Département de Mécanique
École Polytechnique

UN EXEMPLE DE PRÉPARATION DES PETITES CLASSES DU COURS DE DE MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

O. Thual, mars 1998

Avertissement au lecteur

Ce document regroupe les préparations que j'ai effectuées à l'occasion de ma première année de petites classes (PC) du cours de Mécanique des Milieux Continus de Jean Salençon. Il m'a semblé que cette compilation pourrait être utile pour les futurs maîtres de conférence qui rejoindront le tronc commun.

Pour situer ces préparations dans leur contexte, il est nécessaire de dire quelques mots sur le mode de fonctionnement de l'équipe pédagogique tel que je l'ai vécu cet année et qu'il existait déjà les années précédentes.

Le déroulement des amphis et des PC est établi à l'avance (voir la reproduction du programme dans le présent document). Pour chaque bloc, un enseignant ou un binôme d'enseignants est chargé de rédiger un document d'orientation concernant le contenu de la PC. Il peut s'agir d'une proposition de nouveaux exercices comme d'une réflexion sur les objectifs pédagogiques de la PC. À partir de ce document et des documents semblables des années précédentes, chaque maître de conférence prépare sa propre séquence pédagogique. Il doit alors concilier une nécessaire personnalisation de la PC avec des points de passages obligés déstinés à assurer une homogénéïté minimale de la promotion.

Les préparations personnelles reproduites dans ce document ne doivent donc pas être confondues avec les documents d'orientation distribués aux enseignants avant chaque PC. Ils ne constituent qu'un exemple de préparation personnelle correspondant à ma première année d'expérience.

Je signale que la quantité d'exercices figurant dans ces préparations est de deux à trois fois supérieure à ce que j'ai effectivement traité en PC. J'ai insisté auprès des élèves pour qu'ils ne travaillent pas par eux-mêmes les passages qui n'ont pas été traités en PC en les incitant à travailler les exercices du polycopié de Jean Salençon ainsi que les contrôles des années précédentes. L'expérience acquise cette année me permettra de ne distribuer désormais aux élèves que les exercices nécessaires pour la PC.

Enfin, je tiens à mettre en garde le lecteur contre les erreurs qui peuvent subsister dans les énoncés et surtout dans les corrigés. Je n'ai pas distribué ces dernièrs aux élèves et il faut donc les considérer comme des notes personnelles.

Qu'il me soit permis ici de remercier Jean Salençon ainsi que toute l'équipe pédagogique du tronc commun pour le chaleureux accueil et l'aide constante et enrichissante qu'ils m'ont réservés. J'espère pouvoir à mon tour perpétuer cet esprit d'équipe dans les prochaines années. L'assemblage de ce recueil est motivé par cet objectif.

Olivier THUAL, le 11 mars 1998

PREMIÈRE PARTIE : INTRODUCTION AUX TENSEURS

Le but de la première partie de la PC est de se familiariser avec la notion de tenseur qui constitue un outil puissant et nécessaire pour la compréhension du cours de Mécanique. Cette introduction s'appuie sur le "guide de lecture" rédigé par P. de Buhan et E. de Langre et prépare la lecture des annexes I et II du Tome I du cours.

1. Rappel sur les vecteurs et les formes linéaires

Vecteurs. On note $\underline{v}$ un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Pour fixer les idées, on supposera que $n = 3$. On choisit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ une base quelconque et on note v^1, v^2 et v^3 les trois composantes du vecteur $\underline{v} = v^1\ \underline{e}_1 + v^2\ \underline{e}_2 + v^3\ \underline{e}_3$. On écrira cette relation sous la forme $\underline{v} = v^i\ \underline{e}_i$ en adoptant la convention de "sommation des indices répétés". La matrice 3x1 (colonne) des composantes de $\underline{v}$ dépend du choix d'une base tandis que le vecteur $\underline{v}$ est un "objet mathématique intrinsèque".

Formes linéaires. On note u^* une forme linéaire qui associe à tout vecteur $\underline{v}$ de E le réel noté $< u^*, \underline{v} >$. L'ensemble des formes linéaires sur E est le dual de E noté E^*. En notant $< u^*, \underline{v} >=< \underline{v}\ , u^* >$ on traduit le fait que le dual de E^* est identifiable à E. Si $\{e^{*1}, e^{*2}, e^{*3}\}$ est une base de E^* on note u_1, u_2 et u_3 les composantes de la forme linéaire $u^* = u_i\ e^{*i}$. Les composantes de u^* dépendent du choix d'une base tandis que la forme linéaire u^* est un object mathématique intrinsèque.

Base duale. On dit que $\{e^{*1}, e^{*2}, e^{*3}\}$ est la base duale de $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ si $< e^{*j}\ , \underline{e}_i >= \delta_i^j$ pour tout couple (i, j). Le symbole de Kronecker δ_i^j vaut 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon.

Q) Quelle est la définition d'une forme linéaire ? Calculer $< e^{*i}, \underline{v} >$ et $< u^*, \underline{e}_i >$.

2. Définition formelle d'un tenseur

Tenseurs d'ordre 2. On appelle "tenseur 2 fois covariant" une forme bilinéaire B qui associe à tout couple de vecteurs $(\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E$ un réel $B(\underline{u}, \underline{v})$. On note $E^* \otimes E^*$ l'ensemble de ces tenseurs. On appelle "tenseur 2 fois contravariant" une application bilinéaire A qui associe à tout couple de formes linéaires $(u^*, v^*) \in E^* \times E^*$ un réel $A(u^*, v^*)$. On note $E \otimes E$ l'ensemble de ces tenseurs. On appelle "tenseur 1 fois covariant et 1 fois contravariant" une application bilinéaire C qui associe à un couple $(\underline{u}, v^*) \in E \times E^*$ un réel $C(\underline{u}, v^*)$. On note $E^* \otimes E$ l'ensemble de ces tenseurs.

Tenseurs d'ordre 1. Un "tenseur 1 fois covariant" est une application linéaire qui associe un réel à tout vecteur $\underline{v} \in E$. C'est donc une forme linéaire que l'on peut noter $u^* \in E^*$. Un "tenseur 1 fois contravariant" est une application linéaire qui associe un réel à toute forme linéaire $u^* \in E^*$. C'est donc un vecteur que l'on peut noter $\underline{v} \in E$.

Q) Quelle est la définition d'une forme bilinéaire ?

Q) Donner la définition d'un "tenseur 1 fois contravariant et 1 fois covariant" noté D. Comment noter l'ensemble de ces tenseurs.

Q) Montrer que les tenseurs de même nature forment des espaces vectoriels (E, E^*, $E^* \otimes E^*$, $E \otimes E$, $E \otimes E^*$, etc.).

3. Cas d'un espace vectoriel euclidien

On suppose que l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire que l'on note $\underline{u} \cdot \underline{v}$.

Identification de E et E^*. Toute forme linéaire $u^* \in E^*$ peut être identifiée à un vecteur $\underline{u} \in E$ par la relation $< u^*, \underline{v} >= \underline{u} \cdot \underline{v}$ où $\underline{v}$ est un vecteur quelconque de E. De même, tout vecteur $\underline{u} \in E$ définit la forme $u^* \in E$ à travers la relation $< u^*, \underline{v} >= \underline{u} \cdot \underline{v}$ où $\underline{v}$ est un vecteur quelconque de E. Cette identification peut se traduire en disant que le vecteur $\underline{u}$ et la forme linéaire u^* définissent le même "tenseur euclidien d'ordre 1" que l'on note $\underline{u}$.

Tenseur euclidien d'ordre 2. Grâce à l'identification entre $\underline{u} \in E$ et $u^* \in E^*$ ainsi qu'entre $\underline{v} \in E$ et $v^* \in E^*$, on dit que les quatre tenseurs A, B, C et D définissent le même tenseur euclidien $\underline{\underline{T}}$ si

$$A(u^*, v^*) = B(\underline{u}, \underline{v}) = C(\underline{u}, v^*) = D(u^*, \underline{v}) \equiv \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) \; .$$

Base duale. On a vu qu'à une base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ quelconque de E, pas forcément orthonormée, était associée la base duale $\{e^{*1}, e^{*2}, e^{*3}\}$ de E^*. Par identification entre E et E^*, cette base duale est une base $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3\}$ de E qui est en générale différente de la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ et qui vérifie les relations $\underline{e}^j \cdot \underline{e}_i = \delta_i^j$.

Cas d'une base orthonormée. Si $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est une base orthormée, on montre très facilement que $\underline{e}^i = \underline{e}_i$. La base duale d'une base orthormée est donc identique à elle-même dans l'identification entre E et E^*. On peut donc écrire $\underline{e}^j \cdot \underline{e}_i = \underline{e}_j \cdot \underline{e}_i = \delta_i^j$. Dans ce cas on notera u_i les composantes du tenseur euclidien d'ordre 1 (vecteur) $\underline{u}$.

Cas d'une base quelconque. Si $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ n'est pas une base orthonormée, les produits $g_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j$ ne sont plus égaux à δ_i^j comme dans le cas d'une base orthonormée. Les composantes g_{ij} forment une matrice que l'on peut inverser. Si on note g^{ij} les composantes de cette matrice inverse, on peut donc écrire $g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j$.

Q) Montrer que dans le cas d'une base quelconque les vecteurs de la base duale s'expriment sous la forme $\underline{e}^j = g^{ji}\, \underline{e}_i$. Réciproquement, on peut écrire $\underline{e}_i = g_{ij}\, \underline{e}^j$.

Q) Vérifier les relations de l'exemple présenté dans le document de P. de Buhan et E. de Langre.

4. Tenseurs euclidiens d'ordre 2

On suppose que E est muni d'un produit scalaire (espace vectoriel euclidien) et l'on choisit une base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ orthonormée. On notera donc $\underline{v} = v_i \underline{e}_i$ la décomposition d'un vecteur et l'on conviendra de placer tous les indices en bas.

Produit tensoriel de deux vecteurs. Étant donné deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$, considérés comme deux tenseurs euclidiens d'ordre 1, leur produit tensoriel est le tenseur euclidien d'ordre deux $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ défini par la relation $\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{a} \cdot \underline{u})\; (\underline{b} \cdot \underline{v})$ pour tout couple de vecteurs $(\underline{u}, \underline{v}) \in E \times E$.

Q) Calculer les réels $\underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$ pour le tenseur $\underline{\underline{T}} = \underline{a} \otimes \underline{b}$.

Base tensorielle. Les tenseurs euclidiens d'ordre deux $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ forment une base de l'espace des vecteurs euclidiens d'ordre 2. En effet, on peut écrire

$$\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)\; u_i\, v_j = T_{ij}\; (\underline{e}_i \otimes \underline{e})\; (\underline{u}, \underline{v})$$

en notant $T_{ij} = \underline{\underline{T}}(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$. On a donc $\underline{\underline{T}} = T_{ij}\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.

Application linéaire de E dans E. Une application linéaire $\underline{\varphi}$ qui à tout vecteur $\underline{v}$ associe un vecteur $\underline{\varphi}(\underline{v})$ définit un tenseur euclidien d'ordre deux $\underline{\underline{T}}$ à travers la relation $\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{\varphi}(\underline{v})$. Les composantes $T_{ij} = \varphi_i(e_j)$ de $\underline{\underline{T}}$ sont les composantes de la matrice de l'application linéaire $\underline{\varphi}$ dans la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$.

Q) Calculer les composantes du "tenseur métrique" $\underline{\underline{1}}$ défini par la relation $\underline{\underline{1}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}$ en sachant que la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est orthonormée. Quelle est l'applicaton linéaire associée à ce tenseur ?

Q) On note $\underline{f}_j = \underline{\varphi}(\underline{e}_j)$ les images des vecteurs de base par l'application linéaire $\underline{\varphi}$. Montrer que si la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est orthonormée le tenseur $\underline{\underline{T}}$ associé à $\underline{\varphi}$ peut s'écrire sous la forme $\underline{\underline{T}} = \underline{f}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{f}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{f}_3 \otimes \underline{e}_3$.

Q) On définit le transposé ${}^t\underline{\underline{T}}$ d'un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{T}}$ par la relation ${}^t\underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{\underline{T}}(\underline{v}, \underline{u})$. Calculer les composantes de ${}^t\underline{\underline{T}}$ en fonction de celles de $\underline{\underline{T}}$.

Q) Donner la définition de $\underline{\underline{T}}^{-1}$ et écrire une relation entre les composantes de ce tenseur et celles de $\underline{\underline{T}}$.

Q) Quelle relation vérifie le tenseur euclidien associé à une forme bilinéaire symétrique ? Même question pour une forme bilinéaire antisymétrique. Rappeler les résultats principaux connus pour ces deux types de tenseurs (base orthonormée de diagonalisation, valeurs propres réelles, produit vectoriel, etc.).

5. Produit contracté de deux tenseurs euclidiens

On suppose de nouveau que E est muni d'un produit scalaire et l'on choisit une base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ orthonormée.

Définition à partir d'exemples. Le produit contracté de deux tenseurs euclidiens d'ordre 1 (vecteurs) $\underline{u}$ et $\underline{v}$ est le réel $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i\, v_i$. Le produit contracté du tenseur euclidien d'ordre deux $\underline{\underline{T}}$ et de $\underline{v}$ est le vecteur $\underline{a} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v}$ de composantes $a_i = T_{ij}\, v_j$. Le produit contracté de $\underline{u}$ et $\underline{\underline{T}}$ est le vecteur $\underline{b} = \underline{u} \cdot \underline{\underline{T}}$ de composantes $b_j = u_i\, T_{ij}$. Le produit contracté des tenseurs $\underline{\underline{R}}$ et $\underline{\underline{S}}$ est le tenseur $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}}$ de composantes $T_{ij} = R_{ik}\, S_{kj}$.

Q) Montrer que $(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} = (\underline{b} \cdot \underline{v})\ \underline{a}$.

Q) Montrer que $\underline{u} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{T}}(\underline{u}, \underline{v})$.

Q) Interpréter les produits contractés faisant intervenir des tenseurs d'ordre 2 en considérant les applications linéaires associées. En déduire la relation $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1\!\!1}}$, la relation $\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{1\!\!1}} = \underline{\underline{T}}$ et la relation ${}^t(\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}}) = {}^t\, \underline{\underline{S}} \cdot {}^t\, \underline{\underline{R}}$.

