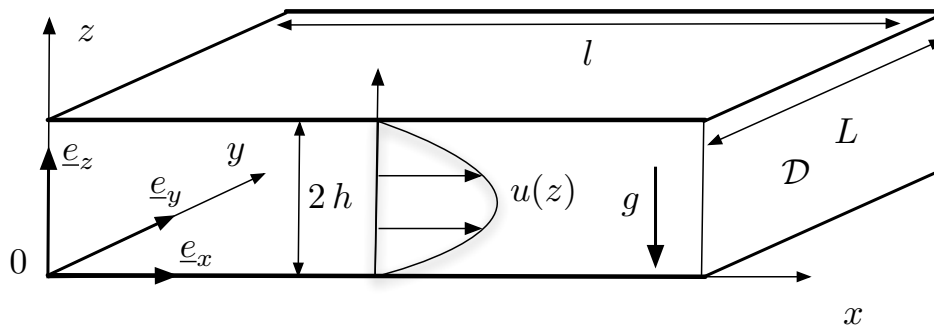


FIG. 1 – Écoulement de Poiseuille plan en charge.

- 3) Écrire les équations de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses formulées. On suppose que $p(0, 0) = p_r$. En déduire l'expression du champ de pression p . Montrer que l'on a $\frac{\partial H}{\partial x} = -J$ où J est la "perte de charge linéique due aux frottements" définie par $J = \underline{J} \cdot \underline{e}_x$. Montrer que J est constant et donner son expression en fonction de l'intensité G du forçage.

L'équation de conservation de la masse $\underline{\text{div}} \underline{U} = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ est trivialement vérifiée. L'équation de quantité de mouvement conduit à $0 = G/\rho + \nu u''(z)$, $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$ et $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$. On en déduit $p(x, z) = p_r - Gx - \rho g z$. Comme $\underline{U} = u \underline{e}_x$ et $\underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} H = -\underline{U} \cdot \underline{J}$, on a $\frac{\partial H}{\partial x} = \underline{\text{grad}} H \cdot \underline{e}_x = -\underline{J} \cdot \underline{e}_x = -J$. On en déduit $J = G/(\rho g)$.

- 4) Calculer et tracer le profil de vitesse $u(z)$. Exprimer \underline{d} et $\underline{\sigma}$. Calculer et tracer le profil $\tau(z) = \underline{e}_x \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{e}_z$ où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. On note $\tau_* = \tau(0)$. Exprimer, en fonction de τ_* , les contraintes tangentielles τ_0 et τ_{2h} exercées par le fluide sur les parois.

Le profil $u(z) = \frac{G}{2\rho\nu}(2h-z)z$ est une parabole. On a $\underline{d} = \frac{1}{2}u'(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ et $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + 2\rho\nu \underline{d} = -p \underline{I} + \tau(z) [\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x]$ avec $\tau(z) = \rho\nu u'(z) = G(h-z)$. On a $\tau_* = Gh$ et $\tau(0) = \tau(2h) = \tau_*$. Le profil de $\tau(z)$ est une droite.

- 5) On considère le domaine $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq 2h\}$ où l et L sont des constantes. Calculer la résultante des forces de contact exercées par l'extérieur de \mathcal{D} sur les faces de normales \underline{e}_x et $-\underline{e}_x$. Calculer la résultante des forces de contact exercées par les parois sur le fluide. Calculer la résultante de toutes les forces de contact exercées par l'extérieur du parallélépipède sur sa frontière $\partial\mathcal{D}$. Commenter en remarquant que les équations de Navier-Stokes s'écrivent ici $\underline{0} = -\rho g \underline{e}_z + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$. Calculer et interpréter la grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS$. On définit le rayon hydraulique R_H comme étant le rapport entre l'aire $2hL$ de la face de \mathcal{D} transverse à l'écoulement et le périmètre de cette section en contact avec les parois. Montrer que $\tau_* = \rho g R_H J$.

Les forces de contact sur les faces de normales \underline{e}_x et $-\underline{e}_x$ sont respectivement $\underline{T}(l, y, z, \underline{e}_x) = -p(l, z) \underline{e}_x + \tau(z) \underline{e}_z$ et $\underline{T}(0, y, z, \underline{e}_x) = p(0, z) \underline{e}_x - \tau(z) \underline{e}_z$. Leur résultante est $[p(0, z) - p(l, z)] (2hL) \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_x$. Les forces de contact sur les faces de normales \underline{e}_z et $-\underline{e}_z$ sont respectivement $\underline{T}(x, y, 2h, \underline{e}_z) = -p(x, 2h) \underline{e}_z + \tau(2h) \underline{e}_x$ et $\underline{T}(x, y, 0, -\underline{e}_z) = p(x, 0) \underline{e}_z - \tau(0) \underline{e}_x$. Leur résultante est le vecteur $[p(x, 0) - p(x, 2h)] lL \underline{e}_z - [\tau(0) - \tau(2h)] lL \underline{e}_x = 2hlLG \underline{e}_z - 2hlLG \underline{e}_x$. Comme $\underline{T}(x, L, z, \underline{e}_y) = -p(x, z) \underline{e}_y$ et $\underline{T}(x, L, z, -\underline{e}_y) = p(x, z) \underline{e}_y$, la résultante de toutes les forces de contact exercées sur $\partial\mathcal{D}$ est $\rho g (2hlL) \underline{e}_z$. C'est l'opposé du poids du fluide contenu dans \mathcal{D} , supporté par la paroi. En intégrant $\underline{0} = \rho g \underline{e}_z + \underline{\text{div}} \underline{\sigma}$ sur \mathcal{D} , on retrouve bien l'équilibre $\underline{0} = \int_{\mathcal{D}} \rho g \underline{e}_z d^3x + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS$ entre le poids et les forces de contact sur $\partial\mathcal{D}$. La grandeur $\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} dS = -2\tau_* lL \underline{e}_x = -2(Gh)lL \underline{e}_x$ est égale à $\int_{\mathcal{D}} \underline{\text{div}} \underline{\tau} d^3x = -(\rho g J) (2hlL) \underline{e}_x$ en appliquant le théorème de la divergence. C'est la résultante des forces tangentielles exercées par le paroi sur \mathcal{D} . Elle s'oppose au gradient de pression. On a $R_H = 2hL/(2L) = h$ et $\tau_* = \rho g R_H J$.

- 6) Calculer la vitesse moyenne $U = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} u(z) dz$. On note $D_H = 4h$. Montrer que l'on peut écrire la "loi de Darcy" $U = -K_p \frac{dH}{dx}$ où K_p est une constante que l'on exprimera en fonction de D_H , ν et g . On définit le coefficient de frottement λ par la relation $J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H}$. Exprimer λ en fonction du "nombre de Reynolds" $Re = UD_H/\nu$. Calculer U et Re pour une perte de charge de 2 Bars sur 100 m d'un écoulement d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) dans les cas $h = .5 \text{ mm}$ puis $h = 5 \text{ mm}$. Commenter.

On a $U = Gh^2/(3\rho\nu)$. On a $K_p = D_H^2 g/(48\nu)$. On a $\lambda = 96/Re$. On a $U = 16 \text{ cm/s}$ et $Re \sim 300$ pour $h = .5 \text{ mm}$, $U = 16 \text{ m/s}$ et $Re \sim 3 \cdot 10^5$ pour $h = 5 \text{ mm}$. La solution laminaire est réaliste dans le premier cas. Dans le second cas, elle ne l'est pas car l'écoulement devient turbulent.

PC2 : Écoulements de milieux poreux

Cette PC aborde plusieurs exemples d'application de la loi de Darcy régissant les écoulements dans des milieux poreux.

PC2.1 Aquifère artésien de section constante

On considère l'écoulement dans un aquifère confiné par des roches imperméables et s'écoulant dans un milieu poreux de section constante A (figure 2). L'aquifère est en contact avec un lac dont la surface libre est à la cote z_1 en $x = 0$. Il en est de même en $x = L$ avec un deuxième lac dont la surface libre est à la cote z_2 . On suppose que le milieu poreux est homogène et que sa conductivité hydraulique est K_p .

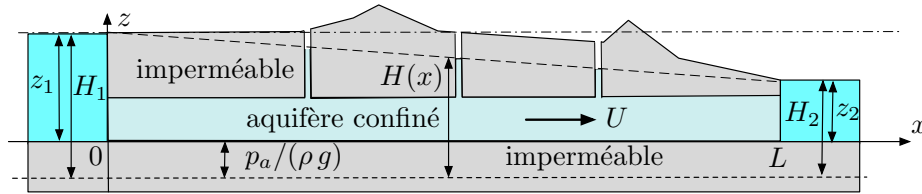


FIG. 2 – Aquifère confiné (artésien)

- 1) Calculer la charge hydraulique $H(x)$ pour $x \in [0, L]$ en supposant que l'écoulement est stationnaire. En déduire la vitesse débitante U de l'aquifère.

La charge en $x = 0$ est $H_1 = p_a/(\rho g) + z_1$. La charge en $x = L$ est $H_2 = p_a/(\rho g) + z_2$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{dH}{dx}$ et la conservation de la masse $\frac{d(UA)}{dx} = 0$ entraînent $H = H_1 - x(H_1 - H_2)/L$ et $U = K_p(H_1 - H_2)/L$.

PC2.2 Percolation du café

On considère un percolateur cylindrique d'axe vertical et de section constante A . Il contient un milieu poreux de conductivité K_p et de porosité $m = 0.1$ sur une hauteur L (figure 3a). À $t = 0$, le milieu poreux est surmonté d'une lame d'eau dont la surface libre est à la cote $z = h_0$. Le fond du percolateur est constitué d'une grille à travers laquelle s'écoule l'eau qui est ainsi en contact avec la pression atmosphérique. On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la loi de Darcy soit valide comme dans le cas stationnaire.

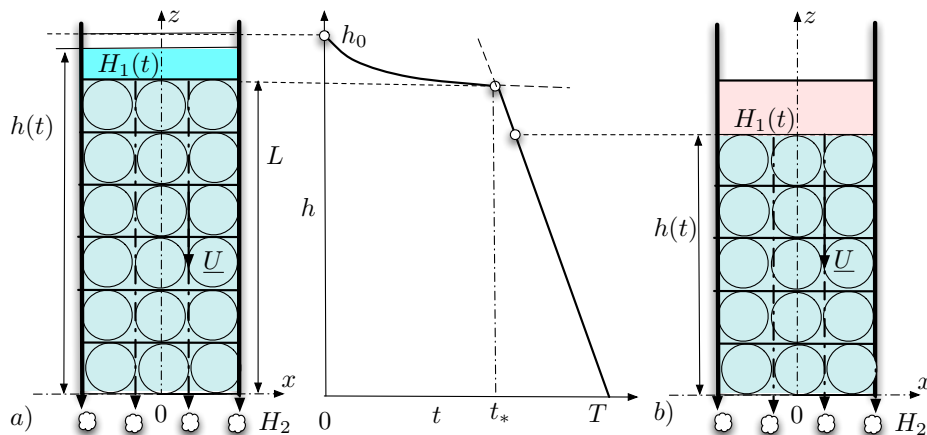


FIG. 3 – Percolation cylindrique : a) surmonté d'une couche d'eau, b) avec nappe phréatique.

2) Calculer le temps t_* au bout duquel la lame d’eau a disparu.

La charge en $z \in [L, L + h]$ est $H_1 = p_a/(\rho g) + h(t) + L$. La charge en $z = 0$ est $H_2 = p_a/(\rho g)$. La loi de Darcy $U = -K_p \frac{\partial H}{\partial z}$ et la conservation de la masse $\frac{\partial(UA)}{\partial z} = A \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ entraînent $U = -K_p h(t)/L$. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U = -K_p h/L$ pour $h \geq L$. On en déduit $h(t) = h_0 \exp(-K_p t/L)$. On a $h(t_*) = L$ pour $t_* = (L/K_p) \text{Ln}(h_0/L)$.

3) Au-delà de t_* , la cote $h(t)$ de la “nappe phréatique” dans le milieu poreux continue de décroître (figure 3b). Calculer le temps $t = T$ au bout duquel toute l’eau a percolé. On suppose que $L = 30$ cm, $h_0 = 33$ cm et $\tau = T - t_* = 10$ s. En déduire la conductivité K_p du milieu poreux.

Comme la différence de charge entre le niveau de la nappe phréatique et le fond est $h(t)$ la vitesse débitante du milieu poreux est $U = -K_p \frac{dh}{dz} = -K_p$. Cette vitesse débitante est égale à m fois la vitesse réelle. La hauteur $h(t)$, qui est gouvernée par la vitesse réelle des particules de la surface libre, obéit à la loi $\frac{dh}{dt} = U/m = -K_p/m$ pour $h \leq L$. La vitesse de l’aquifère est donc $\frac{dh}{dt} = K_p/m$. Comme $h(t_*) = L$, on a donc $h(t) = L - K_p(t - t_*)/m$. On a $h(T) = 0$ pour $T = t_* + Lm/K_p$. On a donc $K_p = Lm/\tau = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s.

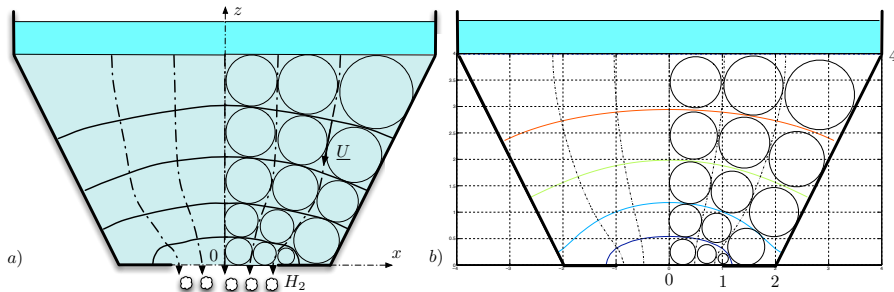


FIG. 4 – Percolateur 2D de forme complexe. a) Résolution “artistique” par la méthode des cercles. b) Solution numérique.

4) On considère maintenant un percolateur 2D dont la section verticale est indiquée sur la figure 4. Indiquer l’équation permettant de résoudre la charge $H(x, z)$ et spécifier ses conditions aux limites. Donner l’allure des trajectoires en utilisant la “méthode des cercles”.

La charge dans le milieu poreux est la solution de l’équation de Laplace $\Delta H = 0$ avec les conditions aux limites $H = H_1$ en haut, $H = H_2$ sur la grille et $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ sur les parois imperméables. Une solution “artistique” de la méthode des cercles est indiquée sur la figure 3 et comparée à la solution numérique.

PC2.3 Coin salé (exercice élaboré avec Th. Dubos)

Près d’une côte, le sous-sol poreux s’imprègne d’eau salée au contact de la mer. Il en résulte la présence d’une nappe d’eau salée sous la nappe d’eau douce alimentée depuis le continent. On cherche à déterminer la position de l’interface eau douce - eau salée qui détermine, en particulier, la profondeur admissible des captages d’eau douce.

On se place dans une géométrie à deux dimensions (figure 5). On note $z = Z_1(x)$ la cote de l’interface eau douce - sol sec et $z = Z_2(x)$ celle de l’interface eau salée - eau douce. On suppose que $Z_1(0) = Z_2(0) = L$ et que l’hypothèse de Dupuit est valide, sauf dans le voisinage de $x = 0$. La masse volumique ρ_2 de l’eau salée est plus grande que la masse volumique ρ_1 de l’eau douce. On note K_p la conductivité du sol.

5) Calculer la charge H_1 dans la nappe d’eau douce. Quelle grandeur physique est continue à l’interface eau douce - eau salée? Calculer les champs de pression $p_1(x, z)$ et $p_2(x, z)$ dans les deux nappes. En déduire H_2 .

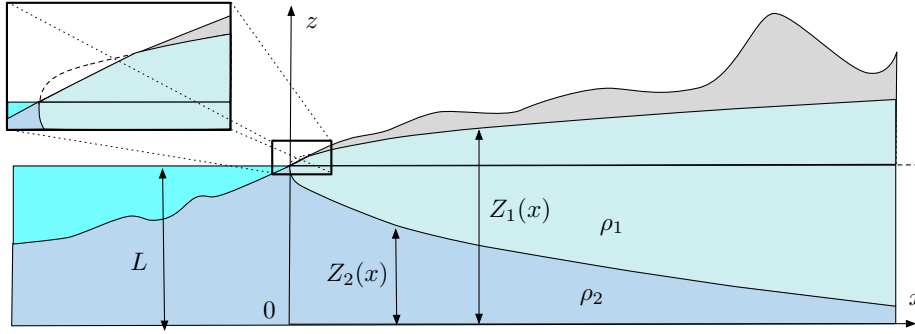


FIG. 5 – Nappe phréatique salée (ρ_2) en contact avec la nappe phréatique d'eau douce (ρ_1).

L'hypothèse de Dupuit permet d'écrire $H_1(x) = p_a/(\rho_1 g) + Z_1(x)$. La pression est continue à l'interface. On a donc $p_1(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - z)$ et $p_2(x, z) = p_a + \rho_1 g (Z_1 - Z_2) + \rho_2 g (Z_2 - z)$. On en déduit, en utilisant de nouveau l'hypothèse de Dupuit, que $H_2(x) = p_a/(\rho_2 g) + \frac{\rho_1}{\rho_2} Z_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} Z_2$.

- 6) La nappe d'eau salée n'étant pas alimentée, montrer que H_2 est une constante dont on donnera la valeur. En déduire $L - Z_2(x)$ en fonction de $Z_1(x) - L$. Quel est le rapport des pentes des interfaces pour $\rho_1 = 1\,000\text{ kg/m}^3$ et $\rho_2 = 1\,035\text{ kg/m}^3$.

La loi de Darcy $U_2 = -K_p \frac{\partial H_2}{\partial x}$ entraîne que H_2 est constant puisque $U_2 = 0$. À partir de la valeur $Z_2(0) = L$, on déduit que $H_2 = p_a/(\rho_2 g) + L$. On en déduit $L - Z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L)$. Le rapport des pentes est $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \sim 30$.

- 7) En revanche, la nappe d'eau douce est alimentée par un débit linéique q venant du continent. En déduire $Z_1(x) - L$ et $L - Z_2(x)$. Pourquoi doit-on supposer l'existence d'une surface de résurgence près de $x = 0$?

La vitesse débitante $U_1(x) = -K_p \frac{\partial H_1}{\partial x}$ vérifie $q = (Z_1 - Z_2) U_1$. On en déduit $q = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} (Z_1 - L) \frac{\partial(Z_1 - L)}{\partial x}$ et donc $Z_1 - L = \sqrt{2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{q}{K_p} x}$ et $L - Z_2 = \sqrt{2 \frac{\rho_1^2}{\rho_2(\rho_2 - \rho_1)} \frac{q}{K_p} x}$. Dans le voisinage de $x = 0$, l'hypothèse de Dupuit n'est plus valable. Pour éviter une vitesse $U_1(0)$ infinie, il est nécessaire d'imposer l'existence d'une surface de résurgence de la nappe d'eau douce.

- 8) On creuse un puits dans la nappe phréatique. On suppose que le pompage crée une profondeur de rabattement $S_p = 3\text{ m}$ dans le puits. De quelle hauteur remonte l'eau salée dans le puits.

L'eau salée remonte d'une hauteur $\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} S_p = 33\text{ m}$.

PC3 : Applications des modèles turbulents

Cette PC illustre, sur des cas concrets, la modélisation de turbulence et les concepts de base de l'hydraulique en charge.

PC3.1 Dégazage en mer

Un pétrolier largue en mer $M = 10$ tonnes de résidus d'hydrocarbures. Il maintient sa vitesse de croisière dans la direction x et déverse cette pollution sur une longueur $L = 1$ km (voir figure 6).

Le polluant, plus léger que l'eau de la mer, reste en surface, et l'on suppose donc qu'il est advecté par un champ 2D turbulent $\underline{U}(x, y, t) = \overline{\underline{U}} + \underline{U}'$ de moyenne $\overline{\underline{U}}$ et de divergence $\text{div } \underline{U}$ nulles. On note $C = \overline{C} + C'$ la décomposition en moyenne et fluctuations turbulentes de la concentration surfacique $C(x, y, t)$. On modélise l'advection du scalaire passif par cette turbulence à l'aide d'un coefficient de diffusivité turbulente k_{Ct} que l'on suppose constant et égal à $k_{Ct} = 10^{-2}$ m²/s. On note $k = k_C + k_{Ct}$ et on suppose que la diffusivité moléculaire k_C du polluant est très petite devant k_{Ct} .

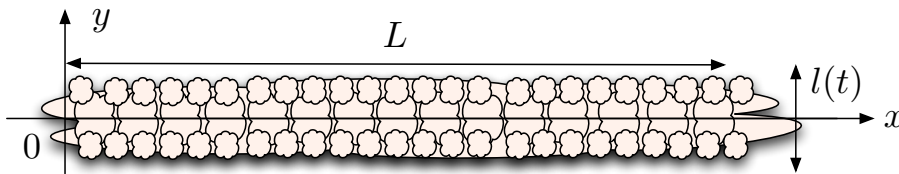


FIG. 6 – Croissance d'une panache de pollution 1D

À $t = t_0$, on suppose que la concentration surfacique (kg/m²) moyenne du polluant peut être modélisée par le profil $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$ avec $\overline{C}_0(y) = C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right)$ et $l_0=1$ m. Cette modélisation 1D est justifiée par le fait que l_0 est petit devant L . On souhaite calculer l'évolution de la concentration moyenne $\overline{C}(y, t)$ que l'on suppose donc indépendante de x sur le domaine d'étude considéré.

- 1) Exprimer C_m en fonction de M et l_0 et indiquer sa valeur numérique. Écrire l'équation d'advection-diffusion de C . Moyenner cette équation. En déduire l'équation de diffusion turbulente qui régit $\overline{C}(y, t)$.

On doit avoir $M = L \int_{-\infty}^{\infty} C_m \exp\left(-\frac{y^2}{2l_0^2}\right) dy = \sqrt{2\pi} C_m L l_0$ d'où $C_m = M/(\sqrt{2\pi} L l_0) \sim 4$ kg/m².
 La moyenne de l'équation $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(\underline{U}C) = k_C \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$ s'écrit $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u' C'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v' C'}) = k_C \left(\frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}\right)$. Comme $\overline{C}(y, t)$ ne dépend pas de x , la modélisation du flux turbulent $\underline{F}_{Ct} = \overline{\underline{U}' C'} = -k_{Ct} \text{grad } \overline{C}$ conduit à $\overline{u' C'} = 0$ et $\overline{v' C'} = -k_{Ct} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y}$. L'équation de diffusion turbulente s'écrit donc $\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} = (k_C + k_{Ct}) \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} = k \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2}$.

- 2) Montrer que $\overline{C}(y, t) = C_m \frac{l_0}{l(t)} \exp\left[-\frac{y^2}{2l^2(t)}\right]$ est solution de l'équation de diffusion turbulente lorsque $l^2(t) = 2kt$. On pourra poser $\overline{C} = A(t) \exp[-\varphi(y, t)]$. Comment choisir l'origine des temps, à travers la valeur de t_0 , pour que cette solution vérifie la condition initiale $\overline{C}(y, t_0) = \overline{C}_0(y)$. En déduire le temps T au bout duquel le maximum de concentration $\overline{C}(y, T)$ est en-dessous du seuil de détection $C_d = 0.2$ kg/m² du polluant par les satellites, valable uniquement de jour. Est-il possible de dégazer de nuit, sans être détecté de jour ?

En reportant dans l'équation $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2}$, on obtient $A'(t) - A(t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y, t) = k A(t) \left[-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]$. Si $A(t) = C_m \frac{l_0}{\sqrt{2kt}}$ et $\varphi(y, t) = \frac{y^2}{4kt}$, l'équation s'écrit $-\frac{l_0}{2t\sqrt{2kt}} + \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \frac{y^2}{4kt^2} = k \frac{l_0}{\sqrt{2kt}} \left(-\frac{1}{2kt} + \frac{y^2}{4k^2t^2} \right)$ et se trouve donc bien vérifiée. Comme $l^2(t) = 2kt$, on choisit t_0 tel que $l(t_0) = l_0$, c'est-à-dire $t_0 = l_0^2/(2k) = 50$ s. La concentration maximale $\bar{C}(0, t) = C_m l_0/l(t)$ atteint le seuil C_d lorsque $l(t)/l_0 = C_m/C_d$. Ce seuil est atteint au temps $t = t_0 + T$ tel que $l(t_0 + T) = \sqrt{2k(t_0 + T)} = l_0 C_m/C_d$. On a donc $T = [l_0^2/(2k)] [(C_m/C_d)^2 - 1] \sim 2 \cdot 10^4$ s ~ 5 h30. Ce temps est inférieur à la durée de la nuit. Il faut augmenter la capacité de détection des satellites.

PC3.2 Dimensionnement d'un émissaire en mer

On cherche à dimensionner un émissaire en mer servant à évacuer une cuve d'eaux usées dont la surface libre est située à la cote $Z_{cuv} = 20$ m, la surface libre de la mer étant située à la cote $Z_{mer} = 0$ m. On note D le diamètre de l'émissaire et d la distance de son exutoire à la côte. On suppose que l'émissaire est posé sur une bathymétrie en pente douce.

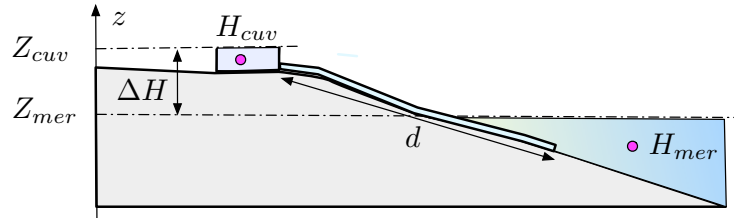


FIG. 7 – Émissaire reliant une cuve à la mer.

- 3) En supposant que la pression atmosphérique p_a est constante, exprimer les charges H_{cuv} et H_{mer} aux cotes respectives Z_{cuv} et Z_{mer} . On suppose que, loin des extrémités du tuyau, la cuve et la mer sont au repos. En déduire que la perte de charge ΔH dans l'émissaire est indépendante de son débit.

On a $H_{cuv} = Z_{cuv} + p_a/(\rho g)$ et $H_{mer} = Z_{mer} + p_a/(\rho g)$. On a donc $\Delta H = (H_{cuv} - H_{mer}) = 20$ m.

- 4) On suppose que $D = 20$ cm, $d = 1$ km et que la taille moyenne des rugosités de la canalisation, en fer galvanisé, est $k_s = 0.2$ mm. Déterminer le débit de l'émissaire ainsi que le nombre de Reynolds de l'écoulement en utilisant le Diagramme de Moody (figure 8) ainsi que la limite rugueuse de la formule de Colebrook de l'hydraulique en charge. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6}$ m²/s.

L'équilibre s'écrit $\Delta H/d = J$ avec $\Delta H/d = 0.02$ et $J = \lambda \frac{U^2}{2gD_H}$. La rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.001$ puisque $D_H = D$. On doit donc résoudre $\Delta H/d = \lambda(U, D) \frac{U^2}{2gD_H}$ où la dépendance de λ en fonction de U et de D est donnée par le diagramme de Moody ou la formule de Colebrook avec $Re = UD/\nu$ et $Ru = k_s/D$.

Cette équation implicite en U se résout explicitement si l'on suppose que le Re est grand. Dans ce cas, le diagramme de Moody conduit à la valeur $\lambda = 0.02$, ce qui implique la valeur $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 2$ m/s. On en déduit $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 4 \cdot 10^5$. On vérifie sur le Diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.02$ est valide pour cette valeur du nombre de Reynolds et l'on voit que le rapport entre $\frac{\beta_f}{Re\sqrt{\lambda}}$ et Ru/α_f est d'environ 0.17 dans la formule de Colebrook avec $\alpha_f = 3.7$ et $\beta_f = 2.51$. On peut donc négliger le premier terme et calculer $\lambda = [-2 \log_{10}(Ru/\alpha_f)]^{-1/2} \sim 0.02$. La formule de Haaland conduit au même résultat à quelques pourcents près. Le débit est $Q = \pi D^2 U/4 \sim 0.06$ m³/s.

- 5) Reprendre le calcul avec une canalisation de diamètre $D = 1$ m, en béton grossier, avec $k_s = 1$ cm.

On a toujours $J = \Delta H/d = 0.02$ mais la rugosité est caractérisée par le nombre $Ru = k_s/D_H = 0.01$. Le diagramme de Moody indique alors la valeur $\lambda = 0.04$. On en déduit $U = \sqrt{\frac{2gDJ}{\lambda}} \sim 3.2$ m/s et $Re = \frac{UD}{\nu} \sim 2.2 \cdot 10^6$. On vérifie sur le diagramme de Moody que l'hypothèse $\lambda \sim 0.04$ est valide. Le débit devient $Q = \pi D^2 U/2 \sim 5$ m³/s.

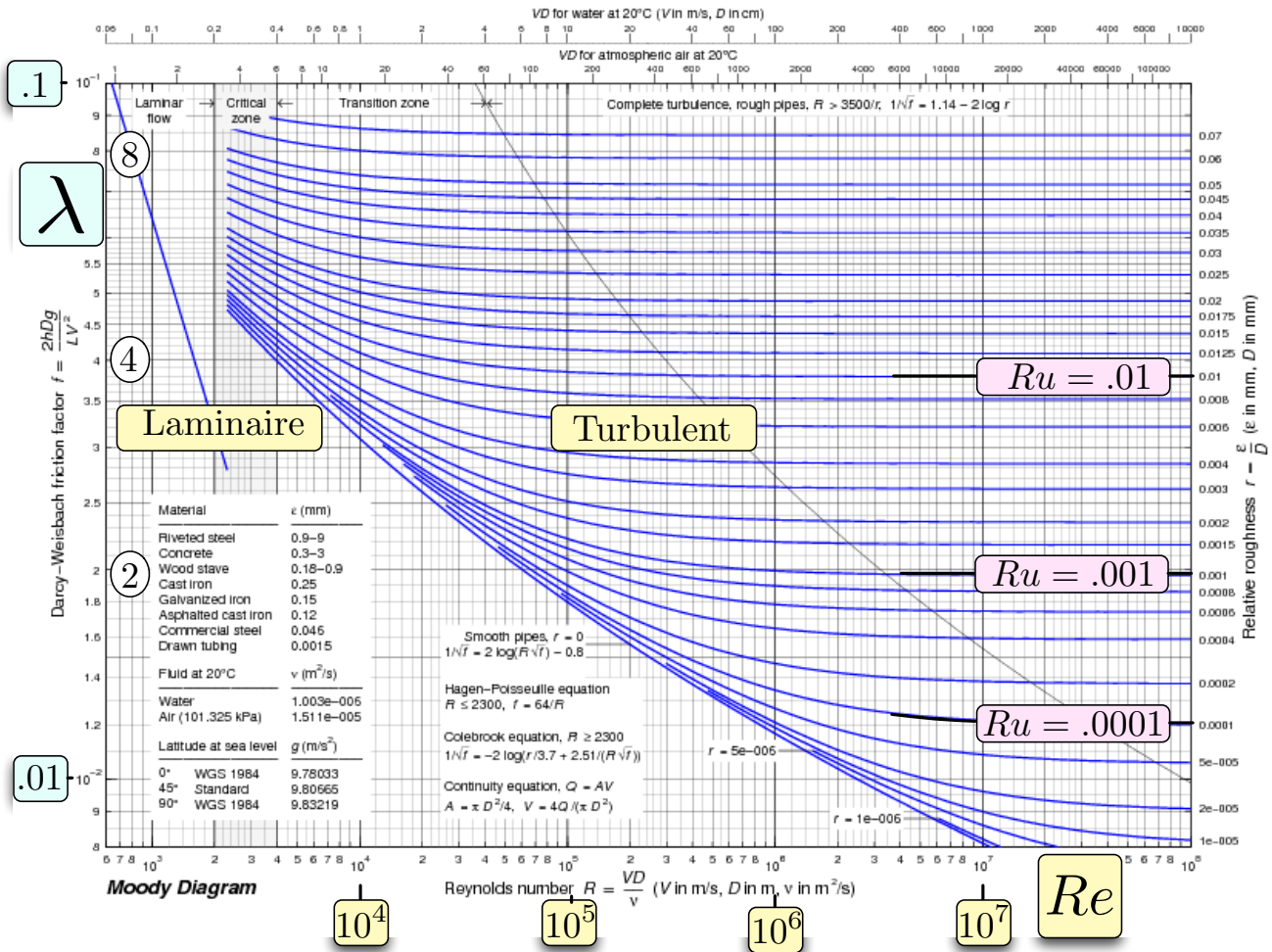


FIG. 8 – Diagramme de Moody. Coefficient de frottement λ en fonction de Re pour différentes valeurs de Ru . Diagramme de Tom Davis.