Q) On définit le produit doublement contracté de deux tenseurs $\underline{\underline{R}}$ et $\underline{\underline{S}}$ par le scalaire $\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{S}} = R_{ij}\, S_{ji}$. Montrer que $\underline{\underline{R}} : \underline{\underline{S}} = \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}})$ après avoir défini la trace d'un tenseur d'ordre 2.

6. Dérivation d'un champ de vecteurs

On suppose toujours que E est muni d'un produit scalaire et l'on choisit une base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ orthonormée.

Dérivation d'un champ de vecteur. On considère une application (non linéaire) qui à tout vecteur $\underline{x} \in E$ de composantes x_i associe le vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ de composantes $V_i(\underline{x})$. La dérivée par rapport à x_j du champ de vecteurs $\underline{V}(\underline{x})$ est l'application (non linéaire) qui à tout vecteur $\underline{x}$ associe le vecteur $\frac{\partial \underline{V}}{\partial x_j}(\underline{x})$ de composantes $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\underline{x})$.

Gradient d'un champ de vecteur. On note $\underline{dV}$ et $\underline{dx}$ deux vecteurs infinitésimaux reliés par la relation $\underline{dV} = \underline{V}(\underline{x} + \underline{dx}) - \underline{V}(\underline{x}) + \underline{O}\left(\|\underline{dx}\|^2\right)$. On définit alors le tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x})$ par la relation $\underline{dV} = \underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$. L'application qui à $\underline{x}$ associe le tenseur $\underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x})$ est appelée le "champ de gradient" du champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$.

Q) Calculer les composantes du tenseur $\underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x})$. Montrer que si la base est orthonormée on peut écrire

$$\underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial x_1}(\underline{x}) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{V}}{\partial x_2}(\underline{x}) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{V}}{\partial x_3}(\underline{x}) \otimes \underline{e}_3 = \frac{\partial \underline{V}}{\partial x_i}(\underline{x}) \otimes \underline{e}_i \ .$$

Q) Étant donné une fonction scalaire $F(\underline{x})$ et un champ de vecteur $\underline{e}(\underline{x})$ on considère le champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x}) = F(\underline{x})\ \underline{e}(\underline{x})$. En notant $\underline{f}_i(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{e}}{\partial x_i}(\underline{x})$, donner l'expression de $\underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x})$ en fonction des dérivées partielles de F.

Q) La divergence d'un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ est la fonction réelle qui à tout vecteur $\underline{x}$ associe le réel $\mathrm{div}\,[\underline{V}(\underline{x})] = \underline{\underline{\nabla V}}(\underline{x}) : \underline{\underline{1\!\!1}}$. Montrer que si la base est orthonormée on peut écrire $\mathrm{div}\,[\underline{V}(\underline{x})] = \frac{\partial \underline{V}}{\partial x_i}(\underline{x}) \cdot \underline{e}_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}(\underline{x})$.

Q) On suppose que la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est orthonormée. On considère l'application de $I\!R^2$ dans E qui à tout couple (r, θ) associe le vecteur $\underline{e}_r(r, \theta) = \cos\theta\ \underline{e}_1 + \sin\theta\ \underline{e}_2$. Calculer les composantes de l'application $\underline{e}_\theta(r, \theta) = \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta}(r, \theta)$. On considère l'application $\underline{x}(r, \theta) = r\ \underline{e}_r$. Exprimer le vecteur infinitésimal $\underline{dx} = u(r + dr, \theta + d\theta) - u(r, \theta) + \underline{O}(\sqrt{dr^2 + d\theta^2})$ en fonction de dr, $d\theta$, $\underline{e}_r(r, \theta)$ et $\underline{e}_\theta(r, \theta)$. On considère l'application $\underline{U}(r, \theta) = U_r(r, \theta)\ \underline{e}_r + U_\theta(r, \theta)\ \underline{e}_\theta$ où U_r et U_θ sont des fonctions dérivables de r et θ. Exprimer le vecteur infinitésimal $\underline{dU}$ en fonction de dr, $d\theta$, $\underline{e}_r(r, \theta)$, $\underline{e}_\theta(r, \theta)$ et des dérivées partielles de U_r et U_θ. Montrer que l'on peut définir au moins un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ tel que $\underline{V}[\underline{x}(r, \theta)] = \underline{U}(r, \theta)$. En déduire l'expression du gradient et de la divergence d'un champ de vecteur en en coordonnées cylindriques.

7. Dérivation d'un champ de tenseurs d'ordre 2

On suppose toujours que E est muni d'un produit scalaire et l'on choisit une base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ orthonormée.

Dérivation d'un champ de tenseurs d'ordre 2. On considère une application (non linéaire) qui à tout vecteur $\underline{x} \in E$ de composantes x_i associe le tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$ de composantes $T_{ij}(\underline{x})$. La dérivée par rapport à x_j du champ de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$ est l'application (non linéaire) qui à tout vecteur $\underline{x}$ associe le tenseur d'ordre deux $\frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_k}(\underline{x})$ de composantes $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(\underline{x})$.

Q) Définir la notion de tenseur euclidien d'ordre 3 afin de pouvoir définir le champ de gradient $\underline{\underline{\underline{\nabla T}}}$ du champ de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$.

Q) Généraliser la notion de divergence au cas d'un champ de tenseurs d'ordre deux $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$. À partir de la formule de la divergence $\int_{\partial\Omega} \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{n}\; dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{V}(\underline{x})\; d\Omega$ valable pour un champ de vecteur $\underline{V}(\underline{x})$ démontrer la formule de la divergence $\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}\; dS = \int_{\Omega} \underline{\operatorname{div}}\, \underline{\underline{T}}(\underline{x})\; d\Omega$ valable pour un champ de tenseur $\underline{\underline{T}}(\underline{x})$.

8. Cas d'un base quelconque

On suppose que E est toujours euclidien mais que la base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ n'est pas forcément orthonormée. Grâce à l'identification entre E et E^* par l'intermédiaire du produit scalaire, la base duale est formée des vecteurs $\{\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3\}$ vérifiant $\underline{e}_i \cdot \underline{e}^j = \delta_i^j$. On a vu que si $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = g_{ij}$ et $g_{ik}\, g^{kj} = \delta_i^j$ alors $\underline{e}^i = g^{ij}\; \underline{e}_j$.

Représentations des tenseurs euclidiens d'ordre 1. Les composantes d'un vecteur $\underline{v}$ dans la base initiale et la base duale sont notée comme indiqué par les relations $\underline{v} = v^i\; \underline{e}_i = v_i\; \underline{e}^i$. Cette décompositions sont respectivement appelée les représentations contravariante (v^i) et covariante (v_i).

Représentations des tenseurs euclidiens d'ordre 2. Un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{T}}$ peut se décomposer sur les quatre bases explicitées par les relations suivantes :

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\; \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = T^{ij}\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = T_i^j\; \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = T_j^i\; \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j\ .$$

Ces quatre décompositions constituent respectivement les représentations “2 fois covariante”; “2 fois contravariante”, “1 fois contravariant et 1 fois covariante”, ..., du tenseur $\underline{\underline{T}}$.

Q) Exprimer les composantes T^{ij}, T_i^j et T_j^i en fonction des composantes T_{ij}.

Q) Exprimer les 4 représentations du tenseur métrique $\underline{\underline{\mathbb{1}}}$.

MMC/PC1 du 21 novembre, X96/GR10-20, O. Thual

DEUXIÈME PARTIE : MOUVEMENT RIGIDIFIANT

Le but de la deuxième partie de la PC est d'illustrer les notions de descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement à travers l'exemple du mouvement rigidifiant.

1. Description lagrangienne du mouvement

On considère un espace affine euclidien $\mathcal{R}$, appelé référentiel, et un repère orthonormé R d'origine O. On note $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ les vecteurs de base de l'espace vectoriel E associé à l'espace affine $\mathcal{R}$. On note v^1, v^2 et v^3 les composantes d'un vecteur $\underline{v}$ de E.

On considère la description lagrangienne d'un mouvement qui à tout temps t et tout point $M_0 \in \Omega_0 \subset \mathcal{R}$ associe le point $M \in \mathcal{R}$ tel que $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ avec $\underline{x} = \underline{OM}$ et $\underline{X} = \underline{OM_0}$. On note $M(t)$ la trajectoire issue de M_0 et on suppose que $M(0) = M_0$. On suppose que $\underline{\phi}$ s'écrit sous la forme $\underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{F}}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$.

1) On considère un point M de l'espace affine $\mathcal{R}$. Déterminer le point M_0 dont est issue la trajectoire qui passe par M à l'instant t.

On suppose que $\underline{\phi}$ définit un mouvement de corps rigide ce qui signifie que pour tout temps t et pour tout choix de M_0, P_0 et Q_0 dans Ω_0 leurs images $M(t)$, $P(t)$ et $Q(t)$ vérifient $\underline{MP} \cdot \underline{MQ} = \underline{M_0P_0} \cdot \underline{M_0Q_0}$.

2) Montrer cette condition entraîne que ${}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$ et que le Jacobien de $\underline{\phi}$ vérifie $J(\underline{X}, t) = 1$. Ce mouvement est donc la composition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

3) Calculer la vitesse lagrangienne $\underline{U}(\underline{X}, t)$ du mouvement.

2. Description eulérienne du mouvement

4) Montrer que la vitesse eulérienne du mouvement s'écrit $\underline{U}_t(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\Omega}}(t) \cdot \underline{x} + \underline{V}(t)$ et donner l'expression de $\underline{\underline{\Omega}}$ et de $\underline{V}$ en fonction de $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{c}$.

5) En déduire que ${}^t\underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}$ et que l'on peut écrire $\underline{U}_t(\underline{x}, t) = \underline{U}_t(\underline{O}, t) + \Omega \wedge \underline{x}$.

Éléments de réponses : 1) $\underline{X} = \underline{\underline{F}}^{-1}(t) \cdot [\underline{x} - \underline{c}(t)]$. 4) $\underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$ et $\underline{V} = \dot{\underline{c}} - \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{c}$.

3. Introduction aux distributeurs

On note $\{\mathcal{D}\} = \{O', \underline{U}_{O'}, \underline{\Omega}\}$ et on appelle distributeur le champ de vecteurs qui à $\underline{x} = \underline{OM}$ associe $\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}_{O'} + \Omega \wedge (\underline{x} - \underline{OO'}) = \underline{U}_{O'} + \Omega \wedge \underline{O'M}$.

6) Montrer que $\{O, \underline{U}_O, \underline{\Omega}\} = \{O', \underline{U}_{O'}, \underline{\Omega}\}$

On considère un mouvement dont le champ de vitesse eulérien est, pour tout temps, un distributeur $\{O, \underline{U}_O(t), \underline{\Omega}(t)\}$.

7) Montrer que ce mouvement est un mouvement de corps rigide.

4. Compléments

La démonstration du fait qu'un mouvement de corps rigide est forcément de la forme $\underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{F}}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$ sera abordée dans le polycopié (§II.4.5 p. 54, §II.6.3 p. 61 et §II.7.1 p. 63).

8) Donner quelques éléments intuitifs permettant d'anticiper cette démonstration.

9) Écrire les principaux résultats énoncés ci-dessus en notations indicées en respectant le formalisme des tenseurs euclidiens.

10) Montrer qu'un changement de référentiel peut se décrire à l'aide d'un mouvement de corps rigide.

11) Calculer les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission d'un mouvement de corps rigide.

Éléments de réponses : 7) Calculer la dérivée par rapport au temps du produit scalaire de deux vecteurs transportés par le mouvement. 11) Lignes d'émission : $\underline{x}(s) = \underline{\underline{F}}(t) \cdot {}^t\underline{\underline{F}}(s) \cdot [\underline{x}_* - \underline{c}(s)] + c(t))$.

MMC/PC2 du 25 novembre, X96/GR10-20, O. Thual

DÉFORMATION EN TRANSFORMATION FINIE

L'objectif de cette PC2 est d'étudier quelques exemples de transformation finie tout en montrant la puissance du formalisme tensoriel. Un premier exemple de transformation homogène est donné par l'étude du glissement simple qui est aussi abordé dans l'exercice II.2 p. 72 du polycopié. L'exemple de la torsion permet d'aborder le cas d'une transformation non homogène. Ces études peuvent être prolongées par les exercices II.3 et II.4 p. 74 sur le "double glissement" ainsi que l'exercice II.5 p. 75 sur l'ellipsoïde des dilatations.

1. Glissement simple

Soit $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ un repère cartésien orthonormé dans le référentiel $\mathcal{R}$. On considère un mouvement dont la description lagrangienne s'écrit $\underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{X} + 2\ \alpha(t) X_2\ \underline{e}_1$.

1) Pour t fixé, montrer que la transformation qui à tout $\underline{X}$ associe le point $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ est homogène. Exprimer le tenseur $\underline{\underline{F}}(t)$ dans le base tensorielle canonique des tenseurs euclidiens par trois méthodes : calcul de la matrice $\underline{\underline{\tilde{F}}}$, calcul du gradient $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial X_i} \otimes \underline{e}_i$ et identification de la transformation homogène. Calculer la dilatation volumique associée à cette transformation.

2) Calculer le tenseur des dilatation $\underline{\underline{C}}$ par deux méthodes : calcul direct de la matrice $\underline{\underline{\tilde{C}}}$ à partir de la matrice $\underline{\underline{\tilde{F}}}$ et calcul à partir de l'expression de $\underline{\underline{F}}$ dans la base tensorielle canonique.

3) Calculer les allongements unitaires dans les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ ainsi que le glissement de ce couple de directions orthogonales par deux méthodes : tracé graphique et utilisation du tenseur $\underline{\underline{C}}$. En déduire l'expression du tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}$.

4) Montrer que l'on peut trouver deux directions dans le plan $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ pour lesquelles l'allongement unitaire est nul en utilisant deux méthodes : tracé graphique et utilisation du tenseur $\underline{\underline{e}}$. En inscrivant des vecteurs de même norme dans un cercle, montrer graphiquement que cette propriété entraîne que les bissectrices de ces directions sont des directions principales de la déformation.

5) Calculer les dilatations principales λ_1, λ_2 et λ_3 ainsi que les directions principales $\underline{e}_V$, $\underline{e}_W$ et $\underline{e}_3$ de la déformation en utilisant $\underline{\underline{C}}$. On notera $\underline{e}_V = \underline{e}_1\ \cos\varphi + \underline{e}_2\ \sin\varphi$. Exprimer $\operatorname{tg}\varphi$ et $\operatorname{tg} 2\varphi$ en fonction de α.