PC3.3 Conduites d'une usine hydroélectrique

Une conduite en charge de longueur $d = 6$ km relie un lac situé à une cote $z = Z_l$ au-dessus d'une usine hydroélectrique située à un cote $z = Z_u$. On suppose que le dénivelé est $h = Z_l - Z_u = 300$ m. Le tuyau est en acier galvanisé avec $k_s = 1$ mm. Son diamètre est $D = 2$ m. La viscosité de l'eau est $\nu = 10^{-6} m^2/s$.

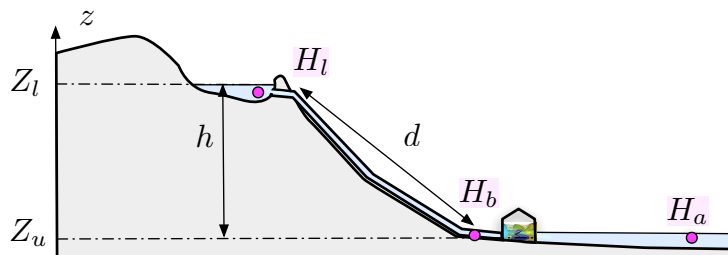


FIG. 9 – Lac, conduite forcée et usine hydroélectrique. Charges hydrauliques H_l, H_b et H_a en trois points.

6) On suppose que la vitesse dans la conduite est $U = 1$ cm/s. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Déterminer le coefficient de perte de charge λ . Calculer la perte de charge linéique.

Le nombre de Reynolds est $Re = UD/\nu = 2 \cdot 10^4$. Comme on a $Ru = 5 \cdot 10^{-4}$, on est en régime lisse. Le Diagramme de Moody conduit alors à la valeur $\lambda \sim 0.025$. On en déduit $J = \lambda \frac{U^2}{2gD} \sim 6 \cdot 10^{-8}$.

- 7) Exprimer la charge H_l du lac en notant p_a la pression atmosphérique. On note H_b la charge au bas de la conduite, juste avant l'usine. Exprimer H_b en fonction de H_l , de la vitesse U dans la conduite et de ses caractéristiques. Que vaut H_b si $U = 0$? Calculer la vitesse U_m lorsque $H_b = H_a$ où $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge du lac artificiel situé en aval de l'usine. Vérifier que le régime est rugueux. Comparer l'ordre de grandeur du terme $\frac{U^2}{2g}$ à la perte de charge totale.

On a $H_l = \frac{p_a}{\rho g} + Z_l$. La charge H_b vérifie $H_l = H_b + Jd$ avec $J = \lambda(Re, Ru) \frac{U^2}{2gD}$. On a donc $H_b = H_l$ pour $U = 0$. Comme $Ru = 0.0005$, on lit, sur le diagramme de Moody, la valeur $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ en supposant que Re est grand. On a $-\frac{dH}{ds} = \frac{H_l - H_b}{d} = \frac{h}{d} \sim 0.05$. Comme la perte de charge due au frottement est $J = \lambda \frac{U_m^2}{2gD}$ et que $\frac{dH}{ds} = -J$ on en déduit $U_m = \sqrt{\frac{2gDh}{\lambda d}} \sim 11$ m/s. Comme $Re = U_m D/\nu = 22 \cdot 10^6$, on vérifie que l'on est bien en régime rugueux. Le terme $U_m^2/(2g) \sim 6$ m est petit devant la perte de charge $H_l - H_b = 300$ m.



FIG. 10 – Conduites forcées et centrale hydroélectrique.

- 8) La puissance récupérable par l'usine est $P = \beta \rho g (H_b - H_a) Q$ où H_b est la charge en bas de la conduite, $H_a = Z_u + \frac{p_a}{\rho g}$ est la charge dans le lac artificiel situé en aval de l'usine, $\beta = 0.8$ est le rendement des turbines et Q le débit. Calculer le débit qui optimise la puissance produite par la centrale. Que vaut cette puissance? Vérifier que ce débit correspond à un régime rugueux.

La perte de charge dans la conduite est $H_l - H_b = Jd$. Comme $H_l = H_a + h$, on a donc $H_b - H_a = h - Jd$. La vitesse est reliée à la perte de charge par la relation $J = \lambda \frac{U^2}{2gD}$. On suppose que le régime est rugueux et que donc $\lambda \sim 1.7 \cdot 10^{-2}$ est indépendant de U . Le débit est $Q = \frac{\pi D^2}{4} U$. La puissance récupérable s'écrit donc $P = \beta \rho g \left(h - \frac{\lambda d}{2gD} U^2 \right) \frac{\pi D^2}{4} U$.

En dérivant cette expression par rapport à U , on voit que le maximum de puissance est atteint pour $Jd = h/3$, c'est-à-dire pour une perte de charge égale au tiers de la charge disponible. On en déduit que $\frac{\lambda d}{2gD} U^2 = h/3$ et donc $U = \sqrt{\frac{2ghD}{3d\lambda}} \sim 6.3$ m/s. Le débit est alors $Q \sim 20$ m³/s. La puissance maximale est alors $P_{max} = \beta \rho Q \frac{2h}{3} = \beta \rho g \frac{\pi D^2}{4} U \frac{2h}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{6}} \beta \rho \sqrt{g^3 h^3 D^5 / (\lambda d)} \sim 3.2$ MW. Comme $Re = UD/\nu = 1.3 \cdot 10^7$, on est bien en régime rugueux, ce qui justifie l'hypothèse λ constant utilisée dans la dérivation de P par rapport à U .

PC4 : Écoulement sur un obstacle

Cette PC illustre les notions de base de l’hydraulique à surface libre graduellement variée.

PC4.1 Écoulement sur un obstacle

On dispose d’un canal de largeur L et de débit constant Q . On note $q = Q/L$ le débit linéique, h la hauteur de la couche d’eau et U sa vitesse. Les abaques de la figure 11 permettent d’estimer graphiquement la charge spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2}$ et l’impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2$ en fonction de q et h .

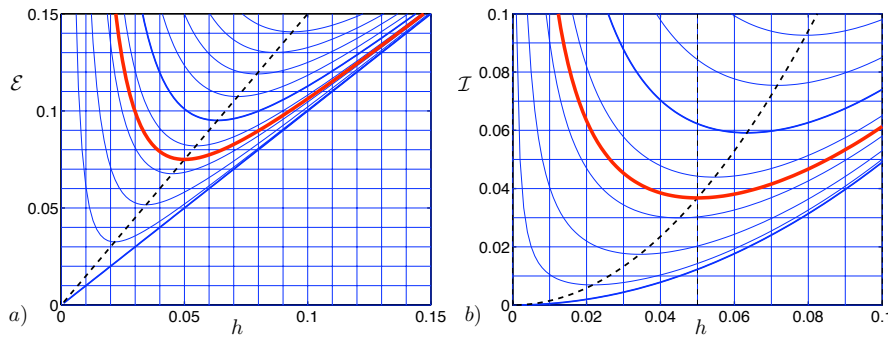


FIG. 11 – a) Énergie spécifique $\mathcal{E}(q, h) = h + \frac{1}{2} \frac{q^2}{gh^2} = \frac{1}{2h^2} (2h^3 + h_c^3)$ et b) Impulsion $\mathcal{I}(q, h) = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{q}{h} (h_c^3 + \frac{1}{2}h^3)$. Intervalle entre les iso- q : $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. En rouge : cas $h_c = 5 \text{ cm}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{E}(q, h)$ et $\mathcal{I}(q, h)$ ont le même minimum h_c , appelé “hauteur critique”, pour un débit donné. On suppose que $h_c = 5 \text{ cm}$. Déterminer le débit linéique q correspondant à partir des abaques. Exprimer le nombre de Froude $Fr = U/\sqrt{gh}$ en fonction de h_c/h . Identifier les régimes sous-critiques et supercritiques.

Les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = 1 - \frac{q}{gh^3}$ et $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial h} = -\frac{q^2}{h^2} + gh$ s’annulent pour $h_c = (q^2/g)^{1/3}$. Si $h_c = 5 \text{ cm}$, on a donc $q = \sqrt{gh_c^3} = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. Comme $q = Uh$, on a $Fr = U/\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{q^2}{gh^3}} = (h_c/h)^{3/2}$. Le régime est supercritique ($Fr > 1$) pour $h < h_c$ et sous-critique ($Fr < 1$) pour $h > h_c$.

On considère un obstacle de forme gaussienne dont la hauteur est donnée par $Z_f(x) = a e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ avec $a = 3 \text{ cm}$ et $\sigma = 20 \text{ cm}$. On dispose, “loin” en amont de l’obstacle (par exemple à 1 m), une vanne de fond dont l’ouverture, réglable, est notée e (voir figure 12). Pour un débit donné ($h_c = 5 \text{ cm}$) on cherche à décrire les régimes d’écoulements stationnaires obtenus pour les différentes valeurs de e en négligeant toutes les pertes de charges.

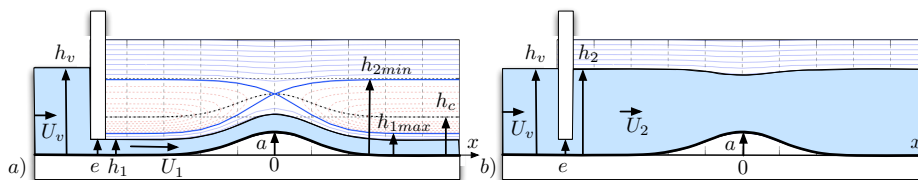


FIG. 12 – Deux états observés pour le même débit et la même ouverture e de vanne.

- 2) Pour $e = 2.5 \text{ cm}$, on observe deux régimes tels que la hauteur h_v de la couche d’eau en amont de la vanne soit commune (voir figure 12). À l’aval de cette vanne, cette hauteur est $h_1 = e$ pour le premier régime et h_2 pour le second. Déterminer, à l’aide des abaques, la charge spécifique commune aux deux

régimes ainsi que h_v et h_2 . En déduire U_1 et U_2 . Pour chacun des régimes, tracer, sur la figure 11a, des segments verticaux indiquant la valeur de l'énergie potentielle h et de l'énergie cinétique $U^2/(2g)$ dont la somme est la charge spécifique \mathcal{E} . Déterminer graphiquement ces valeurs.

La conservation de la charge entraîne que $H = \frac{p_a}{\rho g} + h_v + \frac{U_v^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$ et donc $\mathcal{E}(q, h_v) = \mathcal{E}(q, h_1) = \mathcal{E}(q, h_2) = 12.5$ cm en utilisant $q = hU$. Les hauteurs $h_1 = e = 2.5$ cm et $h_2 = h_v = 12$ cm sont donc conjuguées pour la charge spécifique. On en déduit $U_1 = q/h_1 = 1.4$ m/s et $U_2 = 30$ cm/s. En traçant sur le graphe la droite $\mathcal{E} = h$ (qui est aussi l'asymptote des courbes iso- q), on peut reporter un segment de longueur $h_1 = 2.5$ cm pour le régime a) et $h_2 = 12$ cm pour le régime b), surmonté, respectivement, d'un segment de longueur $U_1^2/(2g) = 10$ cm ou $U_2^2/(2g) = 0.5$ cm.

- 3) Montrer que la coexistence de deux tels régimes n'est possible que pour $e < h_{1max}$ et, en conséquence, $h_v > h_{2min}$ où h_{1max} et h_{2min} sont des valeurs que l'on précisera. Tracer les profils de la surface libre pour tous ces régimes. Que se passe-t-il si $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$? Calculer dans ce cas la hauteur d'eau au voisinage de la vanne et déterminer les régions sous-critiques et supercritiques de l'écoulement.

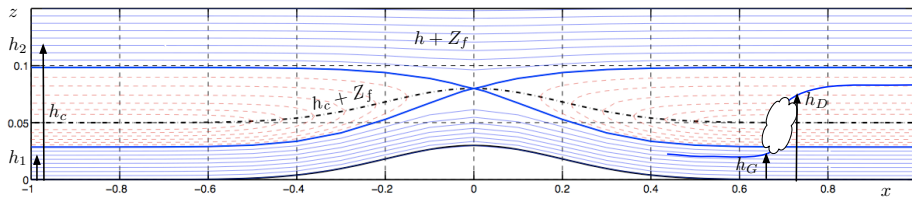


FIG. 13 – Trajectoires possibles pour un débit donné.

On a $\mathcal{E}(q, h_{1max}) = \mathcal{E}(q, h_{2min}) = \mathcal{E}(q, h_c) + a$. On en déduit, à partir de l'abaque, que $h_{1max} = 2.8$ cm et $h_{2min} = 9.8$ cm. En utilisant l'abaque de la charge spécifique, on peut tracer les courbes de remous que l'on peut comparer à la solution numérique de la figure 13. Pour $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$, le régime est bloqué sur la courbe qui part de $h = h_{2min} = 9.8$ cm au voisinage de la vanne, dont le régime est sous-critique ($Fr < 1$) pour $x < 0$ et supercritique ($Fr > 1$) pour $x > 0$ (voir figure 14).

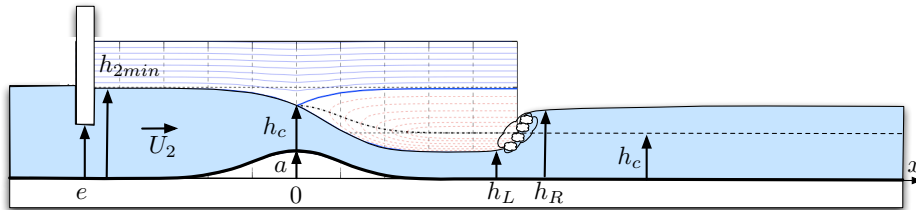


FIG. 14 – Passage critique suivi d'un ressaut hydraulique

- 4) On suppose que $e \in [h_{1max}, h_{2min}]$ et que l'écoulement est donc critique en $x = 0$. Que vaut h en $x = 0$? On observe un ressaut hydraulique "loin" (par exemple à 1 m) en aval de l'obstacle. Déterminer, à l'aide des abaques, les hauteurs h_L et h_R de part et d'autre du ressaut. Déterminer graphiquement la perte de charge à travers le ressaut. Commenter.

On $h = h_c$ en $x = 0$. "Loin" en aval de l'obstacle, on a $h_L = h_{1max} = 2.8$ cm. Comme l'impulsion est conservée à travers le ressaut, on lit sur l'abaque 11b que $\mathcal{I} = 0.047$ m⁻¹ s⁻² et $h_R = 8$ cm. Sur l'abaque 11a, on lit $\mathcal{E}(q, h_L) = 10.5$ cm et $\mathcal{E}(q, h_R) = 9$ cm. Il y a donc une perte de charge $\Delta H = \mathcal{E}(q, h_L) - \mathcal{E}(q, h_R) = 1.5$ cm due à la turbulence intense du ressaut.

On suppose que l'effet des parois peut être modélisé par une formule de Manning-Strickler $J = U^2 K_s^{-2} h^{-4/3}$ où le nombre de Strickler "équivalent" est $K_s = 100$ m^{1/3} s⁻¹ (le vrai Strickler ferait intervenir le rayon hydraulique R_H qui est différent de h lorsque le canal est étroit).

- 5) On suppose que l'obstacle est maintenant un triangle de hauteur $a = 3$ cm et de demi-base $l = 30$ cm (voir figure 15) et que la pente du canal est $I = 0.001$ en dehors de l'obstacle. À l'aide de l'abaque de la figure 16, déterminer la hauteur normale $h_n = [q/(IK_s)]^{3/10}$ sur toutes les parties du canal où $I > 0$.

En déduire une description des courbes de remous de la photographie.

On a $h_n = 1.6$ cm pour la rampe de pente $I = a/l = 0.1$ et $h_n = 8$ cm lorsque $I = 0.001$. Le régime est en forte pente ($h_n < h_c$) sur la rampe et en faible pente ($h_c < h_n$) sinon. On en déduit les courbes de remous M_2 , S_2 , M_3 et M_1 .

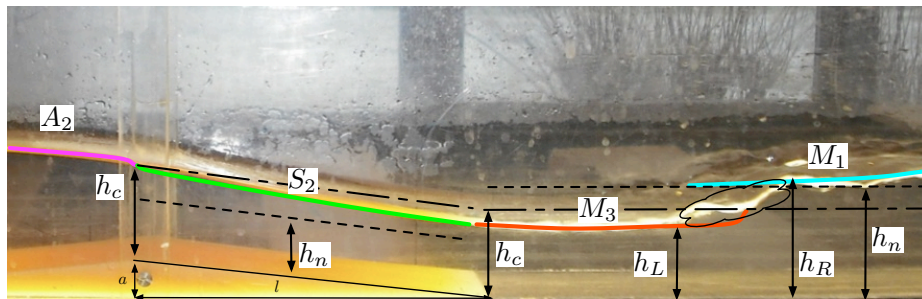


FIG. 15 – Courbes de remous d'un passage critique suivi d'un ressaut.

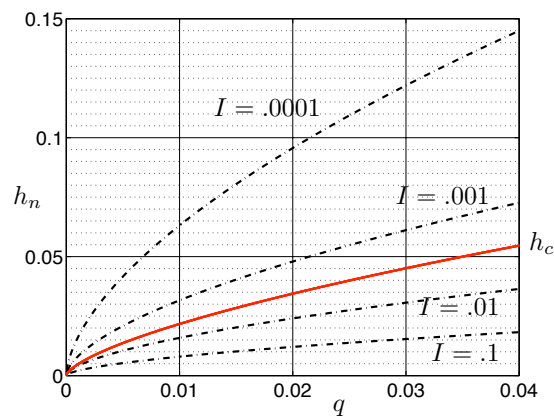
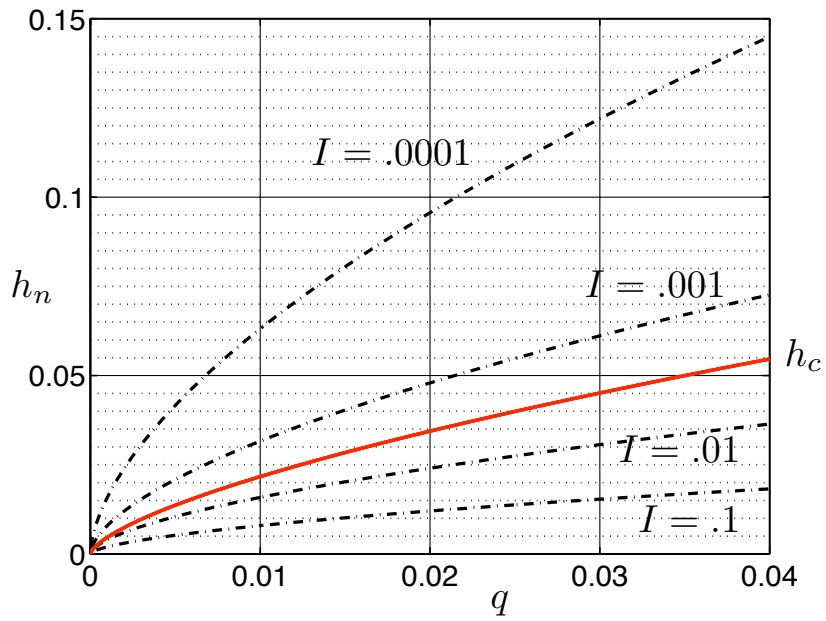
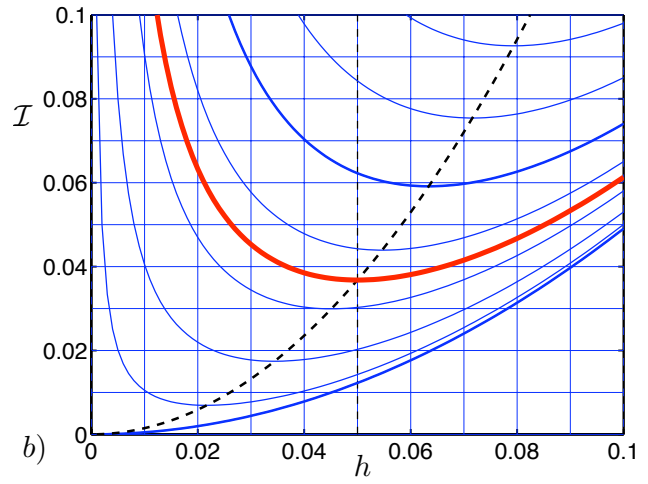
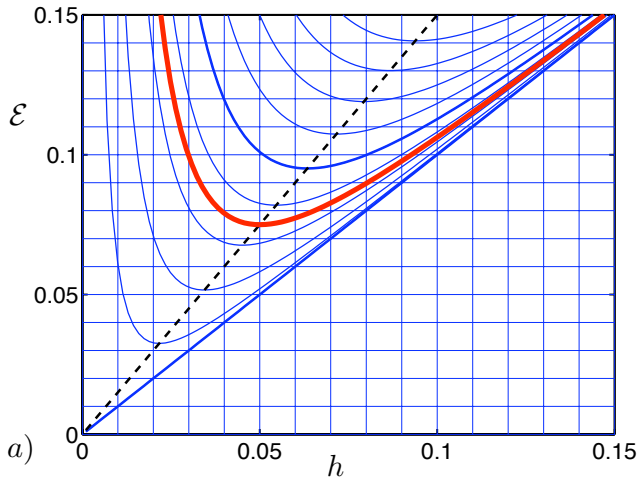


FIG. 16 – Tracé de $h_n = [q/(I K_s)]^{3/10}$ et $h_c = (q^2/g)^{1/3}$ en fonction de q pour $K_s = 100$.

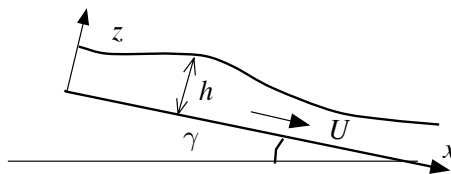


PC5 : Modélisation des ondes crues

Cette PC utilise les modèles de l'approximation des ondes de crues pour la prévision des hydrogrammes de crues à l'exutoire d'un bassin versant.

PC5.1 Approximation des ondes de crues

On considère une rivière de pente $I = \sin \gamma$ et de largeur L constantes qui se laisse modéliser par les équations de Saint-Venant $\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g I - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$ avec $C_f = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}$.



- 1) Lorsque la pente I n'est pas trop petite, on suppose que l'on peut négliger l'accélération et le gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement. En déduire, en supposant $U \geq 0$, que h obéit à l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ où $\lambda(h)$ est une fonction que l'on explicitera. Comment se nomme l'approximation ainsi obtenue ?

L'équilibre $g I = \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} = \frac{2gU^2}{K_s^2 h^{4/3}}$ entre la force de gravité et le frottement entraîne que $U = K_s I^{1/2} h^{2/3}$. En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3} K_s I^{1/2} h^{2/3} = \frac{5}{3} U$. On est dans le cadre de l'approximation des ondes de crues.

- 2) Déterminer la hauteur h_n de la solution stationnaire en supposant connu le débit linéique $q = Q/L$. Montrer que l'équation d'évolution des petites perturbations \tilde{h} se ramène à l'équation $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ où λ_n est une constante que l'on explicitera.

Les équations $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$ et $U_n h_n = q$ entraînent $K_s I^{1/2} h_n^{5/3} = q$ et donc $h_n = \left(\frac{q^2}{I K_s^2}\right)^{3/10}$. On en déduit $U_n = q/h_n$. La linéarisation de l'équation d'évolution de h conduit à $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3} U_n$.

PC5.2 Décrue et crue linéaires

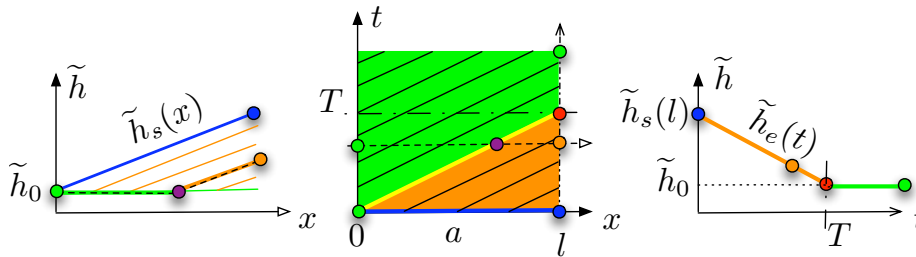
On considère une portion de rivière de longueur l qui draine un bassin versant soumis à une pluie homogène et stationnaire. On modélise cette pluie par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \lambda_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = P$ de la perturbation de hauteur $\tilde{h}(x, t)$ autour du régime normal $h = h_n$ avec $\lambda_n = \frac{5}{3} U_n$ et $U_n = K_s I^{1/2} h_n^{2/3}$. On suppose que la perturbation de hauteur d'eau en amont est constante et donnée par la condition aux limites $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_0$. On s'intéresse alors à la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t)$ à l'exutoire de la portion de rivière lorsque la pluie s'arrête.

- 3) Calculer et tracer la solution stationnaire $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_s(x)$ obtenue pour une pluie constante P . On pourra noter $\chi = P/\lambda_n$.

La solution de l'équation $\lambda_n \tilde{h}'_s(x) = P$ avec la condition $\tilde{h}_s(0) = \tilde{h}_0$ est $\tilde{h}_s(x) = \tilde{h}_0 + \chi x$ avec $\chi = P/\lambda_n$. Le profil $\tilde{h}_s(x)$ est linéaire.

- 4) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le profil de hauteur d'eau est la solution stationnaire $\tilde{h}(x, 0) = \tilde{h}_s(x)$ pour $x \in [0, L]$. On suppose que l'intensité de pluie est nulle pour $t \geq 0$. Montrer que $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq T$ avec $T = l/\lambda_n$. Tracer dans le plan (x, t) le lieu des points pour lesquels l'écoulement est uniforme. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\tilde{h}(x, t)$.

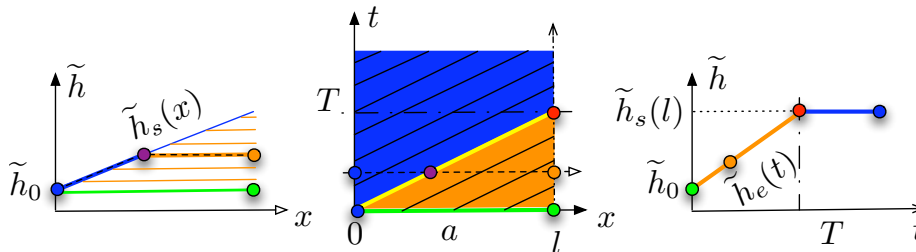
Les caractéristiques de ce modèle sont des droites d'équation $x = a + \lambda_n t$ si a désigne l'abscisse de l'intersection avec l'intervalle $[0, l]$ de l'axe des x ou $x = \lambda_n(t - \tau)$ si τ désigne l'ordonnée de l'intersection avec l'axe des t . Les droites caractéristiques issues du demi-axe des temps $t \geq 0$ coupent la droite $x = l$ à partir du temps $T = l/\lambda_n$. Comme \tilde{h} est un invariant de Riemann le long des caractéristiques et que $\tilde{h}(0, t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq 0$ on a $\tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0$ pour $t \geq T$. La région $t \geq 0$ délimitée par la droite caractéristique $x = \lambda_n t$ est uniforme avec $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$.



Pour $t \leq T$, la caractéristique passant par le point (l, t) du plan (x, t) coupe l'axe des x en $a = l - \lambda_n t$. La condition initiale est égale à $\tilde{h}_s(a) = \tilde{h}_0 + \chi a$ en ce point. On a donc $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + \chi l - \chi \lambda_n t = \tilde{h}_0 + \chi l - Pt$ pour $t \in [0, T]$. La hauteur $\tilde{h}_e(t)$ décroît linéairement à partir de la valeur $\tilde{h}_s(l)$ pour stagner à la valeur \tilde{h}_0 au-delà de $t = T$. Pour $x \leq \lambda_n t$, on a vu que $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$. Pour $x \geq \lambda_n t$, la droite caractéristique passant par (x, t) coupe l'axe des x en $a = x - \lambda_n t$, ce qui entraîne $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + \chi x - Pt$. La solution $\tilde{h}(x, t)$ est égale à $\tilde{h}_s(x - \lambda_n t)$ pour $x \geq \lambda_n t$ et égale à \tilde{h}_0 sinon.

- 5) On suppose maintenant qu'à l'instant initial $t = 0$ la hauteur d'eau est uniforme et égale à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0$ pour $x \in [0, l]$. On suppose l'existence d'une pluie constante P pour $t \geq 0$. Calculer et tracer l'évolution de la hauteur d'eau $\tilde{h}_e(t)$ en fonction du temps. Calculer et tracer à plusieurs instants le profil de hauteur d'eau $\tilde{h}(x, t)$.

Les droites caractéristiques sont les mêmes que pour le cas $P = 0$, mais \tilde{h} n'est plus qu'une fonction de Riemann vérifiant $\left(\frac{d\tilde{h}}{dt}\right)_c = P$. Pour $t \leq T$, l'intégration de la fonction de Riemann le long de la droite caractéristique passant par (l, t) conduit à $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0 + Pt$. Pour $t \geq T$, la droite caractéristique coupe l'axe des t en $(0, t - l/\lambda_n)$ et l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}_e(t) = \tilde{h}(l, t) = \tilde{h}_0 + Pl/\lambda_n = \tilde{h}_0 + \chi l$.



Le profil $\tilde{h}_e(t)$ croît linéairement de \tilde{h}_0 à $\tilde{h}_0 + \chi l = \tilde{h}_0 + PT$ sur l'intervalle $[0, T]$ puis reste constant. Pour $x \geq \lambda_n t$, l'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + Pt$. Pour $x \leq \lambda_n t$, la droite caractéristique passant par (x, t) coupe l'axe des t en $(0, t - x/\lambda_n)$. L'intégration de la fonction de Riemann conduit à $\tilde{h}(x, t) = \tilde{h}_0 + Px/\lambda_n = \tilde{h}_0 + \chi x$. La solution $\tilde{h}(x, t)$ part de \tilde{h}_0 , croît linéairement avec le temps jusqu'à atteindre la valeur du profil stationnaire $\tilde{h}_s(t)$. Le point où cette valeur est atteinte se déplace à la vitesse λ_n .