6) Sur un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{1+\alpha^2}$, tracer le point $H_0(-\alpha, 1)$ et son image H ainsi que les deux points invariants $I(-\sqrt{1+\alpha^2}, 0)$ et $J(\sqrt{1+\alpha^2}, 0)$. On note φ l'angle $(\underline{IO}, \underline{IH_0})$ et ω l'angle $(\underline{IH_0}, \underline{IH})$. Montrer que φ est bien l'angle entre $\underline{e}_1$ et la direction principale $\underline{e}_V$. En remarquant que $(\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha)(\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha) = 1$, déterminer graphiquement les angles φ et ω ainsi que les dilatations principales.

7) Décrire de façon géométrique la décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}}$ où $\underline{\underline{R}}$ est une rotation et $\underline{\underline{S}}$ une déformation pure. On note $\underline{e}_v$ et $\underline{e}_w$ les images respectives des directions principale $\underline{e}_V$ et $\underline{e}_W$. Montrer que $\underline{e}_v$ fait un angle $\pi/2 - \varphi$ avec la direction $\underline{e}_1$. Ecrire $\underline{\underline{R}}$ et$\underline{\underline{S}}$ sous forme d'une somme de produits tensoriels des directions principales et de leurs images. Calculer l'angle ω de la rotation par deux méthodes : géométriquement et en exprimant $\underline{\underline{R}}$ dans la base tensorielle canonique.

8) Discuter le cas des transformations infinitésimale : champ de déplacement, petit paramètre, directions principales, etc.

2. Torsion

On considère un cylindre d'axe OX_3 dont la section circulaire est de rayon a et dont la hauteur est l. Un point M_0 appartenant à ce cylindre et dont les coordonnées cylindriques sont (R, Θ, Z) est transporté en M de coordonées cylindriques (r, θ, z) par une déformation caractérisée par les relations

$$r = R, \qquad \theta = \Theta + \beta(t)\, Z, \qquad z = Z\ .$$

On note $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_Z)$ la base polaire locale autour de M_0 et $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ la base polaire locale autour de M.

1) Dessiner les bases polaires autour des points M_0 et M et montrer que chaque section du cylindre subit une rotation proportionnelle à sa cote Z. Étudier la transformation d'une ligne du cylindre parallèle à l'axe.

2) Exprimer les vecteurs infinitésimaux $\underline{dM}$ et $\underline{dM_0}$ dans les bases polaires locales associées à M_0 et M. En déduire une expression du gradient $\underline{\underline{F}}(\underline{OM_0}, t)$ en fonction de sommes de produits tensoriels des vecteurs de ces bases polaires. Montrer que $\underline{\underline{F}}$ s'exprimer comme le produit d'une rotation autour de l'axe et d'une transformation de glissement simple. Examiner ce résultat en considérant l'expression de la matrice $\underline{\underline{F}}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

3) En déduire l'expression du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(\underline{OM_0}, t)$ en fonction des vecteurs des bases polaires. Déterminer les allongements unitaires des vecteurs de la base $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_Z)$ ainsi que les glissements de ses couples de directions orthogonale.

4) Déterminer les dilatations et les directions principales de la transformation autour du point M_0 ainsi que la décomposition polaire $\underline{\underline{F}}(\underline{OM_0}, t) = \underline{\underline{R}}(\underline{OM_0}, t) \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{OM_0}, t)$. Monter que $\underline{\underline{R}}$ est la composition d'une rotation d'axe OX_3 et d'angle βZ avec une rotation que l'on précisera.

5) Calculer le tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}$. Comparer les hypothèses de transformation infinitésimale (p. 55) et de déformation infinitésimale (p. 63).

3. Ellipsoïde des dilatations

On considère une transformation dont le gradient autour d'un point M_0 est le tenseur $\underline{\underline{F}}$. On note λ_1 λ_2 et λ_3 les dilatations principales et $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ et $\underline{u}_3$ trois vecteurs normés engendrant les directions principales associées. On note $\underline{u}'_1$, $\underline{u}'_2$ et $\underline{u}'_3$ les trois vecteurs normés proportionnels aux images de $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$ et $\underline{u}_3$ par $\underline{\underline{F}}$.

1) Exprimer $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{F}}^{-1}$ sous forme de somme des produits tensoriels des directions principales et de leurs images. En déduire l'expression de ${}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$.

2) Déterminer le domaine Ω_t obtenu par transport convectif d'une sphère infinitésimale de rayon δ et de centre M_0.

3) Dessiner les ellipsoïdes de dilatation des mouvements de glissement simple et de torsion.

4. Double glissement

On considère deux vecteurs normés $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$ tels que $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 = \sin\theta$ et un vecteur normé normal au plan qu'ils engendrent. On considère la transformation homogène définie à l'instant t par $\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \alpha(t)(X^2\ \underline{e}_1 + X^1\ \underline{e}_2)$ avec $\alpha(t) > 0$.

1) Calculer le gradient $\underline{\underline{F}}$ (expression p. 325) de la transformation sous forme de somme de produits tensoriels de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et de la base duale associée $(\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)$. En déduire la matrice des composantes mixtes $F^i{}_j$. Calculer la dilatation volumique de cette transformation.

2) Exprimer le tenseurs des dilatations $\underline{\underline{C}}$ dans la base des produits tensoriels des vecteurs de la base duale. En déduire la représentation mixte de $\underline{\underline{C}}$, c'est-à-dire ses composantes $C^i{}_j$. Calculer les directions principales.

3) Décrire la décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{S}}$.

MMC/PC3 du 28 novembre, X96/GR10-20, O. Thual

DÉFORMATIONS LINÉARISÉES ET COMPATIBILITÉ GÉOMÉTRIQUE

L'objectif de cette PC3 est d'approfondir la notion de transformation infinitésimale. Pour cela, la torsion en déformation finie est comparée à la torsion en déformation infinitésimale. La compatibilité géométrique d'un champ de déformation linéarisé donné est abordé à travers un exemple de déformations thermiques (voir aussi les exercices II.9 p. 79 et II.10 p. 80).

1. Torsion en déformation finie

On considère un cylindre d'axe OX_3 dont la section circulaire est de rayon a et dont la hauteur est l. Un point M_0 appartenant à ce cylindre et dont les coordonnées cylindriques sont (R, Θ, Z) est transporté en M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) par une déformation caractérisée par les relations

$$r = R, \qquad \theta = \Theta + \beta(t)\ Z, \qquad z = Z\ .$$

On note $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_Z)$ la base polaire locale autour de M_0 et $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ la base polaire locale autour de M. On note $\underline{X} = \underline{OM_0}$ et $\underline{x} = \underline{OM}$.

1) Dessiner les bases polaires autour des points M_0 et M et montrer que chaque section du cylindre subit une rotation proportionnelle à sa cote Z.

2) Montrer que l'on peut écrire $\underline{dM_0} = dR\ \underline{e}_R + R\ d\Theta\ \underline{e}_\Theta + dZ\ \underline{e}_Z$ et $\underline{dM} = dR\ \underline{e}_r + R(d\Theta + \beta\ dZ)\ \underline{e}_\theta + dZ\ \underline{e}_z$. En déduire que

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z + R\ \beta\ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_Z\ .$$

3) En déduire que $\underline{\underline{F}} = (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z) \cdot (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + R\ \beta\ \ \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z)$. Montrer que le tenseur $\underline{\underline{F}}$ s'exprime aussi comme le produit d'une rotation autour de l'axe et d'une transformation de glissement simple. Interpréter géométriquement ce résultat.

4) Montrer que l'on peut déduire de cette expression de $\underline{\underline{F}}$ l'expression du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + R\beta(\underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z + \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_\Theta) + R^2\beta^2\ \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z$.

5) En déduire l'expression du tenseur des déformations

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}\ R\beta(\underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z + \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_\Theta) + \frac{1}{2} R^2\beta^2\ \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z\ .$$

6) En reprenant les résultats démontrés pour le glissement simple, calculer les dilatations et les directions principales de la transformation autour du point M_0 ainsi que la décomposition polaire $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{X}, t)$. Monter que $\underline{\underline{R}}$ est la composition d'une rotation d'axe OX_3 et d'angle βZ avec une rotation que l'on précisera.

2. Torsion en déformation infinitésimale

On veut considérer la déformation de torsion ci-dessus dans le cas d'une transformation ou d'une déformation infinitésimale.

1) Avant de faire ces hypothèses, calculer $\underline{\underline{\nabla \xi}}$ (p. 53).

2) Comparer les hypothèses de transformation infinitésimale (p. 55) et de déformation infinitésimale (p. 63).

On suppose désormais que la torsion considérée induit un déformation infinitésimale.

3) Exprimer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\epsilon}}$ (p.55) à l'aide des bases polaires. Quelle erreur fait-on en approximant $\underline{\underline{e}}$ par $\underline{\underline{\epsilon}}$?

4) Déduire de l'expression de $\underline{\underline{\epsilon}}$ les allongements unitaires dans les directions des vecteurs de la base polaire associée à M_0 ainsi que les angles de glissement des couples de vecteurs de base orthogonaux.

5) On considère la rotation $\underline{\underline{R}}(\underline{e}_3, \gamma)$ d'axe $\underline{e}_3$ et d'angle γ. Montrer que si cette rotation est infinitésimale on peut écrire $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{X} = \underline{X} + \underline{\omega} \wedge \underline{X} + \underline{O}(\gamma^2)$ où $\underline{\omega}(\underline{e}_3, \gamma)$ est un vecteur que l'on précisera.

6) En déduire une interprétation du tenseur $\underline{\underline{\omega}}$, partie antisymétrique du gradient du déplacement (p. 60), en fonction de deux rotations infinitésimales que l'on précisera.

7) Discuter la décomposition polaire de la torsion infinitésimale.

3. Compatibilité de déformations thermiques infinitésimales

On se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. On considère une solide homogène, constitué d'un matériau isotrope, que l'on soumet à un champ d'écart de température $\tau(\underline{X})$ à partir du champ de température $T_0(\underline{X})$ dans la configuration de référence. On suppose que les déformations thermiques correspondantes, par rapport à la configuration de référence sont linéaires et de la forme $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}) = \alpha\, \tau(\underline{X})\, \underline{\underline{1}}$ où α est une constante.

1) Quelle doit être la forme du champ τ pour que ces déformations thermiques soient géométriquement compatibles hors de toute condition sur les déplacements imposée au contour solide ?

2) Montrer que la condition trouvée est suffisante et déterminer l'expression du champ de déplacement $\underline{\xi}$.

On considère une plaque de section circulaire, d'axe OX_3, de rayon R, d'épaisseur uniforme h et qui repose sur le plan $X_3 = 0$ le point O étant fixé. On porte la face supérieure de la plaque à une température fixé, ce qui induit un champ d'écart de température $\tau(\underline{X})$ qui est une fonction linéaire de la cote X_3.

3) Calculer les déplacements des points de la plaque dus à cet écart de température.

MMC/PC4 du 5 décembre, X96/GR10-20, O. Thual

DÉFORMATIONS LINÉARISÉES ET CINÉMATIQUE

L'objectif de cette PC4 est de donner une vision globale des notions de déformation finie, de cinématique lagrangienne ou eulérienne et de transformation infinitésimale à travers une liste d'exemples : glissement simple (cf II.2 p. 72), extension simple (cf II.1 p. 72) et tourbillon ponctuel (cf II.6 p. 76 et III.3 p. 127). Cette étude est complétée par quelques manipulations algébriques autour de loi de conservation de la masse.

Le tableau "d'étude de mouvement" ci-joint regroupe les formules essentielles concernant les transformations quelconques (p. 69), la cinématique eulérienne (p. 122) et les transformations infinitésimales (p. 70). On se reportera aussi au tableau de comparaison entre les deux dernières approches p. 100. Bien que moins pertinent dans les applications, la cinématique lagrangienne (p. 89 à 91) est incluse dans le tableau ci-joint.

On se propose de donner les valeurs des grandeurs présentées dans ce tableau (tenseurs, vecteurs ou scalaires) pour plusieurs exemples de mouvement.

1. Glissement simple

On considère le glissement simple défini par $\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \gamma \, t \; X_2 \; \underline{e}_1$.

1) Renseigner le "tableau d'étude du mouvement" en choisissant $\underline{dM}_0$ dans la direction $\underline{e}_2$ et $\underline{dM}'_0$ dans la direction $\underline{e}_1$. On remplacera donc e_{11} par e_{22}.

2) Donner les directions principales de $\underline{\underline{d}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}$ et commenter.

On considère maintenant le mouvement défini par $\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \beta t \; \sin(k \; X_2) \; \underline{e}_1$ avec $\gamma = \beta \, k$. Que

3) Comment change le tableau pour le choix de $M_0 = 0$?

4) Même question pour M_0 défini par $\underline{X} = \frac{\pi}{2\,k} \; \underline{e}_2$.

2. Élongation simple

On considère l'élongation simple définie par $\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \gamma t \; X_1 \underline{e}_1$.

1) Renseigner le "tableau d'étude du mouvement" en choisissant $\underline{dM}_0$ dans la direction $\underline{e}_1$ et $\underline{dM}'_0$ dans la direction $\underline{e}_2$.

2) Vérifier sur cet exemple et démontrer dans le cas général les relations suivantes :

$$\underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} = \underline{\underline{\nabla U}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\nabla U}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}\, U}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$\underline{\underline{d}} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{e}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{e}}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

On considère maintenant le mouvement défini par $\underline{\xi}(\underline{X}, t) = \beta t \; \sin(k \; X_1) \; \underline{e}_1$ avec $\gamma = \beta \, k$.

3) Comment change le tableau pour le choix de $M_0 = 0$?

4) Même question pour M_0 défini par $\underline{X} = \frac{\pi}{2\,k} \; \underline{e}_1$.

5) Vérifier que l'accélération d'un point matériel est bien la dérivée particulaire de sa vitesse eulérienne.

On suppose qu'à $t = 0$ la masse volumique $\rho(\underline{x}, 0) = \rho_0$ est homogène.

6) Calculer la masse volumique $\rho(\underline{x}, t)$ pour les deux mouvements d'élongation étudiés en supposant que la masse est conservée. Vérifier que l'équation de continuité (p. 119) est satisfaite. Retrouver la démonstration de cette équation (p. 105 à 111) en choisissant pour domaines Ω_t des cubes de côtés parallèles aux vecteurs de base.