PC5.3 Crue non linéaire

On considère une portion de rivière de longueur l drainant un bassin soumis à une pluie homogène et stationnaire que l'on modélise par la constante P dans l'équation d'évolution $\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = P$ avec $\lambda(h) = \frac{5}{3} \beta h^{2/3}$ et $\beta = K_s I^{1/2}$. On suppose que le sol est initialement sec, ce que l'on traduit par la condition initiale $h(x, 0) = 0$. On suppose que la condition aux limites à l'amont est $h(0, t) = 0$ pour tout temps.

- 6) Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x, t) = (a, 0)$ pour $a \in [0, l]$. Calculer l'équation des caractéristiques issues des points $(x, t) = (0, \tau)$ pour $\tau \geq 0$. Tracer toutes les courbes caractéristiques du modèle dans la région $(x, t) \in [0, l] \times \mathbb{R}_+$. Calculer l'intersection de la courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ avec la droite d'équation $x = l$. En déduire le temps t_* au-delà duquel l'hydrogramme $h(l, t)$ devient constant. Donner l'expression de cette valeur constante h_* . Exprimer et tracer l'hydrogramme de crue $h(l, t)$ au bas de la pente.

Les caractéristiques sont définies par le système d'équations $\dot{x} = \frac{5}{3} \beta h^{2/3}$ et $\dot{h} = P$ avec les conditions initiales $x(0) = a$ et $h(0) = 0$. On en déduit $h(t) = Pt$ et $\dot{x} = \frac{5}{3} \beta P^{2/3} t^{2/3}$ que l'on intègre en $x(t) = a + \beta P^{2/3} t^{5/3}$. On vérifie qu'il s'agit bien de l'équation de la caractéristique passant par $(a, 0)$. Les conditions initiales pertinentes sont ici $x(\tau) = 0$ et $h(\tau) = 0$. On en déduit que $h(t) = P(t - \tau)$ et que l'équation de la caractéristique passant par $(0, \tau)$ s'écrit $x(t) = \beta P^{2/3} (t - \tau)^{5/3}$. Les caractéristiques sont des courbes déduites les unes des autres par des translations dans le plan (x, t) . Elles ne se coupent donc pas. L'équation de courbe caractéristique issue du point $(x, t) = (0, 0)$ est $x = \beta P^{5/3} t^{5/3}$. Elle coupe la droite $x = l$ en (l, t_*) avec $t_* = (l/\beta)^{3/5} / P^{2/5}$. La valeur de $h(l, t)$ à l'équilibre est $h_* = Pt_* = (lP/\beta)^{3/5}$. Les courbes caractéristiques qui atteignent le segment de droite $(x, t) = (l, t)$ avec $t \in [0, t_*]$, sont toutes issues du segment de droite $(x, t) = (a, t)$ avec $a \in [0, l]$. La valeur de $h(l, t)$ est donc égale à $h(l, t) = Pt$ pour $t \in [0, t_*]$ et à $h(l, t) = h_*$ pour $t \geq t_*$.

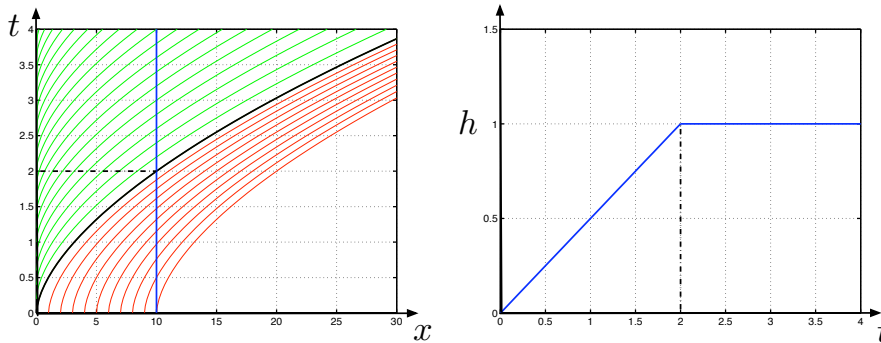


FIG. 17 – a) Courbes caractéristiques. b) Courbe $h(l, t)$ en fonction du temps.

- 7) Calculer numériquement, même de manière très grossière, les valeurs de t_* , en heures, et de h_* , en m, pour une longueur $l = 10$ km, une largeur $L = 1$ m, une pente $I = 0.1$, un nombre de Strickler de $K_s = 10 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$ et une pluie $p = 1$ mm/jour sur un bassin versant d'aire $A = 10 \text{ km}^2$ en supposant que toute l'eau des précipitations est drainée par la rivière.

On a $P = p A / (l L)$. L'application numérique conduit à un temps t_* de l'ordre de 3 heures et une hauteur h_* de ruissellement au bas de la pente de l'ordre de 14 cm.

PC6 : Canal à choc

Cette PC illustre les notions d'ondes de détente ou de compression sur le cas concret du phénomène de mascaret et de la rupture d'un barrage.

PC6.1 Onde de détente

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \leq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$). On suppose que l'on peut contrôler la vitesse $U(0, t) = U_e(t) \geq 0$ en $x = 0$ au moyen d'une grille qui limite le débit. On suppose que le contrôle de la vitesse permet d'imposer $U_e(t) = \beta t$ sur l'intervalle $t \in [0, t_1]$ et $U_e(t) = U_1$ pour $t \geq t_1$ avec $U_1 = \beta t_1$. On suppose que $U_1 < 2c_0/3$ avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$.

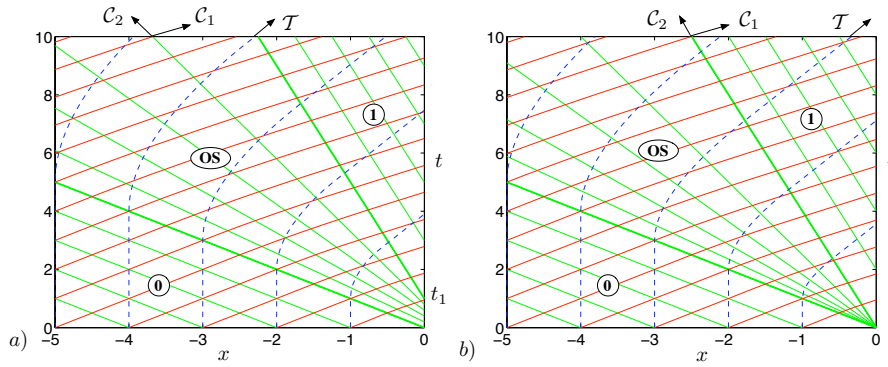


FIG. 18 – Caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires T (bleu tireté) et régions (0), (OS) et (1). a) Onde de détente issue de $t \in [0, t_1]$. b) Onde de détente centrée.

- 1) On suppose que toutes les courbes caractéristiques C_1 issues de l'axe Ox coupent l'axe Ot (hypothèse à valider a posteriori). En déduire que J_1 est constant dans tout le quart de plan et donner sa valeur. En déduire c_1 dans la région uniforme (1) et $c_e(t)$ pour $t \in [0, t_1]$. Décrire les caractéristiques C_2 dans les régions uniformes (0) et (1). Montrer que les courbes caractéristiques C_2 sont des droites dans la région de l'onde simple (OS). On note $[0, \tau(x, t)]$ le point du plan à l'intersection de l'axe Ot et de la droite C_2 qui passe par le point (x, t) de la région (OS) avec $x \leq 0$ et $t \geq 0$. Montrer que $\tau(x, t)$ est solution d'une équation du second degré dont les coefficients dépendent de x et de t . Exprimer $\tau(x, t)$ en choisissant la racine pertinente pour le problème d'intersection de droites. En déduire $U(x, t)$ et $h(x, t)$. Écrire l'équation différentielle permettant de définir, respectivement, les courbes C_1 et les trajectoires T .

En connectant les régions (0) et (1) par une C_1 , l'existence de l'invariant de Riemann $J_1 = 2c_0 = U_1 + 2c_1$ entraîne que $c_1 = c_0 - U_1/2$. Les droites $x = -c_0 t$ et $x = (U_1 - c_1)t = (3U_1/2 - c_0)t$ délimitent les régions (0), (OS) et (1). Comme $U_1 < 2c_0/3$, la deuxième droite est bien dans le demi-plan ($x \leq 0, t \geq 0$). Pour $t \in [0, t_1]$, l'invariance des $J_1 = 2c_0 = U_e(t) + 2c_e(t)$ entraîne $c_e(t) = c_0 - U_e(t)/2 = c_0 - \beta t/2$. Les C_2 sont les droites $x = a - c_0 t$ dans la région (0), les droites $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (OS) et $x = (U_1 - c_1)(t - \tau) = (3\beta t_1/2 - c_0)(t - \tau)$ dans la région (1). On a $(U, c) = (0, c_0)$ dans la région (0) et $(U, c) = (U_1, c_1) = (U_1, c_0 - U_1/2)$ dans la région (1). Dans la région (OS), on a $U(x, t) = U_e[\tau(x, t)] = \beta\tau(x, t)$ et $c(x, t) = c_e[\tau(x, t)] = c_0 - \frac{1}{2}\beta\tau(x, t)$ où $\tau(x, t)$ est solution de l'équation implicite $x = [U_e(\tau) - c_e(\tau)](t - \tau) = (3\beta\tau/2 - c_0)(t - \tau)$ ce qui s'écrit aussi $\frac{3\beta}{2}\tau^2 - (c_0 + \frac{3\beta}{2}t)\tau + (x + c_0 t) = 0$. On en déduit $\tau(x, t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{c_0}{3\beta}\right) - \sqrt{\left(\frac{t}{2} - \frac{c_0}{3\beta}\right)^2 - \frac{2x}{3\beta}}$, le choix de cette racine étant motivé par le fait que $\tau(0, 0) = 0$. Dans la région (OS), les courbes C_1 sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = [U(x, t) + c(x, t)] = [c_0 + \beta\tau(x, t)/2]$ tandis que les trajectoires T sont définies par l'équation différentielle $\dot{x} = U(x, t) = \beta\tau(x, t)$.

- 2) Décrire l'écoulement de manière aussi détaillée dans le cas de l'onde de détente centrée obtenue dans la limite où t_1 est très petit. Calculer l'expression de $U(x, t)$ et $h(x, t)$ dans l'onde simple.

Pour (x, t) donné, $U(x, t)$ et $c(x, t)$ sont solutions du système formé par les deux équations $x/t = (U - c)$ et $2c_0 = U + 2c$. On en déduit $U(x, t) = \frac{2}{3}c_0 + \frac{2}{3}x/t$ et $c(x, t) = \frac{2}{3}c_0 - \frac{1}{3}x/t$.

3) Que se passe-t-il si $U_1 = 2c_0/3$? Calculer le nombre de Froude en $x = 0$. Comment varie le nombre de Froude $Fr(x, t)$ en un point $x \leq 0$ donné? Peut-on imposer une vitesse supérieure à cette valeur en $x = 0$?

Si $U_1 = 2c_0/3$, la caractéristique C_2 issue de $(0, t_1)$ est verticale car on a $U_1 = c_1$. La condition aux limites en $x = 0$ est alors "bloquée" à cette valeur. Le nombre de Froude $Fr = U_1/c_1$ vaut 1. En tout point x , le nombre de Froude $Fr(x, t) = U/c = \frac{2c_0 t + 2x}{2c_0 t - x}$ tend vers 1. L'écoulement devient "critique" ($Fr = 1$) en tout point. Il est impossible de le contrôler par une condition aux limites aval.

PC6.2 Choc centré

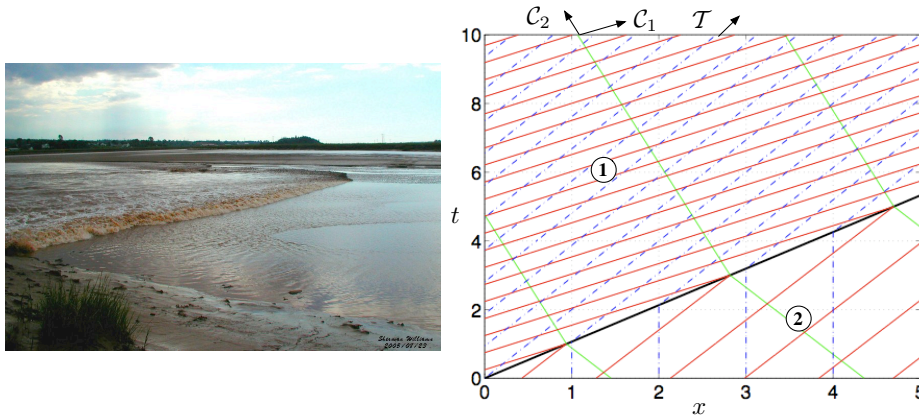


FIG. 19 – Choc centré (noir), caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires \mathcal{T} (bleu tireté) et régions (1) et (2).

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit la portion $x \geq 0$ du canal par une lame d'eau de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). On suppose que la hauteur en $x = 0$ passe brusquement de la valeur $h(0, 0) = h_2$ à la valeur $h(0, t) = h_1$ pour tout $t \geq 0$, et que $h_1 > h_2$.

4) Calculer la vitesse W du choc. Décrire les C_1 et les C_2 dans les régions uniformes (1) et (2). Décrire les trajectoires \mathcal{T} des particules fluides.

Les relations de saut s'écrivent ici $h_1(U_1 - W) = h_2(-W)$ et $h_1 U_1(U_1 - W) + \frac{1}{2}g h_1^2 = \frac{1}{2}g h_2^2$. On en déduit $W = U_1 h_1 / (h_1 - h_2)$ et $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. La vitesse du choc est alors $W = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. Les trajectoires \mathcal{T} sont des droites de vitesses respectives U_1 et U_2 .

PC6.3 Rupture de barrage

On considère un écoulement dans un canal modélisé par les équations de Saint-Venant sans pente et sans frottement. On remplit tout le canal en séparant la portion $x \leq 0$, de hauteur h_0 au repos ($U_0 = 0$) de la portion $x \geq 0$, de hauteur h_2 au repos ($U_2 = 0$). À l'instant $t = 0$, on enlève brusquement la séparation entre les deux portions. On suppose que cette mise en contact génère une onde de détente centrée à gauche et un choc centré à droite.

5) En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, montrer que $Y = F(X)$ avec $F(X) = X + \frac{X^2 - 1}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{X^2}}$. En supposant possible l'inversion graphique de cette fonction, montrer que l'on peut décrire tout l'écoulement.

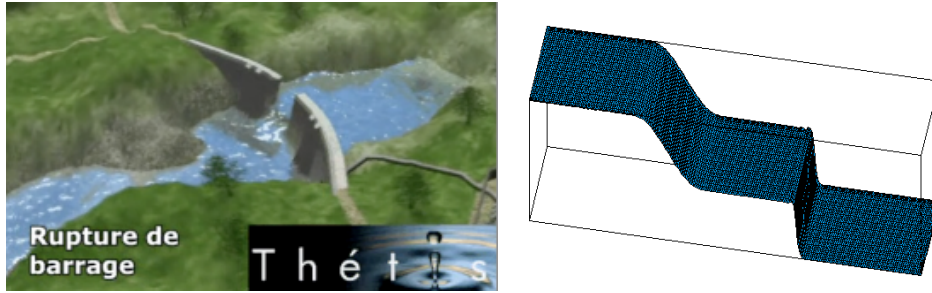


FIG. 20 – Rupture de barrage. a) Simulation avec le code Thétis. b) solution analytique.

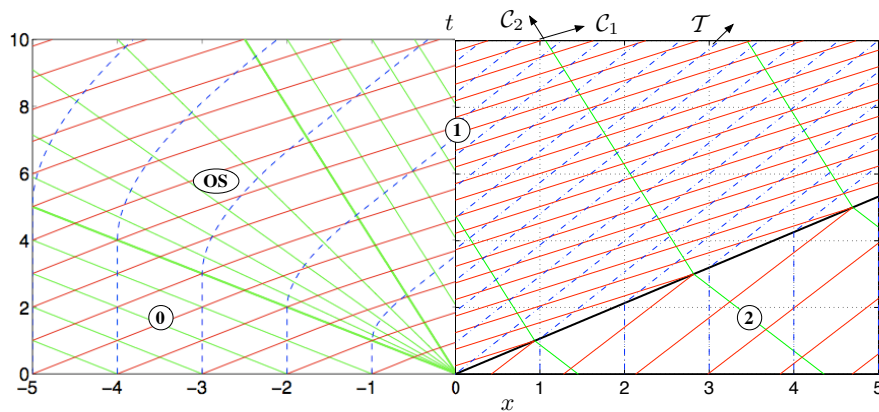


FIG. 21 – Rupture de barrage. Caractéristiques C_1 (rouge) et C_2 (vert), trajectoires T (bleu tireté), choc centré (noir) et régions (0), (OS), (1) et (2)

La relation de l'onde de détente impose $2c_0 = 2c_1 + U_1$ tandis que la relation du choc centré impose $U_1 = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. On en déduit la relation $2\sqrt{g h_0} - 2\sqrt{g h_1} = \frac{h_1 - h_2}{\sqrt{h_1 h_2}} \sqrt{g \frac{h_1 + h_2}{2}}$. En posant $X = c_1/c_2$ et $Y = c_0/c_2$, on obtient l'équation implicite $Y = F(X)$ qui permet d'exprimer l'inconnue c_1 en fonction des données c_0 et c_2 .

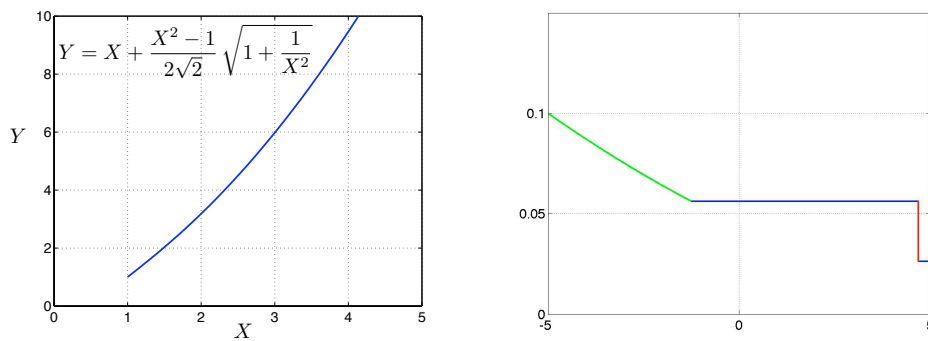


FIG. 22 – a) Graphe $Y = F(X)$. b) Profil $h(x, t)$ à t donné.

6) Calculer la vitesse du ressaut pour $h_0 = 10\text{m}$ et $h_2 = 40\text{ cm}$.

On a $c_0 = \sqrt{g h_1} = 10\text{ m/s}$ et $c_2 = \sqrt{g h_2} = 2\text{ m/s}$. On en déduit $Y = c_0/c_2 = 5$ et on lit $X = 2.7$. Comme $X = c_1/c_2$, on a $c_1 = 5.4\text{ m/s}$. On en déduit $U_1 = 2(c_0 - c_1) = 9.3\text{ m/s}$ et $W = U_1/(1 - h_2/h_1) = U_1/(1 - c_2^2/c_1^2) = 10.8\text{ m/s}$, soit environ 40 km/h .

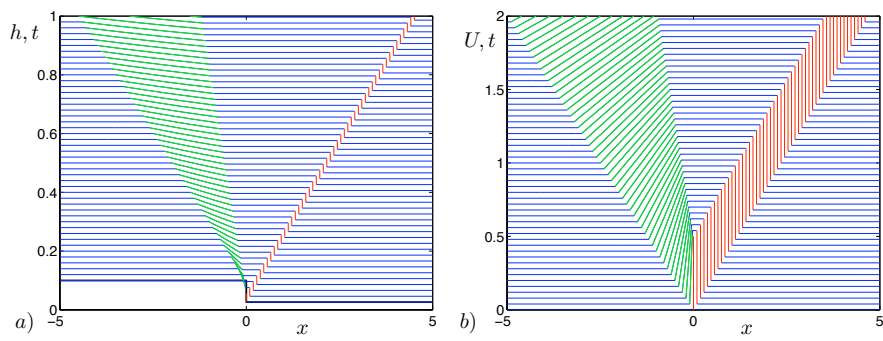


FIG. 23 – Évolution temporelle des profils. a) $h(x,t)$. b) $U(x,t)$.

PC7 : Ondes de surface

Cette PC établit la relation de dispersion des ondes de surface dans le cas d'une profondeur infinie. Dans le cas d'une profondeur finie, la mesure de la pression au fond permet de calculer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

PC7.1 Milieu très profond

On considère une couche fluide infiniment profonde dont la surface libre, d'équation $z = \eta(x, t)$, est en contact avec l'atmosphère de pression constante p_a . On suppose que le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler incompressibles 2D

$$\operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique, $\underline{U}(x, z, t) = u \underline{e}_x + w \underline{e}_z$ est le champ de vitesse et $p(x, z, t)$ est le champ de pression.

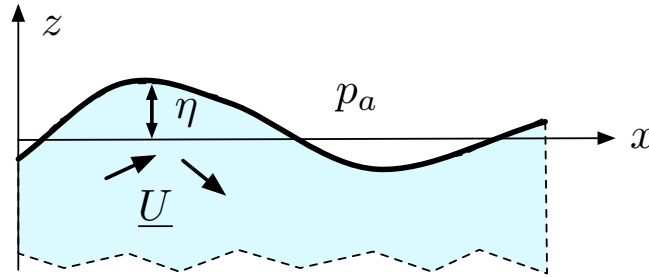


FIG. 24 – Couche infiniment profonde à surface libre d'équation $z = \eta(x, t)$

- 1) Interpréter les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$ et $p = p_a$ en $z = \eta(x, t)$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} w = 0$.

La condition aux limites cinématique de surface énonce que la vitesse normale à la surface libre, d'équation $F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$, est égale à la vitesse normale de cette surface. Cette condition s'écrit $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{U} \cdot \operatorname{grad} F = 0$ ou encore $\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = w$. La condition aux limites dynamique exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression. La condition cinématique $w = 0$ sur un fond plat est ici reportée à l'infini $z \rightarrow -\infty$.

- 2) Indiquer les étapes qui permettent de modéliser les petites oscillations irrotationnelles de la surface libre à l'aide du système d'équations $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$, $\Delta \phi = 0$ et $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta$ en $z = 0$ et $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$.

L'hypothèse irrotationnelle permet d'écrire le champ de vitesse sous la forme $\underline{U} = \operatorname{grad} \phi$ où $\phi(x, z, t)$ est le potentiel des vitesses. La condition $\operatorname{div} \underline{U} = 0$ s'écrit alors $\Delta \phi = 0$. L'équation de quantité de mouvement linéarisée $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - g \underline{e}_z$ s'intègre en $\frac{\partial \phi}{\partial t} + p/\rho + g z = p_a/\rho$, la constante d'intégration p_a/ρ pouvant être choisie ainsi dans la mesure où ϕ est défini à une constante $C(t)$ près. En développant les valeurs $f[x, \eta(x, t), t] = f(x, 0, t)[1 + O(\eta)]$ des champs en surface pour les petites oscillations, on peut appliquer les conditions aux limites en $z = 0$ plutôt qu'en $z = \eta(x, t)$. On linéarise alors ces conditions aux limites en utilisant $w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ et $p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p_a - \rho g z$.

- 3) Justifier la recherche de solutions complexes de la forme $\phi = \Phi(z) e^{i k_x x - i \omega t}$ et $\eta = \eta_m e^{i k_x x - i \omega t}$ où $\Phi(z)$ et η_m sont complexes. Montrer que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où $k = |k_x|$.

Les équations étant linéaires à coefficients réels, la partie réelle d'une solution complexe est aussi solution. Comme les coefficients sont constants, les solutions sont des exponentielles. On vérifie a posteriori que le taux de croissance temporel de ces ondes est nul. En reportant dans l'équation $\Delta \phi = 0$, on obtient $\Phi''(z) + k^2 \Phi(z) = 0$. En utilisant la condition aux limites en $-\infty$, on voit que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(k z)$ où Φ_m est une amplitude complexe arbitraire.

- 4) En déduire la relation de dispersion $\omega = \pm\sqrt{gk}$ des ondes de surfaces en eaux profondes. Montrer que l'on peut choisir η_m réel sans perte de généralité et exprimer la solution réelle sous la forme $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} e^{kz} \sin(k_x x - \omega t)$. Montrer que les trajectoires de ces petites oscillations sont des cercles de centres (x_0, z_0) et de rayon $a(z_0)$ que l'on calculera. Quel est l'ordre de grandeur de la profondeur au-dessous de laquelle une houle de longueur d'onde L_x devient négligeable ?

Les conditions aux limites s'écrivent $-i\omega\eta_m = k\Phi_m$ et $-i\omega\Phi_m = -g\eta_m$. On en déduit que $\omega^2 = gk$ et $\Phi_m = -ig\eta_m/\omega$. On peut se ramener à η_m réel en changeant l'origine des x ou des t . La partie réelle de la solution complexe est alors de la forme indiquée. Comme $u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$, la trajectoire de centre (x_0, z_0) est décrite par $x(x_0, z_0; t) = x_0 - a \cos(k_x x - \omega t)$ et $z(x_0, z_0; t) = z_0 + a \sin(k_x x - \omega t)$ où $a(z_0) = g\eta_m \exp(kz_0)/\omega$ est le rayon du cercle. À la profondeur L_x , l'amplitude du mouvement a diminué d'un facteur $\exp(-2\pi) \sim 2 \cdot 10^{-3}$.

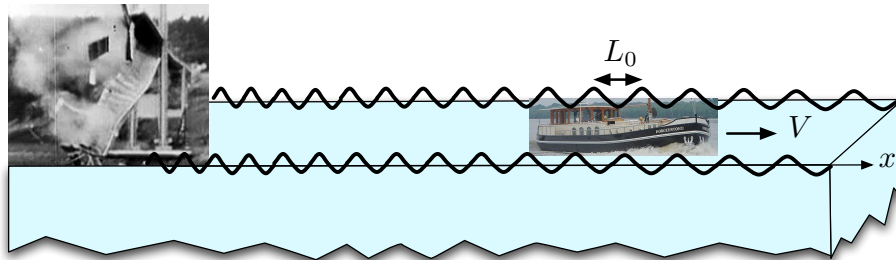


FIG. 25 – La péniche de vitesse V voit une longueur d'onde L_0 suite à la rupture du pont.

- 5) Un pont traversant un canal s'éroule au passage d'une péniche qui continue sa course à la vitesse V . Au bout d'un certain temps, les passagers de la péniche observent une vague de longueur d'onde $L_0 = 0.624$ m qui se propage à la même vitesse qu'eux. En supposant que la profondeur du canal est infinie, calculer la vitesse V . On pourra prendre $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Comme la profondeur est grande devant la longueur d'onde L_0 , la relation de dispersion des ondes de surface peut être approximée par $\omega(k) = \sqrt{gk}$. La vitesse de groupe est alors $c_g(k) = \omega'(k) = (1/2)\sqrt{g/k}$. En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on obtient que $V = c_g(k_0)$ avec $k_0 = 2\pi/L_0$. On a donc $V = .5 \sqrt{g L_0/(2\pi)} \sim 0.5 \text{ m/s}$.

PC7.2 Mesure de la houle

On souhaite mesurer l'amplitude η_m et la longueur d'onde $L_x = 2\pi/k_x$ d'une houle monochromatique à l'aide d'un capteur de pression disposé au fond de la couche fluide d'épaisseur h_r . On note $p_f(t)$ le signal de pression enregistré par cette sonde.

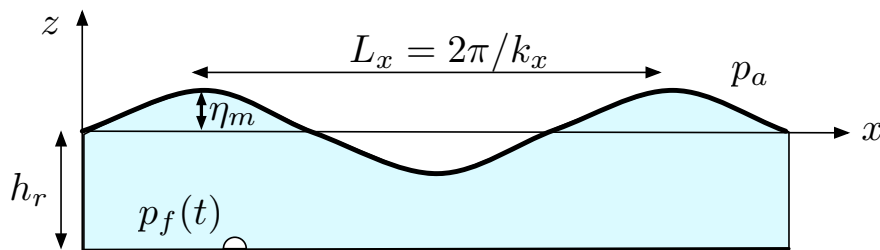


FIG. 26 – Capteur de pression pour mesurer l'amplitude et la longueur d'onde de la houle.

- 6) Indiquer les étapes qui conduisent à l'expression $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ et $\phi = \frac{g\eta_m}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h_r)]}{\cosh(kh_r)} \sin(k_x x - \omega t)$ avec $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh_r)}$ pour décrire une onde monochromatique.

La linéarisation des équations d'Euler irrotationnelle avec surface libre en contact avec l'atmosphère de pression constante conduit à un système linéaire qui permet de déterminer la structure verticale du champ de vitesse et la relation de dispersion. On a choisi ici l'onde de vitesse de phase positive.

7) Montrer que le champ de pression s'écrit $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$. En déduire que $p_f(t) = \bar{p}_f + p_m \cos(\omega t + \varphi)$ où p_m est une constante que l'on exprimera en fonction de η_m et k_x . En déduire la détermination de k_x et η_m à partir des valeurs de ω et p_n mesurées par la sonde. On suppose que l'on sait inverser graphiquement la fonction $F(\xi) = \sqrt{\xi \tanh \xi}$ (voir figure 27). En supposant que $h_r = 14.4$ m, calculer la longueur d'onde L et la hauteur H des vagues si la période mesurée est $T = 6.24$ s et la fluctuation de pression $p_n = 10^3$ Pa (on pourra prendre $g = 10$ m s⁻²).

L'expression de pression s'obtient à partir des équations d'Euler linéarisées. On a $\bar{p}_f = p_a - \rho g h_r$ et $p_m = \rho g \eta_m / \cosh(k h_r)$. Connaissant ω , la résolution de l'équation implicite $\omega = \sqrt{g k \tanh(k h_r)} = \sqrt{g/h_r} F(k h_r)$ à partir du tracé de F s'effectue en écrivant $F(\xi) = \omega \sqrt{h_r/g}$ avec $\xi = k h_r$. On en déduit k et $\eta_m = \frac{p_m}{\rho g} \cosh \xi$. Pour $T = 6.24$ s, on a $\omega = 2\pi/T = 1$ Hz et $\omega \sqrt{h_r/g} = 1.2$. La résolution graphique conduit à $\xi \sim 1.6$ dont on déduit $\cosh \xi \sim 2.5$. On en déduit donc $L_x = 2\pi/k_x = 2\pi h_r/\xi = 57$ m et $\eta_m = 0.5$ m. La hauteur des vagues est alors $H = 2\eta_m = 0.5$ m.

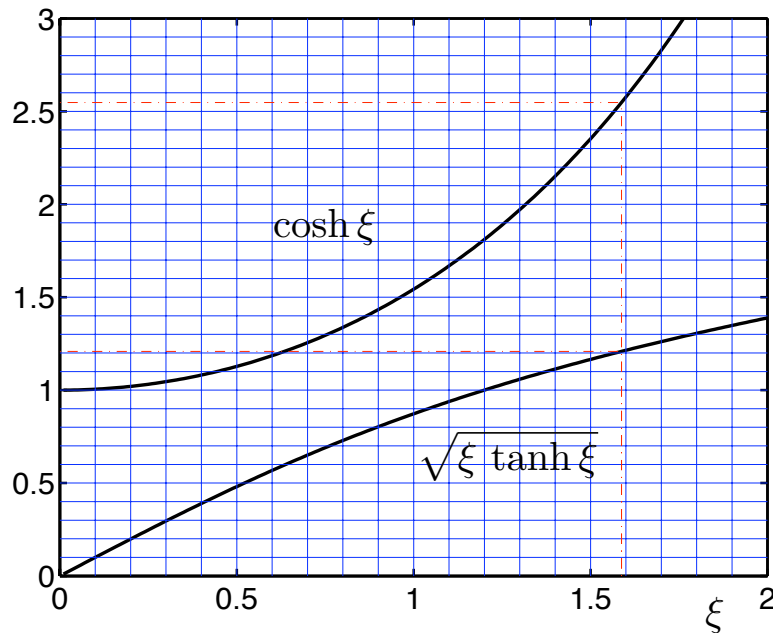


FIG. 27 – Tracé des fonctions $\cosh(\xi)$ et $F(\xi) = \sqrt{\xi \tanh(\xi)}$.