3. Tourbillon ponctuel

On considère le mouvement défini en coordonnées cylindriques par le champ de vitesse eulérien $\underline{U}(r, \theta, z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\,\underline{e}_\theta$.

1) Renseigner le "tableau d'étude du mouvement" en choisissant $\underline{dM}_0$ dans la direction $\underline{e}_r$ et $\underline{dM}'_0$ dans la direction $\underline{e}_\theta$. Décrire en particulier les trajectoires.

2) Calculer les directions principales de $\underline{\underline{d}}$.

3) Calculer l'accélération d'un point matériel.

MMC/PC5 du 12 décembre, X96/GR10-20, O. Thual

PUISSANCES VIRTUELLES
ET MODÉLISATION DES EFFORTS

L'objectif de cette PC5 est de d'explorer quelques exemples illustratifs de la méthode des puissances virtuelles. Le tableau ci-joint s'inspire du récapitulatif du cours p. 155.

Pour chaque problème de modélisation des efforts s'exerçant sur système $\mathcal{S}$ ou un de ses sous-systèmes $\mathcal{S}'$ on définira tout d'abord l'espace vectoriel des mouvements virtuels en indiquant sa dimension. Plusieurs choix d'espace de dimensions plus ou moins grandes seront possibles en fonction des questions que l'on cherche à résoudre (équilibre, compatibilité de laisons, etc...).

On décrira les espaces vectoriels des mouvements réels et des mouvements rigidifiants qui sont des sous-espaces de l'espace des mouvements virtuels. On décrira ensuite l'espace vectoriel des formes linéaires sur l'espace des mouvements virtuels avant d'y choisir l'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs $\mathcal{P}_e$ pour $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{P}'_e$ pour $\mathcal{S}'$ ainsi que l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs $\mathcal{P}_i$ ou $\mathcal{P}'_i$. La définition de la puissance virtuelle des quantités d'accélération nécessite de spécificier la répartition des masses, sauf pour les problèmes de recherche d'équilibre pour lesquels l'espace des mouvements réels peut être réduit à l'élément nul.

Lorsque cette modélisation des efforts sera achevée, on énoncera un ensemble de conséquences déduites du principe des puissance des virtuelles pour des choix judicieux de mouvements virtuels et/ou de sous-systèmes $\mathcal{S}'$.

1. Mouvement de masses ponctuelles en interaction

On considère une masse ponctuelle de masse m_A et de position A astreinte à se déplacer sur l'axe Ox_1. On lui applique une force extérieur $\underline{F}_1$ proportionnelle à $\underline{e}_1$ et l'on cherche à déterminer son mouvement.

1) Renseigner le tableau en utilisant la notation $\widehat{U}_A$ et déduire du principe des puissances virtuelles que les efforts intérieurs sont nuls ainsi que la loi fondamentale de la dynamique.

On considère maintenant deux masses ponctuelles m_A et m_B situées en A et B, astreintes à se déplacer sur l'axe Ox_1 et respectivement soumises aux forces $\underline{F}_1$ et $\underline{F}_2$ parallèles à $\underline{e}_1$. On suppose tout d'abord que ces deux masses sont reliées par une barre rigide de masse négligeable.

2) Renseigner le tableau en utilisant la notation (voir p. 149) $\widehat{\dot{\delta}}_{AB} = (\widehat{U}_B - \widehat{U}_A)$. Déduire du principe des puissances virtuelles l'expression des efforts intérieurs ainsi que l'équation du mouvement.

3) On considére le sous-système formé par la masse B seule. Renseigner le tableau en utilisant la notation T pour la tension.

4) On remplace la barre par un ressort. Renseigner le tableau et en déduire l'expression des efforts intérieurs ainsi que les équations du mouvement.

5) Le ressort relie toujours les deux masses mais celles-ci peuvent maintenant se déplacer dans le plan Ox_1x_2. On applique des forces $\underline{F}_1$ et $\underline{F}_2$ appartenant à l'espace engendré par $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. Renseigner le tableau et montrer que les forces d'interaction $\underline{F}_{AB}$ et $\underline{F}_{BA}$ sont opposées et colinéaires à $\underline{AB}$.

6) On remet la barre à la place du ressort et on applique des forces $\underline{F}_1$ et $\underline{F}_2$ quelconques. Renseigner le tableau pour trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit à l'équilibre.

2. Mouvement plan d'un amortisseur

On considère une barre élastique (amortisseur) AB de longeur l au repos, astreinte à se déplacer dans un plan Ox_1x_2. On suppose que l'on peut vérouiller le système d'élongation ou de rétrécissement de la barre qui est alors considéré comme une barre rigide.

Dans un premier temps, on se propose de remplir le tableau en limitant l'espace des mouvements virtuel à l'espace des mouvements réels. On suppose que la masse de la barre est nulle ou, ce qui revient au même pour cette étude, que le système est à l'équilibre.

1) On suppose que la barre est rigide et astreinte à se déplacer sur la droite Ox_1. Renseigner le tableau en utilisant les notations $\widehat{U}$ et F.

2) On suppose que la barre est rigide, qu'elle est fixée en son extrémité A par une articulation parfaite et que l'extremité B est libre de se déplacer dans le plan. Renseigner le tableau en utilisation les notations $\widehat{\dot{\theta}}$ et C.

3) On suppose que l'élasticité de la barre est dévérouillée, que l'extrémité A est fixée à l'aide d'une articulation parfaite et que la barre est astreinte à rester dans la plan Ox_1. Renseigner le tableau en utilisation les notations $\widehat{\dot{\delta}}$ et T.

4) On suppose que l'élasticité de la barre est dévérouillée, que l'extrémité A est fixée à l'aide d'une articulation parfaite mais que l'extrémité B est libre de se déplacer dans le plan. Renseigner le tableau en utilisation les notations $\widehat{U}_B$ et $\underline{F}_2$. Comparer cette modélisation des efforts à l'une des questions précédentes.

5) On suppose que l'élasticité de la barre est dévérouillée et que les extrémités A et B sont libres de se déplacer dans le plan. Renseigner le tableau à l'aide de deux systèmes de coordonnées différents.

3. Système de barres articulées : le bipendule

On considère deux barres homogènes articulées identiques OA et AB de longueur l et de masse m. On suppose que les liaisons sont parfaites et que le point O est contraint à rester immobile. On suppose que la gravité est $\underline{g} = -g\ \underline{e}_2$ et on appele θ_1 et θ_2 les angles $(-\underline{e}_2, \underline{OA})$ et $(-\underline{e}_2, \underline{AB})$. On suppose que l'extrémité B est soumise à une force $\underline{F} = F\ \underline{e}_1$.

1) Calculer la configuration d'équilibre par la méthode des puissances virtuelles.

4. Distributeurs et torseurs

On considère un solide indéformable occupant la configuration κ_t. On cherche à modéliser les efforts qui lui sont appliqués et à retrouver les théorèmes généraux à partir du principe des puissances virtuelles.

1) On choisit tout d'abord un espace de mouvements virtuels confondu avec l'ensemble des mouvements rigidifiants. On montre que ces mouvements sont de la forme $\widehat{\underline{U}}(\underline{x}) = \widehat{\underline{U}}_A + \widehat{\underline{\omega}}_0 \wedge \underline{AM}$ pour tout point $\underline{x} = \underline{OM}$. Vérifier que ces mouvements sont bien rigidifiants. On admettra sans démonstration la réciproque (voir §II.4.5 p. 54, §II.6.3 p. 61 et §II.7.1 p. 63).

2) On note $\{\widehat{\mathcal{D}}\} = \{A, \widehat{\underline{U}}_A, \widehat{\underline{\omega}}_0\}$ et on appelle distributeur un tel champ. Montrer que $\{A, \widehat{\underline{U}}_A, \widehat{\underline{\omega}}_0\} = \{B, \widehat{\underline{U}}_B, \widehat{\underline{\omega}}_0\}$ avec $\widehat{\underline{U}}_B = \widehat{\underline{U}}(\underline{OB})$.

3) Montrer que l'espace des mouvements virtuels considéré (les distributeurs) est de dimension 6. En déduire qu'un élément de son dual $[\mathcal{F}]$ est caractérisé par les vecteurs $\underline{F}$ et $\underline{C}$ par $[\mathcal{F}]\{\widehat{\mathcal{D}}\} = \underline{F} \cdot \widehat{\underline{U}}_A + \underline{C} \cdot \widehat{\underline{\omega}}_0$ si $\{\widehat{\mathcal{D}}\} = \{A, \widehat{\underline{U}}_A, \widehat{\underline{\omega}}_0\}$.

4) Montrer que si $[\mathcal{F}]\{\widehat{\mathcal{D}}\} = \underline{F}_A \cdot \widehat{\underline{U}}_A + \underline{C}_A \cdot \widehat{\underline{\omega}}_0$ on peut aussi écrire $[\mathcal{F}]\{\widehat{\mathcal{D}}\} = \underline{F}_B \cdot \widehat{\underline{U}}_B + \underline{C}_B \cdot \widehat{\underline{\omega}}_0$ lorsque $\{A, \widehat{\underline{U}}_A, \widehat{\underline{\omega}}_0\} = \{B, \widehat{\underline{U}}_B, \widehat{\underline{\omega}}_0\}$ avec $\widehat{\underline{U}}_B = \widehat{\underline{U}}(\underline{OB})$.

5) En déduire que $\underline{F}_A = \underline{F}_B = \underline{F}_0$ et $\underline{C}_B = \underline{C}_A + \underline{F}_0 \wedge \underline{AB}$. Justifier les notations $[\mathcal{F}] = [A, \underline{F}_0, \underline{C}_A]$ et $\mathcal{P} = [\mathcal{F}]\{\widehat{\mathcal{D}}\} = [A, \underline{F}_0, \underline{C}_A]\{A, \widehat{\underline{U}}_A, \widehat{\underline{\omega}}_0\} = \underline{F}_0 \cdot \widehat{\underline{U}}_A + \underline{C}_A \cdot \widehat{\underline{\omega}}_0$.

6) Indiquer pourquoi $\widehat{\underline{\omega}}_0$ et $\underline{C}_A$ sont des pseudo-vecteurs (vecteurs dépendant de l'orientation de l'espace). En déduire la différence entre un distributeur et un torseur.

7) Remplacer A par O dans les questions précedentes et retrouver les résultats du cours p. 156 à p. 159.

8) On considère l'espace des mouvements virtuels composé des champs de vecteurs continus et différentiables par morceaux. Renseigner le tableau et retrouver les théorèmes généraux du mouvement du solide à partir du principe des puissances virtuelles.

MMC/PC6 du 16 décembre, X96/GR10-20, O. Thual

TENSEUR DES CONTRAINTES $\underline{\underline{\sigma}}$

L'objectif de cette PC6 est de se familiariser avec la manipulation du tenseur des contraintes.

1. Cisaillement d'un bloc parallélépipèdique

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un paralélépipède Ω soumis à un force surfacique $\underline{T}^d = \sigma_0 \; \underline{e}_1$ sur sa face de normale $\underline{e}_3$. On suppose que la face de normale $\underline{e}_1$ est en contact avec un mur. On suppose que les forces extérieures volumiques sont négligeables.

1) Calculer la projection sur $\underline{e}_3$ de la force de contact exercée sur le mur dans un voisinage proche de la face de normale $\underline{e}_3$.

2) On fixe au sol la face de normale $-\underline{e}_3$ et on enlève le mur, la force $\underline{T}^d$ étant maintenue. Comment peut se déformer le voisinage de l'arête considérée dans la question précédente pour assurer la continuité du tenseur des contraintes dans le bloc.

2. Champ d'autocontraintes dans un cylindre

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un cylindre de révolution Ω de hauteur h et de rayon R. L'axe du cylindre étant l'axe Oz, on suppose que les composantes du tenseur des contraintes sont

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} =& A\ (R^2 - x^2 - 3\ y^2) \\
\sigma_{xy} =& 2\ A\ x\ y \\
\sigma_{yy} =& A\ (R^2 - 3\ x^2 - y^2) \\
\sigma_{\alpha z} =& 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = x, y, z\ .
\end{aligned}$$

1) Dans quelle unité s'exprime la constante A ?

2) Calculer les forces massiques $\underline{F}$ et surfaciques $\underline{T}^d$ exercées sur le cylindre par l'extérieur.

3) A partir de l'exemple du boulon et de l'écrou, commenter cet exemple de champ d'autocontrainte.

3. Composantes indépendantes de l'espace

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un cylindre de révolution Ω de hauteur h et de rayon R. L'axe du cylindre est l'axe Oz et l'on exprime le tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma}}(r,\theta,z) = &\ \sigma_{rr}\ \underline{e}_r(\theta) \otimes \underline{e}_r(\theta) + \sigma_{r\theta}\ [\underline{e}_r(\theta) \otimes \underline{e}_\theta(\theta) + \underline{e}_\theta(\theta) \otimes \underline{e}_r(\theta)] \\
&+\sigma_{rz}\ [\underline{e}_r(\theta) \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r(\theta)] + \sigma_{\theta\theta}\ \underline{e}_\theta(\theta) \otimes \underline{e}_\theta(\theta) \\
&+\sigma_{\theta z}\ [\underline{e}_\theta(\theta) \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta(\theta)] + \sigma_{zz}\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\ ,
\end{aligned}$$

où les composantes $\sigma_{\alpha\beta}(r,\theta,z)$ dépendent a priori de l'espace. On suppose que les forces extérieures volumiques sont nulles.

1) On applique une pression p normale aux sections du cylindre, et l'on suppose que la surface latérale est soumise à une pression q. Calculer $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le cylindre en faisant l'hypothèse que ce tenseur est indépendant de l'espace.

2) On considère un morceau de cylindre compris entre r_0 et $r_0 + \delta r$, θ_0 et $\theta_0 + \delta\theta$ et z_0 et $z_0 + \delta z$. Calculer la résultante et le moment en O des efforts surfaciques appliquées à ce sous-domaine.

3) Étant donné un champ de tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$, on rappelle que $\underline{\operatorname{div}\,\sigma} = \underline{\underline{\underline{\operatorname{grad}\,\sigma}}} : \mathbb{1}$ et $d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\operatorname{grad}\,\sigma}}} \cdot \underline{dM}$. Expliciter cette définition de la divergence en coordonnées cartésiennes et calculer son expression en coordonnées cylindriques. On pourra omettre la direction z pour ce calcul.

4) Calculer l'ensemble des tenseurs des contraintes compatibles avec des efforts extérieurs volumiques et des accélérations nulles et dont les composantes en coordonnées cylindriques sont constants.

5) Calculer la résultante et le moment en O des efforts extérieurs exercées sur chacune des sections du cylindre ainsi que sur la surface latérale. Quel est le torseur des efforts extérieurs ?

6) Calculer la résultante et le moment en O des forces surfaciques appliquées au sous-domaine considéré ci-dessus. Que se passerait-il si le tenseur des contraintes n'était pas symétrique.

7) Quelle est l'intersection de cet ensemble des tenseurs à composantes cylindriques constantes avec l'ensemble des tenseurs des contraintes indépendants de l'espace ?

8) Refaire tout ou partie de cet exercice en remplaçant le cylindre par une sphère et les coordonnées cylindriques par les coordonnées sphériques.

4. Composantes dépendant de r uniquement

On considère un tube cylindrique de rayons intérieurs et extérieurs R_1 et R_2 respectivement. La surface intérieures du tube est soumise à une pression p_1 (par exemple celle du fluide contenu dans le tube) et la surface extérieure est soumise à une pression p_2 (par exemple la pression atmosphérique). Les forces extérieures de volume sont nulles et le tube est à l'équilibre.

1) On suppose que les composantes en coordonnées cylindriques du tenseur des contraintes ne dépendent que de r. En déduire qu'il existe une famille de tenseurs des contraintes compatibles avec les forces extérieures du problème en notant $\sigma_{rr} = f(r)$.

2) En déduire une famille de champs d'autocontraintes pour le tube, dans le cas où $p_1 = p_2 = 0$. Comparer avec l'exemple de l'exercice 2 ("champ d'autocontrainte dans un cylindre") précédent dans le cas où $R_1 = 0$.

3) On coupe le tube par la pensée et par un plan contenant l'axe. Exprimer en fonction de p_1 et p_2 la force par unité de longueur exercée par une moitié du tube sur l'autre moitié.

4) On suppose que le tube est endomagé lorsque $\sigma_{\theta\theta}$ dépasse une valeur limite σ_0. Déduire du calcul précédent la pression p_1 maximale que l'on peut imposer à l'intérieur du tube sans risque de l'endommager (formule des chaudronniers). On pourra considérer le cas où la pression extérieure est négligeable et où le tube est mince.

5) Répéter le calcul dans le cas où le tube est torique.

6) Refaire l'exercice en remplaçant le tube cylindrique par une sphère creuse.

7) Quelle information complémentaire permettrait de calculer explicitement le tenseur des contraintes dans les exercices précédents ?

MMC/PC7 du 9 janvier, X96/GR10-20, O. Thual

TENSEUR DES CONTRAINTES DE PIOLA-KIRCHHOFF $\underline{\underline{\pi}}$

L'objectif de cette PC7 est d'expliciter les relations (V §4.1 p. 222 et récapitulatif p. 234)

$$\underline{\underline{\pi}} = J\,\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = J^{-1}\,\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$$

entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$.

1. Relation entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$

Ce paragraphe s'appuie sur les parties suivantes du cours : III §3.4 p. 94, récapitulatif III p. 122, V §4.1 p. 221 à 224 et récapitulatif V p. 234.

On considère un mouvement réel dont la description lagrangienne est donnée par $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$.

1) Rappeler l'expression de $\dot{\widehat{\underline{dM} \cdot \underline{dM}'}}$ en fonction de $\underline{\underline{\dot{e}}}$, $\underline{dM}_0$ et $\underline{dM}'_0$ d'une part et de $\underline{\underline{d}}$, $\underline{dM}$ et $\underline{dM}'$ d'autre part. En déduire les relations

$$\underline{\underline{\dot{e}}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}} \qquad \text{et} \qquad \underline{\underline{d}} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{e}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \ .$$

Expliciter les dépendances fonctionnelles des tenseurs intervenant dans ces relations à l'aide de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ puis de son inverse $\underline{\psi}(\underline{x}, t)$.

2) On considère un mouvement virtuel $\widehat{\underline{U}}(\underline{x})$. Définir le taux de déformation virtuel eulérien $\underline{\underline{\hat{d}}}$. On définit le taux de déformation virtuel lagrangien $\underline{\underline{\hat{\dot{e}}}}$ par la relation

$$\underline{\underline{\hat{\dot{e}}}} = {}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\hat{d}}} \cdot \underline{\underline{F}} \ .$$

Expliquer pourquoi cette relation fait intervenir le tenseur $\underline{\underline{F}}$ associé au mouvement réel et non un quelconque tenseur virtuel que l'on noterait $\widehat{\underline{\underline{F}}}$. Expliciter les dépendances fonctionnelles des tenseurs intervenant dans ces relations à l'aide de $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ puis de son inverse $\underline{\psi}(\underline{x}, t)$.

3) Montrer que si la relation

$$\mathcal{P}'_i(\widehat{\underline{U}}) = \int_{\Omega'_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{\hat{d}}}(\underline{x}) \ d\Omega_t = \int_{\Omega'_0} -\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) : \underline{\underline{\hat{\dot{e}}}}(\underline{X}) \ d\Omega_0$$

est vraie pour tous les domaines Ω'_0, on peut écrire $\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\hat{\dot{e}}}} = J \ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}$. Expliciter les dépendances fonctionnelles intervenant dans cette relation.

4) Étant donné trois tenseurs $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{C}}$, montrer l'identité

$$\underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) : \underline{\underline{C}} \ .$$

5) En déduire que si $\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\hat{\dot{e}}}} = J \ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\hat{d}}}$ est vrai pour tout mouvement virtuel on a les relations $\underline{\underline{\pi}} = J \ \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$ et $\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1} \ \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$.

On considère un cube de côté L dont les arêtes sont colinéaires à la base orthonormée $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. On considère le mouvement défini par $x_1 = \lambda_1(t) \ X_1$, $x_2 = \lambda_2(t) \ X_2$ et $x_3 = \lambda_3(t) \ X_3$. On suppose que le tenseur des contraintes est $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = -p_1 \ \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - p_2 \ \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - p_3 \ \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$.

6) Calculer le tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$.

Dans la configuration de référence, on note $S_1 = L^2$ la surface de la face de normale $\underline{N}_1 = \underline{e}_1$ et $\underline{S}_1 = S_1 \ \underline{N}_1$ la surface orientée. Dans la configuration déformée, on note s_1 la surface déformée, $\underline{n}_1 = \underline{e}_1$ sa normale et $\underline{s}_1 = s_1 \ \underline{n}_1$ la surface orientée déformée.

7) Montrer que $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{s}_1 = \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{S}_1)$. Interpréter cette relation.

2. Interprétation du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$

Ce paragraphe s'appuie sur les parties suivantes du cours : II §2.4 p. 42, récapitulatif II p. 69 et V §4.1 p. 224 à 225.

On considère un élément de surface $\underline{dA}$ dans la configuration de référence et son image $\underline{da}$ dans la configuration déformée. On veut montrer que $\underline{da} = J\ {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{dA}$ et en déduire $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{da} = \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{dA})$.

1) On considère trois vecteurs élémentaires $\underline{dM}_0$, $\underline{dM}'_0$ et $\underline{dM}_0{}''$ autour d'un point $\underline{X}$ et leur images $\underline{dM}$, $\underline{dM}'$ et $\underline{dM}''$ par le tenseur $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$. Exprimer le volume $(\underline{dM}, \underline{dM}', \underline{dM}'')$ en fonction du volume $(\underline{dM}_0, \underline{dM}'_0, \underline{dM}''_0)$ et de $J(\underline{X},t)$ en supposant que le produit mixte $(\underline{dM}_0, \underline{dM}'_0, \underline{dM}''_0)$ est positif.
2) On note $\underline{dA} = \underline{dM}_0 \wedge \underline{dM}'_0$ et on interprète ce vecteur comme un élément de surface orienté. Donner un exemple simple illustrant le fait que l'image de cet élément de surface orienté $\underline{da} = \underline{dM} \wedge \underline{dM}'$ n'est pas égal à l'image $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{dA}$ du vecteur $\underline{dA}$.
3) Montrer que pour tout vecteur $\underline{dM}''_0$ on a $\underline{da} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dM}''_0 = J\ \underline{dA} \cdot \underline{dM}''_0$. En déduire la relation entre $\underline{da}$ et $\underline{dA}$.

3. Loi de comportement $\underline{\underline{\pi}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}}(T, \underline{\underline{e}})$

Étant donné une fonction réelle $G(\underline{\underline{a}})$ des composantes a_{ij} du tenseur $\underline{\underline{a}}$, on définit le tenseur $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{a}})$ par ses composantes $B_{ij} = \frac{\partial G}{\partial a_{ij}}$.

1) Montrer que $G(\underline{\underline{a}} + d\underline{\underline{a}}) = G(\underline{\underline{a}}) + {}^t\underline{\underline{B}} : d\underline{\underline{a}} + O(|d\underline{\underline{a}}|^2)$. Montrer que la restriction de G aux tenseurs symétriques est telle que $G(\underline{\underline{e}} + d\underline{\underline{e}}) = G(\underline{\underline{e}}) + \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}) : d\underline{\underline{e}} + O(|d\underline{\underline{e}}|^2)$.
2) Calculer le tenseur $\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{a}}} G(\underline{\underline{a}})$ pour les fonction réelles $G(\underline{\underline{a}})$ suivantes :

   $G(\underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{a}}$ avec $\underline{\underline{A}}$ tenseur indépendant de $\underline{\underline{a}}$, $G(\underline{\underline{a}}) = \mathrm{tr}\, \underline{\underline{a}}$, $G(\underline{\underline{a}}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{a}}$ et $G(\underline{\underline{a}}) = \frac{1}{3} \mathrm{tr}\, \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{a}}$. Étudier le cas particulier de la restriction de ces fonctions G aux tenseurs symétriques notés $\underline{\underline{e}}$.
3) Pour aborder le cas $G(\underline{\underline{a}}) = \det \underline{\underline{a}}$ exprimer $\underline{\underline{a}} + d\underline{\underline{a}}$ sous la forme du produit de $\underline{\underline{a}}$ et d'un tenseur $\underline{\underline{1}} + d\underline{\underline{b}}$ après avoir supposé $\underline{\underline{a}}$ inversible. Montrer ensuite que $\det(\underline{\underline{1}} + d\underline{\underline{b}}) = 1 + \mathrm{tr}\, d\underline{\underline{b}} + O(|\underline{\underline{b}}|^2)$. En déduire que $\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{a}}} G(\underline{\underline{a}}) = G(\underline{\underline{a}})\ {}^t\underline{\underline{a}}^{-1}$. Montrer que pour le cas des tenseurs symétriques $\underline{\underline{e}}$ on peut alors écrire $\frac{\partial \det \underline{\underline{e}}}{\partial \underline{\underline{e}}} = (\det \underline{\underline{e}})\ \underline{\underline{e}}^{-1}$.
4) Déduire de la question précédente que $\dot{J} = J\ \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}})$. Retrouver ce résultat à partir de la relation $\dot{J} = J\ \mathrm{tr}\, \underline{\underline{d}}$, de la définition du tenseur des déformations $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}({}^t\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$ et de la relation $\underline{\underline{d}} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{e}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$.
5) On considère le potentiel thermodynamique défini par la relation

$$\rho_0\ \Psi(T, \underline{\underline{e}}) = -\frac{p_0}{2\, T_0}\ T\ \mathrm{Log}\ \left[\det(\underline{\underline{1}} + 2\ \underline{\underline{e}})\right] + \mathrm{f(T)}$$

   où p_0 et T_0 sont des constantes et f une fonction de T. On définit la “pression” p par la loi de Mariotte $\frac{p}{\rho\, T} = \frac{p_0}{\rho_0\, T_0}$. Montrer que $\underline{\underline{\pi}} = -p\ J\ \underline{\underline{C}}^{-1}$.
6) En déduire la relation $\underline{\underline{\sigma}} = -p\ \underline{\underline{1}}$. Commenter cette expression.

4. Transport des bases principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$

On note $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ la base principale orthonormée (ou *une* base dans le cas de valeurs propres multiples) de $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$, et $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ leurs images par $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$, c'est-à-dire $\underline{u}_i = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{U}_i$. On note $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ la (une) base principale orthonormée de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ et $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3\}$ leurs images réciproques par $\underline{\underline{F}}^{-1}\left[\underline{\psi}(\underline{x}, t), t\right]$ c'est-à-dire $\underline{V}_i = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{v}_i$.

1) Montrer que l'on peut écrire $\underline{\underline{\pi}} = \pi_1\, \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1 + \pi_2\, \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2 + \pi_3\, \underline{U}_3 \otimes \underline{U}_3$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\, \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 + \sigma_2\, \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_2 + \sigma_3\, \underline{v}_3 \otimes \underline{v}_3$ et interpréter les valeurs π_i et σ_i.

2) Déduire de la relation entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$ que $\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1}\ (\pi_1\, \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1\ + \pi_2\, \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2\ + \pi_3\, \underline{u}_3 \otimes \underline{u}_3)$ et $\underline{\underline{\pi}} = J\ (\sigma_1\, \underline{V}_1 \otimes \underline{V}_1 + \sigma_2\, \underline{V}_2 \otimes \underline{V}_2 + \sigma_3\, \underline{V}_3 \otimes \underline{V}_3)$

3) Dans le cas ou le matériau thermoélastique est isotrope (voir VII §4.5 p. 31), montrer que les bases $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ et $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3\}$ sont orthogonales. En notant λ_i les valeurs propres de la déformation pure $\underline{\underline{S}}$ de la décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\ \underline{\underline{S}}$, exprimer respectivement ces bases en fonction des bases orthonormées $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ et $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

4) En déduire que $\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2\, \lambda_3} \pi_1$.

On considère un cube de côté L dont les arêtes sont colinéaires à la base orthonormée $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. On considère le mouvement de glissement simple défini par $x_1 = X_1 + 2\ \alpha(t) X_2$, $x_2 = X_2$ et $x_3 = X_3$. On suppose que le tenseur des contraintes est $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \sigma_0 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$.

5) Calculer le tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$.