PC8 : Réfraction de la houle

Cette PC illustre, à travers plusieurs petits exercices, les notions de réfraction et de shoaling.

PC8.1 Loi de Snel

On considère un milieu 2D inhomogène caractérisé par une relation de dispersion $\omega = \Omega(k_x, k_y, x)$ indépendante de la coordonnée y . On considère un champ d'ondes suffisamment dispersé pour que l'équation de l'Eikonale soit valide et l'on s'intéresse à une région de l'espace où les rayons ne se coupent pas.

- 1) Écrire le système dynamique régissant le tracé d'un rayon $[\underline{x}(t), \underline{k}(t)]$ où $\underline{k}(t)$ est le vecteur d'onde du champ d'ondes au point $\underline{x}(t)$.

Le tracé de rayon est obtenu en résolvant les équations $\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_x}$, $\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial k_y}$, $\dot{k}_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ et $\dot{k}_y = 0$ où Ω désigne $\Omega[k_x(t), k_y(t), x(t)]$.

- 2) On définit les coordonnées polaires (k, θ) d'un vecteur d'onde \underline{k} par les relations $k_x = k \cos \theta$ et $k_y = k \sin \theta$. On considère deux points A et B de coordonnées \underline{x}_A et \underline{x}_B appartenant à un même rayon. On note \underline{k}_A et \underline{k}_B les vecteurs d'ondes aux points A et B et (k_A, θ_A) et (k_B, θ_B) les coordonnées polaires associées. Démontrer que $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$.

Comme $\dot{k}_y = 0$, on a $k_{yA} = k_{yB}$, ce qui s'écrit $k_A \sin \theta_A = k_B \sin \theta_B$.

- 3) On suppose maintenant que la relation de dispersion s'écrit $\Omega(\underline{k}, \underline{x}) = c(x) k$ où k est le module de \underline{k} et $c(x) > 0$ ne dépend pas de y . On appelle "indice de réfraction" le nombre $n(\underline{x}) = c_0/c(x)$ où c_0 est une vitesse de référence constante. Démontrer la loi de Snel $n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B$ où n_A et n_B sont les indices de réfraction des points A et B .

Comme $\Omega(\underline{k}, \underline{x})$ est constant le long d'un rayon, on a $c_A k_A = c_B k_B$. On en déduit $\frac{\sin \theta_A}{c_A} = \frac{\sin \theta_B}{c_B}$ ou encore $n_A \sin \theta_A = n_B \sin \theta_B$.

PC8.2 Tsunamis

Un tremblement de terre abaisse la surface de l'océan d'une hauteur $H_0 = 1$ m sur un disque de rayon $r_0 = 100$ km à une distance $d = 1600$ km de la côte où la profondeur de l'océan est $h_0 = 4000$ m. On étudie le tsunami généré par cet effondrement.

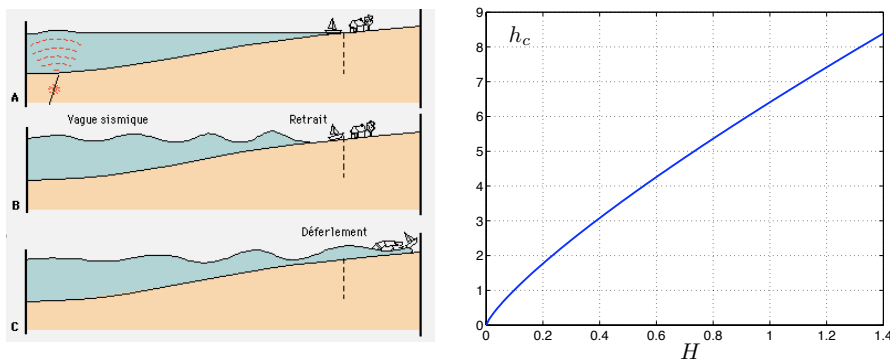


FIG. 28 – a) Schéma d'un tsunami. b) Fonction $h_c(H) = h_0^{1/5} \left(\frac{H}{0.78}\right)^{4/5}$ pour $h_0 = 4$ km.

- 4) À quelle profondeur h_c le tsunami déferle-t-il et quelle est la surcote H_c qui inonde le rivage? Que deviennent ces valeurs pour $H_0 = 4$ m? On pourra utiliser le graphique de la figure 28b.

Comme $r_0/d = 25 \geq 20$, on peut considérer que l'océan est peu profond pour ce tsunami. On a donc $K_r = \sqrt{r_0/d} = 0.25$ au voisinage de la côte et $K_s = (h_0/h_f)^{1/4}$ partout. Le critère de déferlement de Munk $H_c = 0.78 h_c$ et la relation $H = K_r K_s H_0$ conduisent à $h_c = h_0^{1/5} \left(\frac{H_r}{0.78}\right)^{4/5}$ avec $H_r = K_r H_0 = \sqrt{r_0/d} H_0 = 25$ cm. On lit $h_c = 2$ m sur la figure 28b et on a $H_c = 0.78 h_c = 1.6$ m. Pour $H_0 = 4$ m, on a $H_r = 1$ m, $h_c = 6.5$ m et $H_c = 5$ m.

PC8.3 Déferlement de la houle sur une plage

On considère une houle monochromatique de période $T = 10$ s dont les rayons sont perpendiculaires aux isobathes $h_f(x) = \beta x$ avec $\beta = 0.1$.

- 5) Quelle est la longueur d'onde L_0 au large? Montrer que $c_{g0} = \frac{g}{2\omega}$ au large. À quelles profondeurs déferlent les houles de hauteurs respectives au large $H_0 = 1$ m et $H_0 = 4$ m? On pourra utiliser le tracé graphique des fonctions de la figure 29.

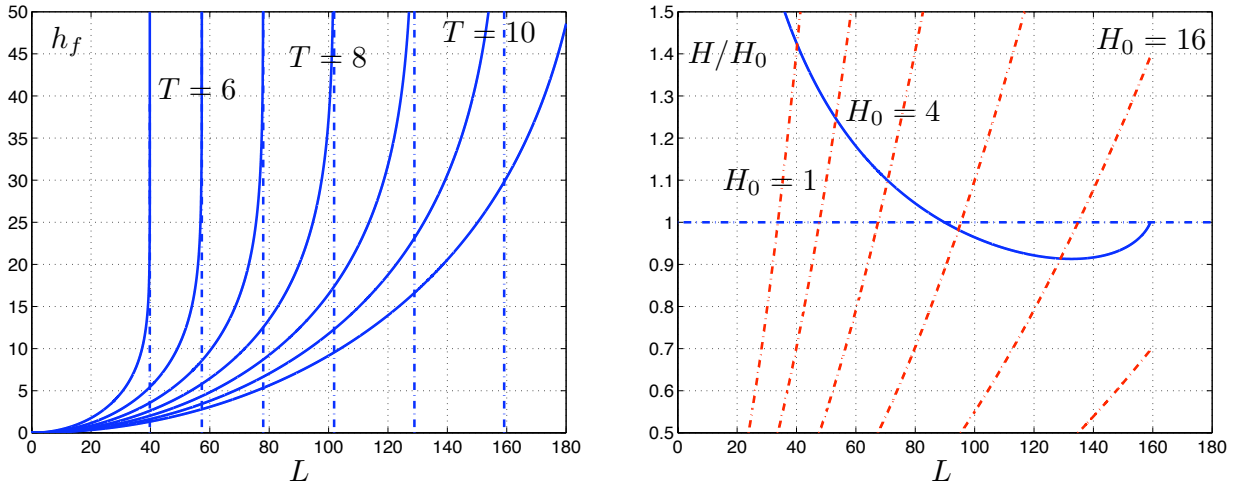


FIG. 29 – a) Fonction $h_f(T, L) = \frac{L}{2\pi} \operatorname{argth} \left(\frac{2\pi L}{gT^2} \right)$ pour les périodes $T = 5, 6, \dots, 11$ s. b) Fonction $K_s(T, L) = H(T, L)/H_0 = \sqrt{\frac{gT^2}{4\pi L} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}}$ pour la période $T = 10$ s et critère de Miche $H_c(T, L)/H_0 = 0.14 L \tanh[2\pi h_f(T, L)/L]/H_0$ pour les hauteurs au large $H_0 = 1, 2, 4, \dots, 32$ m.

Au large, le milieu est profond et on a $\omega = \sqrt{gk_0}$ ce qui entraîne $k_0 = \omega^2/g$ et donc $L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = 160$ m. La vitesse de groupe est $c_{g0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_0}} = \frac{g}{2\omega}$. Comme $\omega = 2\pi/T$ est constant le long des rayons, la longueur d'onde $L = 2\pi/k$ dépend de la profondeur h_f à travers l'équation $\omega^2 = gk \tanh(kh_f)$ dont on déduit la fonction $h_f(T, L) = \frac{1}{k} \operatorname{argth} \left(\frac{\omega^2}{gk} \right) = \frac{1}{2\pi/L} \operatorname{argth} \left(\frac{4\pi^2/T^2}{2\pi g/L} \right)$. Le coefficient de shoaling est $K_s(T, L) = \sqrt{c_{g0}/c_g}$ avec $c_{g0}(T) = \frac{g}{4\pi/T}$ et $c_g(T, L) = \frac{2\pi/T}{2\pi/L} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}$. On a donc $H = K_r K_s H_0$ avec $K_r = 1$ et $K_s(T, L) = \sqrt{\frac{2\pi g/L}{8\pi^2/T^2} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\pi h_f(T, L)/L}{\sinh[4\pi h_f(T, L)/L]} \right\}^{-1/2}}$. Le critère de Miche prévoit le déferlement pour la longueur d'onde L_c solution de l'équation implicite $H_c(T, L) = 0.14 L \tanh[2\pi h_f(T, L)/L]$. Pour $H_0 = 1$ m, on lit $K_s = 1.4$ et $L_c = 40$ m sur la figure 29b puis $h_c = 3$ m sur la figure 29a. Comme la cambrure est $H_c/L_c = K_s H_0/L_c = 3.5\%$ et que la pente du fond est de 10 %, le déferlement est plongeant. On lit de même $L_c = 65$ m, $h_c = 4$ m et $K_s = 1.1$ pour $H_0 = 4$ m. La cambrure est $H_c/L_c = K_s H_0/L_c = 7\%$ et le déferlement est plutôt glissant que plongeant.

- 6) Quelle est l'ordre de grandeur de la puissance disponible dans un houle arrivant sur une côte de longueur

$d = 100 \text{ km}$ avec $T = 10 \text{ s}$ et $H_0 = 1 \text{ m}$.

La puissance est $P = c_{g0} W d = \left(\frac{gT}{4\pi}\right) \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) d \sim 10^9 \text{ W}$, soit 1 000 MW.

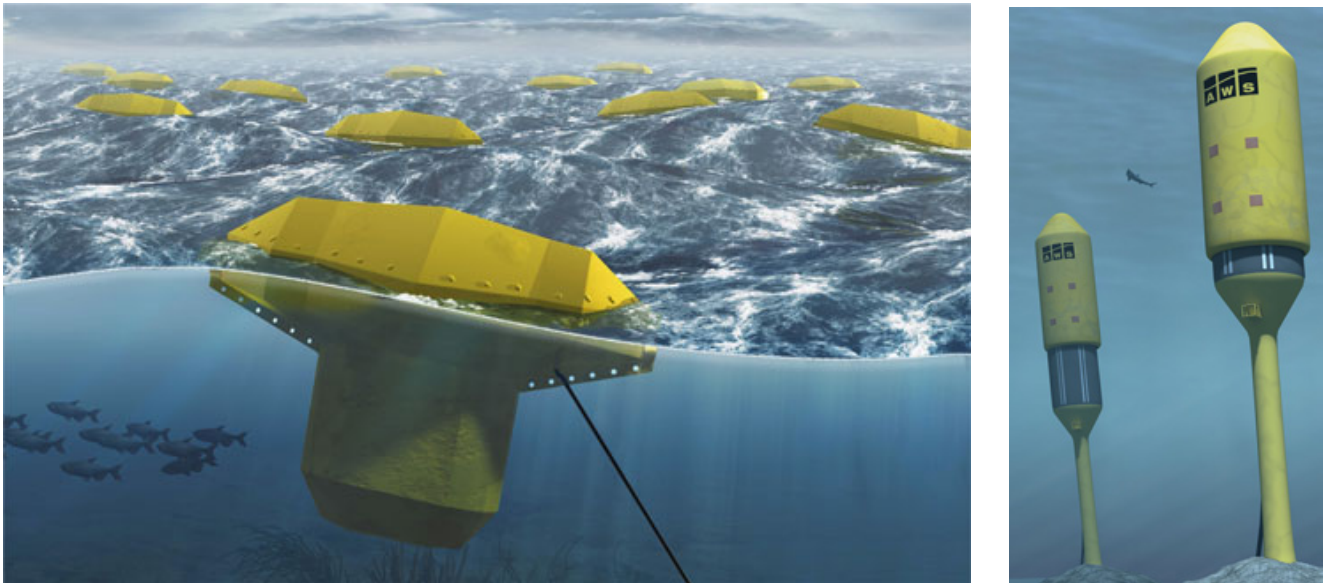


FIG. 30 – Récupération de l'énergie de la houle. a) Project SEAREV, École Centrale de Nantes. b) Bouées AWS.

PC9 : Seiches et marées

Cette PC illustre, à travers plusieurs petits exercices, les notions de réflexion des ondes de surface, d'ondes d'inertie et d'ondes de marées.

PC9.1 Réflexions dans un bassin

On considère une couche fluide dans un bassin fermé par des parois verticales d'équations respectives $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$ et $y = L_y$. La profondeur h_r du fluide au repos est constante et on note $c_r = \sqrt{g h_r}$. On suppose que les parois sont réfléchissantes et que les ondes observées ont une longueur d'onde grande devant la profondeur. On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $\eta(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre.

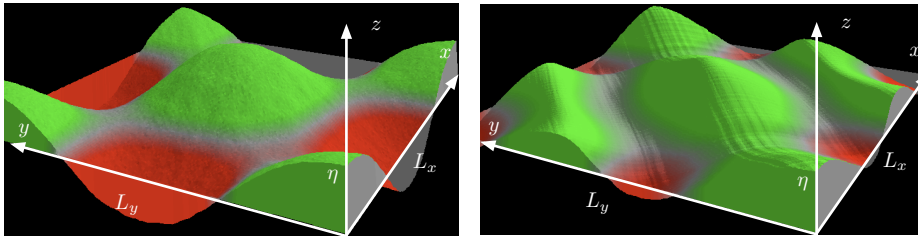


FIG. 31 – Géométrie du bassin fermé et exemples de modes propres. Logiciel de Paul Falstad.

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant 2D linéaire dans le cas où il n'y a pas de rotation ($f_0 = 0$). Éliminer le champ de vitesse pour ne garder qu'une équation en η . Écrire la relation de dispersion des ondes monochromatiques obtenues en prenant la partie réelle d'une solution complexe de la forme $\eta = \hat{\eta} \exp(i k_x x + i k_y y - i \omega t)$. Écrire les conditions aux limites correspondant à la géométrie du bassin.