6) En calculant le commutateur $\left[\underline{\underline{\pi}}, \underline{\underline{e}}\right] = \underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{\underline{e}} - \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\pi}}$, montrer que ces déformations finies sont compatibles avec un comportement de matériau thermoélastique isotrope.

7) Représenter les vecteurs $\underline{\underline{\pi}} \cdot \underline{S}_i$ et $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{s}_i$ pour les surfaces orientées $\underline{S}_i$ et $\underline{s}_i$ formées par les faces du cube et de son image.

MMC/PC8 du 16 janvier , X96/GR10-20, O. Thual

COMPRESSION SIMPLE EN GRANDE DÉFORMATION

L'objectif de cette PC8 est d'effectuer une introduction aux problèmes de thermoélasticité. Les exercices du cours suivants sont pertinents pour cette PC : VII.9 p. 55, VII.10 p. 56, VII.11 p. 58, IX.8 p. 165. On pourra compléter cette PC en étudiant les textes de contrôles des connaissances suivants du recueil : exercice du 6/12/89 p. 39, problème du 17/12/90 p. 55, contrôle du 23/10/91 p. 68 et exercice du 17/12/93 p. 111.

1. Compression d'un cylindre pour le modèle Néo-Hookien

Le solide étudié est, dans la configuration initiale prise dans la suite comme référence, un barreau cylindrique Ω_0 de longueur l_0 et de section droite circulaire de rayon A : $0 \leq R \leq A$, $0 \leq z \leq L$. On note S_0 et S_l les sections d'extrémité du cylindre.

Dans cette configuration il est en équilibre en l'absence de tout chargement (forces de masses nulles dans Ω_0, forces au contour nulles sur $\partial\Omega_0$) et l'état de contrainte est nul en tout point dans Ω_0.

On suppose que cette éprouvette cylindrique est constituée de caoutchouc considéré comme un matériau incompressible, homogène et isotrope. On effectue une expérience de compression simple dans la direction de l'axe pour étudier la loi de comportement du matériau. Une telle expérience doit être analysée en grandes déformations.

À partir de l'état initial naturel, l'éprouvette subit l'évolution thermoélastique quasi-statique définie de la façon suivante (les repères $OXYZ$ et $Oxyz$ coïncident) :

- L'évolution est isotherme.
- La section S_0 demeure à chaque instant dans le plan $X = 0$; le contact entre cette section et le plan $X = 0$ est sans frottement (cissions nulles).
- La section S_l se trouve à l'instant t dans le plan $x = l(t) = \lambda\, L$. Le contact entre cette section et le plan $x = l(t)$ est sans frottement.
- Les efforts de compression appliqués sur la section S_l sont de résultante $Q\ \underline{e}_1$ avec $Q < 0$ et de moment nul.
- À tout instant t la surface latérale est libre de contraintes.
- Les forces de masse sont nulles.

1) Écrire les conditions aux limites de ce problème d'équilibre thermoélastique.

2) On suppose que la déformation est homogène et l'on note $a = \beta\ A$ le rayon du cylindre déformé. Expliciter la grande déformation $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ ainsi que les tenseurs $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{e}}$ associés. Écrire la relation entre λ et β qui traduit la contrainte d'incompressibilité.

3) On note λ_1, λ_2 et λ_3 les dilatations principales et e_1, e_2 et e_3 les valeurs principales du tenseur des déformations $\underline{\underline{e}}$. Montrer qu'une expression de la contrainte d'incompressibilité s'écrit $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 = 1$. Expliciter cette contrainte d'incompressibilité à l'aide des fonctions $\varphi(\underline{\underline{e}}) = \widehat{\varphi}(e_1, e_2, e_3) = \overline{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ pour le choix $\varphi(\underline{\underline{e}}) = \det(\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})$. Exprimer toutes ces quantités en fonction de λ et β.

4) Dans le cas d'une fonction isotrope $\varphi(\underline{\underline{e}})$ quelconque, exprimer les valeurs principales du tenseur $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{e}}}$ à l'aide des quantités $\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial e_i}$ puis de $\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\lambda_1}$ et expressions semblables pour les indices 2 et 3 (on pourra aussi désactiver temporairement la convention de sommation des indices répétés comme dans le corrigé de l'exercice VII.10 p. 57).

5) En déduire une démonstration simple de la relation $\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{e}}} = 2\ \varphi\ (\underline{\underline{1}} + 2\ \underline{\underline{e}})^{-1}$. Expliciter ce tenseur en fonction des λ_i dans le cas où la contrainte $\varphi(\underline{\underline{e}}) = 1$ est satisfaite.

On suppose que la loi comportement du caoutchouc obéit au modèle "Néo-Hookien" $\rho_0\ \psi = \mu\ I'_1 = \mu\ \mathrm{tr}\,\underline{\underline{e}}$.

6) Expliciter les fonctions $\rho_0\ \psi(\underline{\underline{e}}) = \rho_0\ \widehat{\psi}(e_1, e_2, e_3) = \rho_0\ \overline{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

7) Donner l'expression du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoof $\underline{\underline{\pi}}$ en notant $\eta(\underline{x})$ le champ scalaire arbitraire associé à la contrainte d'incompressibilité.

8) En déduire l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$. En écrivant que ce tenseur est compatible avec l'hypothèse d'équilibre et la nullité des efforts extérieurs de volume, montrer que le champ $\eta(\underline{x})$ est constant.

9) En écrivant que ce tenseur est statiquement admissible (équilibre avec tous les efforts extérieurs connus) résoudre complétement le problème de compression simple en déformation finie. Tracer la fonction $Q(\lambda)$ reliant l'intensité de la compression à la déformation. Montrer que ce résultat s'étend au cas de la traction simple ($Q > 0$). Étudier cette courbe au voisinage de $Q = 0$.

10) Dans un plan (e_1, e_2), tracer les courbes $\rho_0\ \widehat{\psi} - \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{e}} =$ constante et préciser la courbe correspondant à la solution du problème pour une valeur de Q donnée. Tracer la courbe $\widehat{\varphi} = 1$ traduisant la

contrainte d'incompressibilité. Vérifier que ces deux dernières courbes sont tangentes et commenter ce résultat.

2. Cas du modèle de Mooney-Rivlin

On suppose maintenant que la loi de comportement du matériau obéit au modèle de Mooney-Rivlin

$$\rho_0\, \psi = \pi^0\, I'_1 + \frac{\alpha}{2}(I'^2_1 - 2\, I'_2)$$

avec $I'_1 = \mathrm{tr}\, \underline{\underline{e}}$ et $I'_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}})$. Les coefficients π^0 et α sont des constantes physiques caractéristiques du matériau.

1) Donner l'expression de $\underline{\underline{\pi}}$ en fonction de $\underline{\underline{e}}$ en utilisant la fonction $\varphi(\underline{\underline{e}})$ pour exprimer la contrainte d'incompressibilité. On notera η le scalaire arbitraire de la relation.

2) Montrer que

$$\rho_0\, \overline{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}(\pi^0 - \alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{\alpha}{4}(\lambda_1^2\, \lambda_2^2 + \lambda_1^2\, \lambda_3^2 + \lambda_2^2\, \lambda_3^2 - 3)\ .$$

3) En déduire une expression des contraintes principales π_i de $\underline{\underline{\pi}}$ après avoir démontré la relation $\pi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\, \rho_0\, \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \lambda_1} + \eta\, \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda_1}$.

4) Tracer la fonction $Q(\lambda)$ pour le problème de compression ou d'élongation simple du cylindre.

5) On considère les fonctions G et H suivantes :

$$G(\underline{\underline{e}}) = \widehat{G}(e_1, e_2, e_3) = \overline{G}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2\, \lambda_2^2 + \lambda_1^2\, \lambda_3^2 + \lambda_2^2\, \lambda_3^2)$$
$$H(\underline{\underline{e}}) = \widehat{H}(e_1, e_2, e_3) = \overline{H}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}\right)\ .$$

On définit les η_i par les relations $\eta_1 \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial e_1} = \frac{\partial \widehat{G}}{\partial e_1} - \frac{\partial \widehat{H}}{\partial e_1}$ et expressions semblables pour les indices 2 et 3. Montrer que la restriction de ces fonctions aux cas incompressibles $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 = 1$ entraîne $G = H$ et $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$. Commenter ce dernier résultat.

6) En utilisant la contrainte d'incompressiblité montrer que

$$\rho_0\, \overline{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}(\pi^0 - \alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{\alpha}{4}\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right).$$

7) En déduire l'expression des contraintes principales $\pi_i = \pi^0 - \alpha - \frac{\alpha}{2\lambda_1^4} + \eta'\, \frac{1}{\lambda_1^2}$. Quel est le lien entre η et η' ?

MMC/PC9 du 21 janvier, X96/GR10-20, O. Thual

PROBLÈMES DE THERMOÉLASTICITÉ EN GRANDE DÉFORMATION

Cette PC9 est dans le prolongement de la PC8 et concerne la résolution de problèmes d'élasticité isotherme en grande déformation.

Les exercices suivants pourront être étudiés en complément : IX.9 p. 165, IX.10 p. 171 et IX.9 p. 167. On rapelle la pertinence des textes de contrôles des connaissances suivants du recueil : exercice du 6/12/89 p. 39, problème du 17/12/90 p. 55, contrôle du 23/10/91 p. 68 et exercice du 17/12/93 p. 111.

1. Double équilibre de deux ballons reliés par un tube

On considère deux ballons gonflés dont l'air communique par un tube rigide (voir expérience en PC avec deux ballons à 1F, un tube en carton à 50c et un peu de dextérité). À condition de gonfler suffisamment le premier ballon (avant de fixer l'autre), on constate que le système possède deux équilibres stables correspondant à deux tailles différentes de chacun des ballons. On fait passer le système d'un équilibre à l'autre en pressant sur le ballon le plus gonflé au profit de l'autre ballon. On se propose de décrire ce phénomène à l'aide d'un modèle de thermoélasticité en grande déformation.

On modélise un ballon par une enveloppe sphérique dont les rayons intérieurs et extérieurs sont A et B dans la configuration initiale, et qui est constituée d'un matériau homogène, isotrope, élastique, incompressible (voir l'énoncé de l'exercice IX.9 p. 167). On note p_e la pression extérieure que l'on suppose constante tout au long de l'expérience. On note $p_i(t)$ la pression intérieure.

1) On cherche une solution $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ sous la forme $\underline{x} = f(R)\ \underline{X}$. En désignant (R, Θ, Φ) et (r, θ, φ) respectivement les coordonnées sphériques de $\underline{X}$ et $\underline{x}$, et par $(\underline{e}_R, \underline{e}_\Theta, \underline{e}_\Phi)$ et $(\underline{e}_R, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$ les bases locales en ces points, montrer que $\underline{\underline{F}} = \lambda_1\ \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \lambda_2\ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \lambda_3\ \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\Phi$ avec $\lambda_1(R) = R\ f'(R) + f(R)$ et $\lambda_2(R) = \lambda_3(R) = f(R)$.

2) On note $a = \lambda\ A$ le rayon intérieur de l'enveloppe sphérique déformée. Montrer que la liaison d'incompressibilité permet de calculer la fonction $f(R)$ qui s'écrit alors $f(R) = \left[1 + \frac{A}{R}(\lambda^3 - 1)\right]^{1/3}$. Montrer que $\lambda_1(R) = 1/f^2(R)$ et $\lambda_2(r) = \lambda_3(R) = f(R)$.

3) On modélise le comportement thermoélastique du matériau par le modèle Néo-Hookien $\rho_0\ \psi = \mu\ I_1' = \mu\ \mathrm{tr}\,\underline{\underline{e}}$. Exprimer l'énergie libre totale $F(\Omega_t)$ de l'enveloppe sphérique sous la forme d'une intégrale sur R d'une expression analytique de la fonction $f(R)$ en notant b le rayon extérieur de l'enveloppe. On ne cherche pas ici à calculer les contraintes à l'intérieur de l'enveloppe ni à expliciter le calcul de l'intégrale intervenant dans l'expression de f (voir exercice IX.9 p. 167 pour un calcul complet).

4) On suppose maintenant que l'épaisseur $D = B - A$ est petite devant le rayon A. Montrer qu'il est raisonnable de remplacer $f(R)$ par la constante $\lambda = a/A$ dans l'expression de l'énergie libre $F(\Omega_t)$. On appele $F^{\mathrm{ball}}(\lambda)$ l'expression ainsi obtenue. Montrer que
$$F^{\mathrm{ball}}(\lambda) = 2\ \pi\ A^2\ D\ \mu\ \left(\lambda^{-4} + 2\ \lambda^2 - 3\right)\ .$$

5) On considère le cas du modèle de Mooney-Rivlin $\rho_0\ \psi = \pi^0\ I_1' + \frac{\alpha}{2}(I_1'^2 - 2\ I_2')$. En notant $k = \frac{\alpha}{2(\pi^0 - \alpha)}$ montrer que cette expression devient
$$F^{\mathrm{ball}}(\lambda) = 2\pi A^2 D \left[(\pi^0 - \alpha)\left(\lambda^{-4} + 2k\lambda^{-2} + 2\lambda^2 + k\lambda^4\right) - 3(\pi^0 - \frac{1}{2}\alpha)\right].$$

6) On suppose que l'énergie libre $\rho_0\ \Psi(T, \underline{\underline{e}}) = -\frac{p_0}{2\ T_0}\ T\ \mathrm{Log}\ \left[\det(\underline{\underline{1}} + 2\ \underline{\underline{e}})\right] + \mathrm{g(T)}$ du gaz emprisonné par l'enveloppe sphérique est celle d'un gaz parfait dont la pression est p_0 lorsque l'enveloppe sphérique est dans la configuration de référence. La pression p_i de la configuration déformée est donnée par la loi de Mariotte $\frac{p_i}{\rho\ T} = \frac{p_0}{\rho_0\ T_0}$. Pour simplifier, on suppose la transformation isotherme. Calculer l'expression de l'énergie libre totale $F^{\mathrm{gaz}}(\lambda)$ du gaz.

7) À partir de considérations thermodynamiques, montrer que l'énergie potentielle du système formé de l'enveloppe, du gaz emprisonné et de l'extérieur à pression constante peut s'écrire $F^{\mathrm{tot}}(\lambda) = F^{\mathrm{ball}}(\lambda) + F^{\mathrm{gaz}}(\lambda) + F^{\mathrm{atm}}(\lambda)$ avec $F^{\mathrm{atm}}(\lambda) = \frac{4}{3}\pi\ A^3\lambda^3\ p_e$.

8) Étant donné une énergie libre $F(\lambda)$, montrer que $p(\lambda) = \frac{1}{4\pi A^3}\frac{1}{\lambda^2}\frac{dF}{d\lambda}$ est homogène à une pression. Interpréter cette pression pour chacune des énergies libres considérées.

9) Que se passe-t-il si $F^{\mathrm{tot}}(\lambda)$ possède plusieurs extrema ?

10) Tracer la fonction $\Delta p(\lambda) = \frac{1}{4\pi A^3}\frac{1}{\lambda^2}\frac{dF^{\mathrm{ball}}}{d\lambda}$ en fonction de λ pour $\lambda \geq 1$. Tracer sur le même graphe la courbe $p_i(\lambda) - p_e$ pour différentes valeurs de p_0. Comparer le modèle Néo-Hookien et le modèle de Mooney-Rivlin. On pourra choisir $k = 0.1$ pour ce dernier modèle.

10) Discuter le cas des deux ballons communiquant par une tube rigide. Que se passe-t-il lorsque les deux ballons n'ont pas la même rigidité (par exemple si l'un a subi un effet de plasticité en étant surgonflé) ?

2. Torsion d'un cylindre pour le modèle Néo-Hookien

Cet exercice est basé sur l'exercice IX.10 p. 170 du cours intitulé "Torsion en transformation finie".

On considére une barre cylindrique d'axe OZ, de section circulaire de rayon A et de hauteur L. Sa base S_0 en $Z = 0$ est encastrée et sa surface supérieure S_l est soumise à une rotation d'angle γ. La surface latérale est libre de contraintes. On suppose que les forces de masses sont nulles et que l'évolution est isotherme.

Le matériau consituant cette barre est un caoutchouc incompressible décrit par le modèle Néo-Hookien $\rho_0\ \psi = \mu\ I_1' = \mu\ \mathrm{tr}\,\underline{\underline{e}}$. On cherche la relation entre le torseur des efforts extérieurs appliqués sur les sections et l'angle γ. On se place dans le cadre des grandes déformations.

1) Expliciter toutes les conditions aux limites du problème.

2) Montrer que la transformation définie par $r = R$, $\theta = \Theta + \beta\ Z$, $z = Z$ est cinématiquement admissible (compatible avec les conditions aux limites) pour une valeur de β que l'on précisera.

3) Montrer que le gradient de cette transformation s'écrit

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{F}} =& \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z + \beta\ R\ \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z \\
=& (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z) \cdot (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \beta\ R\ \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_Z) \\
=& (\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \beta\ r\ \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z)\ .
\end{aligned}
$$

4) Exprimer les tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\pi}}$ puis de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ à partir de la loi de comportement en notant $\eta(r, \theta, z)$ le champ inconnu associé à la liaison interne d'incompressibilité.

5) En écrivant que le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible (équilibre avec les efforts extérieurs) résoudre complétement le problème de torsion en déformation finie.

6) En déduire la résultante $\underline{F} = F(\gamma)\ \underline{e}_z$ et le moment $\underline{C} = C(\gamma)\ \underline{e}_z$ des efforts appliqués sur la section S_l. Même question pour la section S_0. Interpréter l'expérience à l'aide des fonction $C(\gamma)$ et $F(\gamma)$.

7) Étudier ces fonction dans le cadre des transformations infinitésimales.

8) On considère maintenant que le cylindre est constitué de deux matériaux matériaux caractérisés par $\mu = \mu_1$ pour $r \leq A_1$ et $\mu = \mu_2$ pour $A_1 \leq r \leq A_2$. Reprendre le problème pour ce solide composite.

3. Transport des bases principales de $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$

On note $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ la base principale orthonormée (ou *une* base dans le cas de valeurs propres multiples) de $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$, et $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ son image par $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ telle que $\underline{u}_i = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{U}_i$. On note $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ la (une) base principale orthonormée de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ et $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3\}$ leurs images réciproques par $\underline{\underline{F}}^{-1}\left[\underline{\psi}(\underline{x}, t), t\right]$ c'est-à-dire $\underline{V}_i = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{v}_i$.

1) Montrer que l'on peut écrire $\underline{\underline{\pi}} = \pi_1\ \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1 + \pi_2\ \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2 + \pi_3\ \underline{U}_3 \otimes \underline{U}_3$ et $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1\ \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_1 + \sigma_2\ \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_2 + \sigma_3\ \underline{v}_3 \otimes \underline{v}_3$ et interpréter les valeurs π_i et σ_i.

2) Déduire de la relation entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\pi}}$ que $\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1}\ (\pi_1\ \underline{u}_1 \otimes \underline{u}_1\ + \pi_2\ \underline{u}_2 \otimes \underline{u}_2\ + \pi_3\ \underline{u}_3 \otimes \underline{u}_3)$ et $\underline{\underline{\pi}} = J\ (\sigma_1\ \underline{V}_1 \otimes \underline{V}_1 + \sigma_2\ \underline{V}_2 \otimes \underline{V}_2 + \sigma_3\ \underline{V}_3 \otimes \underline{V}_3)$

3) Dans le cas ou le matériau thermoélastique est isotrope (voir VII §4.5 p. 31), montrer que les bases $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ et $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3\}$ sont orthogonales. En notant λ_i les dilatations principales, exprimer respectivement ces bases en fonction des bases orthonormées $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ et $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Exprimer dans ces bases les tenseurs intervenant dans les décompositions polaires $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\ \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}'\ \underline{\underline{R}}$ où $\underline{\underline{R}}$ est une rotation et $\underline{\underline{S}}$ et $\underline{\underline{S}}'$ sont des dilatations pures.

4) Déduire des questions précédentes que pour un matériau thermoélastique isotrope on a $\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2\ \lambda_3}\pi_1$.

4. Lois de comportement élastique et tenseur $\underline{\underline{B}}$

On note $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$. Ce tenseur intervient souvent dans l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ comme le suggère la relation $\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1}\, \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\pi}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}$.

1) On suppose que $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ est la base principale orthonormée de $\underline{\underline{C}}$ et que les dilatations principales sont λ_1 λ_2 et λ_3. En utilisant les notations des questions précédentes, décrire les directions et les valeurs principales de $\underline{\underline{B}}$.

2) On considère un matériau incompressible obéissant au modèle de comportement Néo-Hookien $\rho_0\, \psi = \mu\, I_1'$. Montrer que $\underline{\underline{\sigma}} = \mu\, \underline{\underline{B}} + \eta\, \underline{\underline{1\!\!1}}$.

3) On considère un matériau incompressible obéissant au modèle de Mooney-Rivlin $\rho_0\, \psi = \pi^0\, I_1' + \frac{\alpha}{2}(I_1'^2 - 2\, I_2')$. Montrer que

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(\pi^0 + \alpha\, \mathrm{tr}\, \underline{\underline{e}} + \frac{1}{2}\, \alpha\right)\, \underline{\underline{B}} - \frac{1}{2}\, \alpha\, \underline{\underline{B}}^2 + \eta\, \underline{\underline{1\!\!1}}\, .$$

4) On suppose que le comportement d'un matériau incompressible conduit au tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}} = \eta'\, \underline{\underline{1\!\!1}} + J_1(B_1, B_2)\, \underline{\underline{B}} + J_{-1}(B_1, B_2)\, \underline{\underline{B}}^{-1}$ avec $B_1 = \mathrm{tr}\, \underline{\underline{B}}$ et $B_2 = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}\, (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}})$. Expliciter les fontions J_1 et J_{-1} pour le modèle Néo-Hookien puis pour le modèle de Mooney-Rivlin.

5. Tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour des déformations particulières

Comme les tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ interviennent dans le calcul de $\underline{\underline{\sigma}}$ pour les problèmes d'élasticité en grande déformation, on se propose de les calculer sur des exemples particuliers de transformation.

1) **Traction simple** (exercice IX.8 p. 165). Calculer $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour la déformation $x_1 = \lambda_1\, X_1$, $x_2 = \lambda_2\, X_2$ et $x_3 = \lambda_3\, X_3$.

2) **Torsion** (exercice IX.10 p. 170). Calculer $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour $\theta = \Theta + \beta\, Z$, $z = Z$.

3) **Flexion d'un feuillet.** Calculer $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour la déformation $r = R_0\, f(X)$, $\theta = Y/R$, $z = Z$. Quelle relation entraîne la liaison interne d'incompressibilité. Formuler un problème d'élasticité en grande déformation pour une configuration initiale décrite par $-e/2 \leq X \leq e/2$ et $-L/2 \leq Y \leq L/2$ en notant $2\, \alpha = L/R_0$.

4) **Expansion d'une enveloppe sphérique** (exercice IX.9 p. 167). Calculer $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour la déformation $\underline{x} = f(R)\, \underline{X}$. Quelle relation entraîne la liaison interne d'incompressibilité. Formuler un problème d'élasticité en grande déformation pour une configuration initiale décrite par $A \leq R \leq B$.

5) **Contrôle du 6/12/89** p. 37 corrigé p. 49. Calculer $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ pour la déformation $x_1 = X_1 + m\, X_2$, $x_2 = X_2$ et $x_3 = X_3$.

6) **Contrôle du 23/10/91** p. 68 corrigé p. 71. Mêmes questions pour la déformation $x_1 = X_1 + X_2\, \sin\beta$, $x_2 = X_2\, \cos\beta$ et $x_3 = \cos\beta\, X_3$.

MMC/PC10 du 30 janvier, X96/GR10-20, O. Thual

ÉQUILIBRES THERMOÉLASTIQUES LINÉARISÉS
PREMIÈRE PARTIE

Les PC10 et PC11 abordent les méthodes directes de résolution des problèmes d'équilibre thermoélastique sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). On se limite au cas des matériaux homogènes et isotropes. Les exercices suivants entrent dans le cadre de ce thème : VIII.1 à VIII.3 p. 118, VIII.5 à VIII.7 p. 119 et IX.1 à IX.5 p. 159. Les connaissances acquises permettent d'étudier textes de contrôles suivants du recueil : problème du 3/03/87 pp. 17-20, problème du 1/12/95 pP. 165-170.

On se limitera au cas des perturbations autour de l'état naturel, c'est-à-dire au cas où $\underline{\underline{\sigma}}_p = 0$. Dans ce cas, la loi de comportement des matériaux isotropes en HPP s'écrit (voir récapitulatif p. 51)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\, \mathrm{tr}\, (\underline{\underline{\epsilon}})\, \underline{\underline{1\!\!1}} + 2\, \mu\, \underline{\underline{\epsilon}} - k\, \tau\, \underline{\underline{1\!\!1}}\, .$$

Elle est équivalente à la relation inverse

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{-\nu}{E} \, \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}) \, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1+\nu}{E} \, \underline{\underline{\sigma}} + \alpha \, \tau \, \underline{\underline{\mathbb{1}}} \, .$$

Les exercices proposés résolvent les équations de l'équilibre pour cette loi de comportement par la méthode des déplacement ou la méthode des contraintes.

1. Relations entre (λ, ν, k) et (E, ν, α)

On considère une barre cylindre d'axe Oz, de longueur l de section circulaire S dont le rayon est a. On suppose que le matériau est homogène et isotrope, que la barre est dans son état naturel et que sa température est T_0. L'extrémité S_0 en $z = 0$ est en contact sans frottement avec une plaque dans le plan $z = 0$. On désigne par S_l l'autre extrémité. On suppose que les forces extérieures de volume sont nulles et on s'intéresse aux solutions d'équilibre.

1) On applique des efforts répartis uniformément sur S_l dont la résultante est $\mathcal{Z} \, \underline{e}_z$, avec $\mathcal{Z} \leq 0$, et le moment en 0 nul. La surface latérale du cylindre est libre de contraintes et l'expérience est isotherme. Résoudre par une méthode des déplacements en fonction des coefficients (λ, μ) puis par une méthode des contraintes en fonction des coefficents (E, ν). En déduire que $E = \mu \; (3\lambda + \mu)/(\lambda + \mu)$ et $\nu = \lambda/[2 \; (\lambda + \mu)]$. En appelant $-p = \mathcal{Z}/S$, δ le déplacement de S_l et $\Delta = \delta/l$ montrer que $-p = E \; \Delta$. Discuter le cas $\mathcal{Z} > 0$.

2) On suppose maintenant que la section S_l est, comme la surface latérale, libre de contraintes et que l'on porte la barre à la température $T = T_0 + \tau$. Résoudre par une méthode des déplacements en fonction des coefficients (λ, μ, k) puis par une méthode des contraintes en fonction des coefficents (E, ν, α). En déduire que $\alpha = k/(3\lambda + 2\mu)$. En notant ΔV l'accroissement du volume initial V et $\kappa = (3\lambda + 2\mu)/3$ montrer que $\tau = (1/3 \; \alpha) \; (\Delta V/V) = (\kappa/k) \; (\Delta V/V)$.

3) Étant donné un tenseur $\underline{\underline{A}}$ en dimension 3 on définit son déviateur par $\underline{\underline{A}}_d = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,(\underline{\underline{A}})\underline{\underline{\mathbb{1}}}$. Montrer que si deux tenseurs ont la même trace et le même déviateur ils sont égaux. Exprimer la trace et le déviateur des tenseurs intervenant dans les deux formulations de la loi de comportement pour exprimer (λ, μ, k) en fonction de (E, ν, α).

2. Autres expériences simples avec la barre cylindrique

On considère toujours la barre cylindrique en HPP autour de son état naturel.

1) On applique des efforts répartis uniformément sur S_l dont la résultante est nulle et le moment en 0 est $\mathcal{C} \; \underline{e}_z$. La surface latérale du cylindre est libre de contraintes et l'expérience est isotherme. Résoudre par une méthode des déplacements. En appelant γ l'angle de rotation de S_l, montrer que $\mathcal{C} = \mu J \gamma$ avec $J = \pi a^4/(2 \; l)$. Justifier le nom de module de cisaillement pour μ.

2) On applique maintenant une pression uniforme $-p \; \underline{n}$ sur la section S_l et la surface latérale. L'expérience est isotherme. Résoudre par une méthode des déplacements et une méthode des contraintes. Montrer que $-p = \kappa \; \Delta V/V$. Justifier le nome de module de compression pour κ.