Les équations s'écrivent $\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$. En éliminant u et v , on obtient l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2 \Delta \eta = 0$. La relation de dispersion est $\omega = c_r k$ avec $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Les conditions aux limites sont $u = 0$ pour $x = 0$ et $x = L_x$ et $v = 0$ pour $y = 0$ et $y = L_y$. Elles s'écrivent donc $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ pour $x \in \{0, L_x\}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$ pour $y \in \{0, L_y\}$ après élimination de la vitesse.

- 2) Montrer que l'élévation de la surface libre pour les modes propres de la cavité s'écrit $\eta = \eta_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega_n t)$ où ω_n sont des pulsations que l'on décrira. Décrire la structure des six premiers modes propres d'oscillation de la cavité classés par ordre de fréquences propres croissantes lorsque $\beta = L_x^2/L_y^2 = 3$. Indiquer les valeurs de nombres $A_n = \omega_n^2 L_x^2 / (\pi c_r)^2$. Pour chacun de ces modes, tracer les lignes d'amplitude nulle.

On a $\omega_n = c_r \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $k_x = n_1 \pi / L_x$ et $k_y = n_2 \pi / L_y$ où n_1 et n_2 sont des entiers. On a donc $A_n = n_1^2 + \beta n_2^2$. Les six premières fréquences propres correspondent à $A_1 < A_2 < A_3 = A_4 < A_5 < A_6$ avec $A_n \in \{1, 3, 4, 4, 7, 9\}$ pour les couples $(n_1, n_2) \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 0)\}$.

PC9.2 Ondes de Poincaré

- 3) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant 2D linéaire dans le cas d'une profondeur h_r constante et d'un paramètre de Coriolis $f = f_0$ non nul. On note $c_r = \sqrt{g h_r}$. Calculer alors la relation de dispersion des ondes planes $(u, v, \eta) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) \exp(i k_x x + i k_y y - i \omega t)$, où $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta})$ sont des amplitudes complexes, dans le cas particulier $k_y = 0$ puis dans le cas général. Exprimer le champ de vitesse \underline{U} de ces ondes de Poincaré lorsque $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$ avec η_m réel.

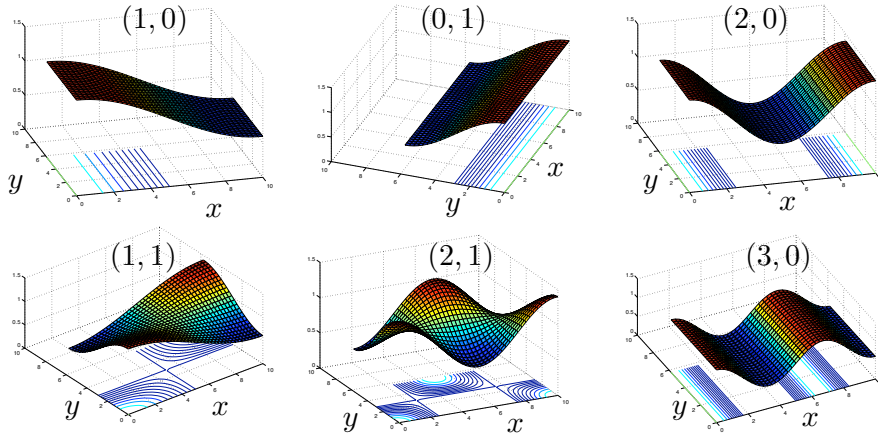


FIG. 32 – Classement des modes propres par ordre de fréquences croissantes.

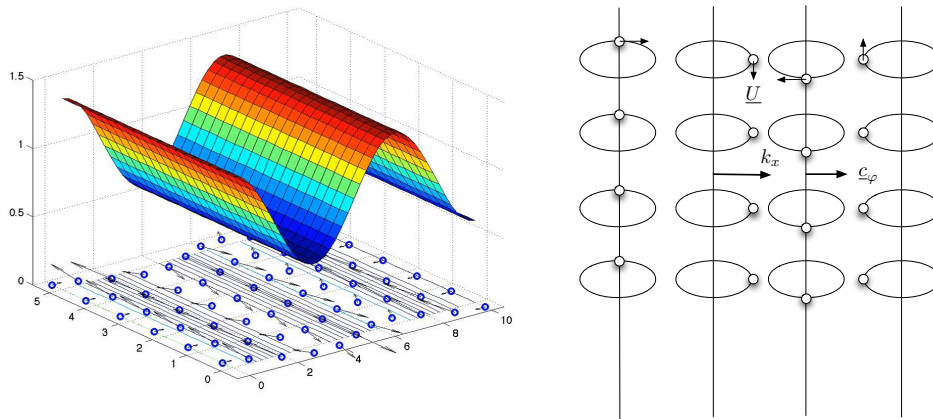


FIG. 33 – Onde de Poincaré.

Les équations de Saint-Venant 2D linéaires en rotation s'écrivent $\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$. La relation de dispersion est $\begin{vmatrix} -i\omega & -f_0 & gik_x \\ f_0 & -i\omega & 0 \\ h_r ik_x & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = i\omega(\omega^2 - f_0^2 - g h_r k_x^2) = 0$ dans le cas particulier où $k_y = 0$. En écartant le cas $\omega = 0$ et en revenant au cas général $k_y \neq 0$, la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = f_0^2 + g h_r (k_x^2 + k_y^2) = f_0^2 + c_r^2 k^2$. Dans le cas $k_y = 0$, le système linéaire $-i\omega \hat{u} - f_0 \hat{v} = -ig k_x \hat{\eta}$, $-i\omega \hat{v} + f_0 \hat{u} = 0$ et $-i\omega \hat{\eta} + ik_x h_r \hat{u} = 0$ permet d'écrire $\hat{u} = \frac{1}{c_r^2 k_x} \omega g \hat{\eta}$ et $\hat{v} = -i \frac{1}{c_r^2 k_x} f_0 g \hat{\eta}$, en remarquant que $\frac{1}{\omega^2 - f_0^2} k_x = \frac{1}{c_r^2 k_x}$. En prenant la partie réelle de la solution complexe lorsque $\hat{\eta} = \eta_m$ est réel, on obtient, outre $\eta = \eta_m \cos(k_x x - \omega t)$, le champ de vitesse $\underline{U} = [u, v] = \frac{g\omega}{c_r^2 k_x} \eta_m [\omega \cos(k_x x - \omega t), f_0 \sin(k_x x - \omega t)]$. Si η_m est petit, les trajectoires $\underline{x}(t)$ vérifient $\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{U}(x_0, y_0, t)$ où (x_0, y_0) est la position moyenne. Les particules décrivent donc des ellipses dans un plan horizontal.

PC9.3 Modélisation de la marée

On modélise la marée par le forçage d'une couche fluide contenue dans un canal périodique de longueur P et de profondeur constante h_r . On néglige l'effet de la rotation terrestre.

- 4) On suppose que l'élévation $\eta(x, t)$ de la surface libre de l'océan périodique obéit à l'équation $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_r^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = V_0 \sin(2k_0 x - \omega_n t)$ avec $c_r = \sqrt{g h_r}$ et $k_0 = 2\pi/P$. Quelles sont les pulsations propres $\omega(l)$ des oscillations de la surface libre en l'absence de forçage? Quelle est la réponse du canal au forçage?

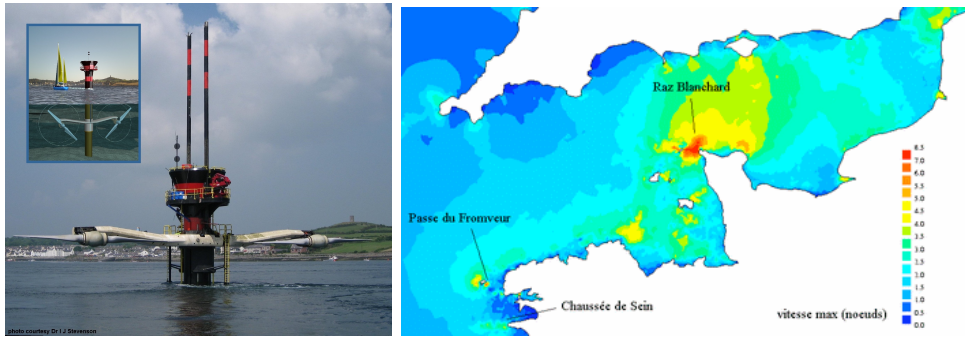


FIG. 34 – a) Hydrauliques. Photo par Marine Current Turbines Ltd. b) Intensité des courants. Carte du SHOM.

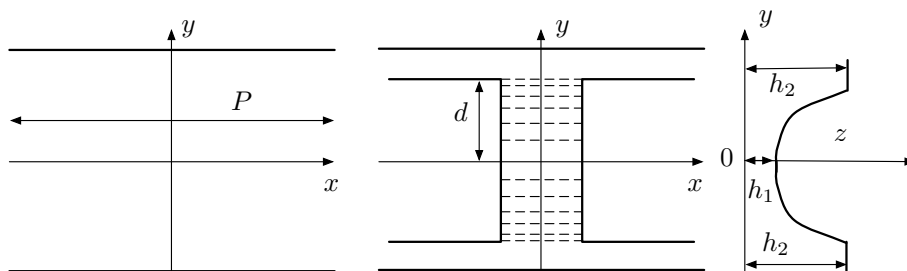


FIG. 35 – a) Canal périodique de période P . b) Modélisation de la Mer du Nord et de la Manche avec une bathymétrie $h_f(y)$ parabolique.

Que se passe-t-il si ω_n est proche de $\omega(2)$?

Les pulsations propres du canal s'écrivent $\omega(l) = l k_0 c_r = 2\pi l c_r / P$ avec l entier. La réponse du canal est $\eta(x, t) = -\frac{V_0}{\omega_n^2 - 4 k_0^2 c_r^2} \sin(2 k_0 x - \omega_n t)$. Si ω_n est proche de $\omega(2) = 2 k_0 c_r$, on est proche de la résonance.

- 5) On modélise très sommairement la Mer du Nord et la Manche par un canal transversal de longueur $2d = 2000$ km dont la bathymétrie est $h_f(y) = h_1 + \alpha y^2$ avec $h_1 = 40$ m et $h_2 = h_f(d) = 4000$ m. Si $H_2 = 1$ m est l'amplitude de la marée semi-diurne mesurée en $y = \pm d$, calculer son amplitude H_1 en $y = 0$. Quel temps τ met la marée pour traverser le canal ? Comparer avec le temps que l'on trouverait si h_f était égal à h_1 dans tout le canal. Dessiner schématiquement les lignes d'égale amplitude et d'égale phase en considérant que deux ondes de marées d'égale énergie traversent le canal en sens contraire. Comment ce schéma est-il modifié par la rotation de la terre ? Quel est l'âge de la marée en $y = 0$?

On peut considérer que le milieu est peu profond. On a donc $K_s = (h_2/h_1)^{1/4} = \sqrt{10} = 3.2$. L'amplitude de la marée est donc de $H_1 = K_s H_2 = 3.2$ m. Comme $c(y) = \sqrt{g h_f(y)}$ est la vitesse de propagation de la marée, le temps nécessaire pour traverser le canal est $\tau = 2 \int_0^d \frac{1}{c(y)} dy = 2 \int_0^d \frac{1}{\sqrt{g(h_1 + \alpha y^2)}} dy = \frac{2}{\sqrt{g\alpha}} \operatorname{argsh} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{h_1}} d \right) = 8$ h. En calculant ce temps avec la plus petite vitesse $c_1 = \sqrt{g h_1} = 20$ m/s, le temps serait $2d/c_0 = 10^5$ s soit 28 h. Comme $\omega_n = \sqrt{g h_f} k$ longueur d'onde est $L = cT$ avec $T = \omega_n / (2\pi) = 12$ h et $c = \sqrt{g(h_1 + \alpha y^2)}$. Le minimum est $L_1 = \sqrt{g h_1} T = 860$ km. En superposant les deux ondes de marées (et en négligeant la rotation de la Terre), on obtient deux noeuds (marnages nuls) en $y = \pm L_1/2 = \pm 430$ km. Tous les points du canal sont en phase. La rotation de la terre induit des points amphidromiques. L'âge de la marée en $y = 0$ est de 4 h.

- 6) Calculer la puissance théorique par unité de surface E qu'une hydraulienne située en $y = 0$ peut récupérer.

Le flux d’énergie linéique de l’onde de marée est $I = c_1 \frac{1}{8} (\rho g H_1^2)$ avec $c_1 = \sqrt{g h_1}$. Une hydraulienne de surface S peut récupérer une puissance $P = I S/h_1$. On a donc $E = P/S = I/h_1 = \frac{1}{8} (\rho g H_1^2) \sqrt{g/h_1} = 6 \text{ kW/m}^2$.

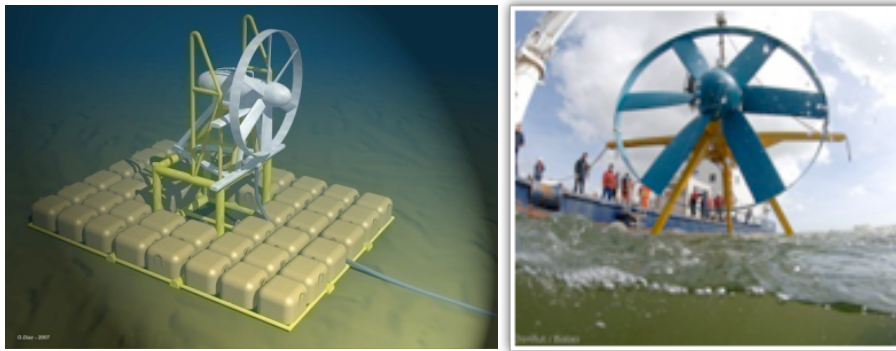


FIG. 36 – Hydraulienne Sabella D03. Image par SABELLA SAS. Photo par SABELLA-BALAO/Donfut.

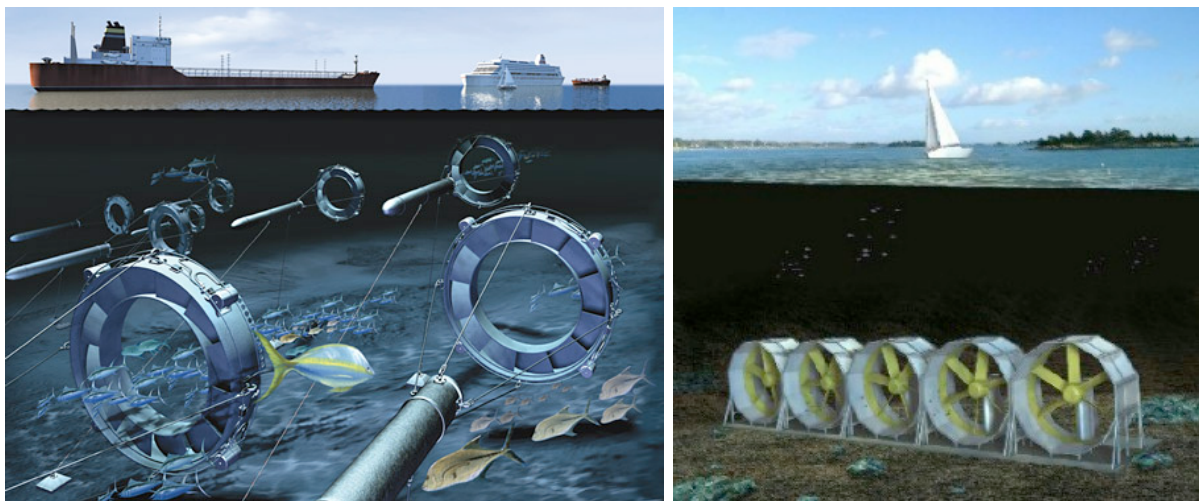


FIG. 37 – Prototypes d’hydrauliennes.