3) On suppose maintenant que la section S_l est en contact sans frottement avec une plaque dans le plan $z = L$. La surface latérale est libre de contraintes. On porte la barre à la température $T_0 + \tau$. Résoudre par une méthode des contraintes ou des déplacements. Montrer que l'on peut aussi résoudre par une méthode de superposition de deux expériences connues. En notant Δ l'allongement unitaire dans les directions libres, montrer que $\tau = 1/[\alpha(1+\nu)] \; \Delta$.

4) On considére un rail de chemin de fer de 40 m soumis à un échauffement de 10° C. On suppose que l'acier qui le compose est tel que $E = 2 \; 10^5$ MPa, $\nu = 0,25$ et $\alpha = 2 \; 10^{-5}$ K^{-1}. Déterminer l'allongement du rail avant son montage. Déterminer la contrainte après assemblage en supposant qu'il n'y a aucun "jeu" aux jointures. Discuter les valeurs en supposant que l'acier obéit à un critère de rupture de Tresca avec $\sigma_0 = 400$ MPa.

MMC/PC11 du 3 février, X96/GR10-20, O. Thual

ÉQUILIBRES THERMOÉLASTIQUES LINÉARISÉS
DEUXIÈME PARTIE

Cette PC11 se place dans le même cadre que la PC10 (voir les hypothèses énoncées pour la PC10). Ne pas oublier de regarder les exercices VIII.1 à VIII.3 p. 118, VIII.5 à VIII.7 p. 119 et IX.1 à IX.5 p. 159 ainsi que les textes de contrôles suivants : problème du 3/03/87 pp. 17-20, problème du 1/12/95 pP. 165-170.

1. Tube cylindrique en torsion

On considère un tube cylindrique d'axe Ox, de longueur l, dont la section est comprise entre les cercles de rayon a et b avec $a < b$. Ce tube est en équilibre sous l'action d'efforts exclusivement exercés sur les surfaces cylindriques S_a (surface intérieures) et S_b (surface extérieures). On suppose que la surface S_b subit une rotation d'angle γ et d'axe Oz tandis que la surface S_a ne subit aucun déplacement.

1) Trouver la solution par une méthode de déplacement. On pourra poser $\underline{\xi} = r\ g(r)\ \underline{e}_\theta$.

2) En déduire le champ de contrainte solution et le torseur des efforts s'exerçant sur S_b.

4) En notant $\mathcal{C}$ le couple exercé sur S_b, montrer que $\mathcal{C} = \mu\ J\ \gamma$ avec $J = 4\ \pi\ l\ b^2\ a^2/(b^2 - a^2)$.

2. Flexion et torsion d'une poutre

On considère une poutre de section carrée occupant le domaine $x \in [0, l]$, $y \in [-a/2, a/2]$ et $z \in [-b/2, b/2]$ dans son état naturel. La poutre est en équilibre sous l'action d'efforts exclusivement exercés sur ses sections d'extrémités avec $T_y^d = T_z^d = 0$, le torseur des efforts s'exerçant sur S_l (en $x = l$) ayant pour éléments de décomposition $[0, \mathcal{X}\ \underline{e}_x, \mathcal{M}\ \underline{e}_z]$.

1) Trouver la solution par la méthode des contraintes.

2) En notant $\delta - \omega\ y$ le déplacement sur S_l dans la direction x, montrer que $\mathcal{X} = E\ ab(\delta/l)$ et $\mathcal{M} = E\ (a^3b/12)(\omega/l)$.

NB: la généralisation de ce problème au cas d'une poutre bicouche fait l'objet du problème du 3/03/87 pp. 17-20.

3. Contraintes dans une colonne de forage

On assimile une colonne de forage à un cylindre plein de densité ρ, d'axe vertical Oz et de section circulaire de rayon a. Le cylindre est de longueur l dans son état naturel. Il est maintenu en O par une cable inextensible et on suppose que la colonne n'est pas en contact avec les parois du trou. On note g l'intensité de la gravité.

1) Exprimer le torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur la section S_0.

2) Justifier par la méthode de Saint Venant le fait de remplacer la traction du cable par une traction uniforme sur S_0.

3) Résoudre par une méthode des contraintes en choisissant $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz}\ \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$.

4) Effectuer l'application numérique avec $g = 10$ m/s^2, $\rho = 7\ 000$ kg/m^3, $E = 2\ 10^5$ MPa, $\nu = 0,25$, $l = 5\ 000$ m et $a = 10$ cm.

5) Commenter la forme de la poutre ainsi obtenue.

4. L'effet "chaudière" dans les centrales nucléaires

Les centrales nucléaires comportent un très grand nombre de circuits d'eau controlés par des vannes. Une vanne fermée emprisonne une certaine quantité d'eau dans un espace à peu près sphérique. En cas d"'Accident par Perte de Réfrigérant Primaire" (APRP), la température peut de l'eau peut monter d'une centaine de degré. La dilation thermique de l'eau étant bien supérieure à celle de l'acier, le champ de contrainte dans la vanne évolue fortement et risque de provoquer une déformation irréversible de la vanne et/ou une perte d'étanchéité irréversible.

On considère une sphère creuse de rayons intérieurs et extérieurs $R_0 = 45cm$ et $R_1 = 50cm$ respectivement, constitué d'acier considéré comme un matériau homogène à comportement élastique isotrope. On donne $E = 2\ 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$ et $\alpha = 0.12\ 10^{-4}$ K^{-1}.

Avant l'accident, on suppose que l'acier est dans son état naturel, la pression de l'eau étant de l'ordre de quelques bars. Lors de l'accident, la pression dans le batiment réacteur, donc à l'extérieur de la sphère, monte jusqu'à $P_1 = 5.6$ bar. L'eau et la vanne subissent une augmentation de température de $\tau = 156$ K. On considère que la dilation de l'eau qui en résulte obéit à une loi de comportement linéaire élastique caractérisée par un module de compression $K_{eau} = 3300$ MPa et un coefficient d'expansion thermique $\alpha_{eau} = 10^{-4}$ K^{-1}.

1) Calculer la pression d'équilibre P_0 de l'eau à l'intérieur de la vanne après l'accident.

2) On suppose que l'acier quitte son comportement élastique lorsque la fonction de charge $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \text{Sup}\{\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 | i, j = 1, 2, 3\}$ du critère de Tresca dépasse la valeur 0. On donne $\sigma_0 = 250$ MPa. Discuter.

MMC/PC12-13 des 10 et 12 février, X96/GR10-20, O. Thual

MÉTHODES VARIATIONNELLES EN THERMOÉLASTICITÉ

Les PC12 et PC13 ont pour but d'amorcer un travail personnel d'entrainement à la résolution des exercices du cours et des problèmes de contrôle. Les exercices suivants entrent dans le cadre du programme : X.1 p. 237, X.4 à X.5 p. 238, X.7 à X.9 p. 243. Les textes de contrôles suivants sont orientés vers l'utilisation des méthodes variationnelles : problèmes du 25/03/86, 1/03/88, 6/12/89, 17/12/90, 13/12/91, 17/12/93 et 22/12/94 respectivement pp. 1-6, 26-28, 36-39, 53-54, 78-83, 114-118 et 137-140.

1. Variations sur l'élongation simple

On considère une barre cylindrique d'axe Ox, de longueur l et de section circulaire $S = 4\pi\ a^2$. Cette barre est constitué d'un matériau isotrope caractérisé par un module d'Young $E(x)$ et un coefficient de Poisson $\nu(x)$ variables avec la direction x de l'axe du cylindre. L'expérience est isotherme. La densité ρ du matériau est constante. On suppose qu'une force extérieure volumique $\underline{F}(\underline{x}) = F(x)\underline{e}_x$ est appliquée (résultant par exemple de la présence d'un champ magnétique). La section S_0 en $x = 0$ est soumise à une pression p et l'on connait le déplacement $\xi_x = -\delta \underline{e}_x$ de la section S_l. La contrainte ou le déplacement de ces sections sont provoquées par un contact sans frottement avec des plaques planes. La surface latérale du cylindre est libre de contrainte.

1) Trouver la solution par une méthode de déplacement dans le cas E constant et $\nu = 0$. Comparer avec une méthode des contraintes. Écrire les équations de Navier et de Beltrami associées à ces deux méthodes.

2) Toujours pour le cas E constant et $\nu = 0$, calculer l'expression de l'énergie élastique de déformation $W(\underline{\xi}')$ et de la fonctionnelle $\Phi(\underline{\xi}')$ pour les champs cinématiquement admissibles de la forme $\underline{\xi}'(\underline{x}) = \xi'(x)\ \underline{e}_x$.

3) On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $\zeta(x)$ deux fois différentiables sur l'intervalle $[0, l]$ et la fonctionnelle $G(\zeta) = \int_0^l \frac{1}{2} \left[\frac{d\zeta}{dx}(x)\right]^2\ dx + \alpha \int_0^l \zeta(x)\ dx$. Montrer que cette fonctionnelle est convexe. Calculer son minimum.

4) En déduire le minimum de l'énergie potentielle $W(\underline{\xi}') - \Phi(\underline{\xi}')$ dans l'ensemble des champs admissibles du problème de thermoélasticité avec $E(x)$ constant et $\nu = 0$. Comparer avec la valeur obtenue à partir de la formule de Clapeyron. Compléter l'étude en décrivant la minimisation de l'énergie complémentaire $W^*(\underline{\underline{\sigma}}') - \Phi^*(\underline{\underline{\sigma}}')$.

On considère désormais que $F = 0$ et que la section S_0 est astreinte à rester dans le plan $x = 0$.

5) Pour le cas E constant et $\nu = 0$, définir les énergies potentielles et complémentaires associées au nouveau problème de thermoélasticité. Vérifier que ces fonctions sont convexes et que leur minimum correspond bien à la solution exacte.

6) Pour le cas $\nu = 0$ mais $E(x)$ variable, montrer que le module apparent $E_a = p\, l/\delta$ est égal à $(\overline{E^{-1}})^{-1}$ où la notation $\overline{B(x)}$ désigne la moyenne $\overline{B(x)} = \frac{1}{l}\int_0^l B(x)\, dx$ de la fonction quelconque $B(x)$.

7) Dans le cas $\nu \neq 0$ constant et $E(x)$ variable, montrer que $(\overline{E^{-1}})^{-1} \leq E_a \leq \overline{E}$. Le cas général est traité dans le cours (X §5.2 p. 207).

2. Enveloppe sphérique sous pression interne

On considère l'équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression traité dans le cours (IX §6.1 p. 148-152) dans le cas où la pression extérieure $p_1 = 0$.

1) Minimiser l'énergie potentielle $W - \Phi$ pour l'ensemble des champ de déplacement cinématiquement admissibles de la forme $\underline{\xi}'(\underline{x}) = A\ \underline{e}_r$ où A est une constante.

2) En posant $\beta = r_0/r_1$, calculer le rapport entre la valeur exacte et la valeur approchée du déplacement en $r = r_0$. Discuter l'intérêt de l'approximation en fonction des valeurs de β.

3) Explorer le cas des champs cinématiquement admissibles de la forme $\xi' = \frac{B}{r^2}\ \underline{e}_r$ puis $\xi' = \frac{C}{r}\ \underline{e}_r$. Discuter.

3. Encadrement du module de compressibilité d'un matériau.

On considère un matériau homogène et isotrope occupant un volume Ω dont la frontière $\partial\Omega$ est soumise à une pression extérieure uniforme p (voir exercice X.5 p. 239).

1) Résoudre le problème de thermoélasticité isotherme par une méthode des déplacements puis une méthode des contraintes et montrer que $\delta\Omega/\Omega = -p/K$ où K est le module de compression.

2) Dans le cas d'un matériau isotrope mais hétérogène, on définit le module de compression apparent K_a par $\delta\Omega/\Omega = -p/K_a$. Montrer que l'on peut écrire $(\overline{K^{-1}})^{-1} \leq K_a \leq \overline{K}$.

3) Que devient cet encadrement lorsqu'un solide homogène entoure une inclusion rigide (incompressible) de volume Ω_c. Même question pour un trou de volume Ω_c.

4. Encadrement de l'inertie de torsion

On considère un barreau cylindrique d'axe Oz, de longueur l et de section droite S de forme quelconque (voir cours VIII §7 p. 99-109 et exercice X.8 p. 244). Le matériau constitutif est homogène et isotrope. Les conditions aux limites sont $\xi_x^d = \xi_y^d = 0$ et $T_z^d = 0$ pour la section S_0 en $z = 0$ et $\xi_x^d = -\alpha\ l\ y$, $\xi_y^d = \alpha\ l\ x$ et $T_z^d = 0$ pour la section S_l en $z = l$. La surface latérale est libre de contraintes.

1) Montrer que les champs $\underline{\xi}'(\underline{x}) = \alpha[z\ \underline{e}_z \wedge \underline{x} + \varphi(x, y)\ \underline{e}_z]$ sont cinématiquement admissibles.

2) Montrer que les champs

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \mu\ \alpha \left[\psi'_{,y}(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) - \psi'_{,x}(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_y)\right]$$

sont statistiquement admissibles si et seulement si la fonction $\psi(x, y)$ est constante sur le le contour C de la section S. On a noté $\psi_{,y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\psi_{,x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

3) Soit $h(x, y)$ un fonction de x et de y. En notant $\underline{x}$ le vecteur de composantes (x, y) et $\underline{\mathrm{grad}}_2$, div_2, $\underline{\mathrm{div}}_2$ et Δ_2 les opérateurs différentiels bidimensionnels, démontrer et expliciter les relations $\mathrm{div}_2(h\ \underline{x}) = \underline{\mathrm{grad}}_2 h \cdot \underline{x} + 2\ h$ et $\underline{\mathrm{div}}_2(\underline{x} \otimes \underline{\mathrm{grad}}_2 h) = \underline{\mathrm{grad}}_2 h + \Delta_2 h \cdot \underline{x}$. Calculer $\mathrm{div}_2(h\ \underline{\mathrm{grad}}_2 h)$.

4) Formuler l'encadrement énergétique pour des fonctions ϕ' et ψ' quelconques. En déduire un encadrement de l'inertie de torsion J définie par $\mathcal{C} = \mu\ \alpha\ J$ où $\mathcal{C}$ est le couple suivant Oz exercé sur la section S_l.

5) Vérifier que pour la solution exacte les inégalités de l'encadrement deviennent des égalités.

6) On suppose maintenant que la section S est un carré de coté $2a$. Expliciter l'encadrement obtenu en posant $\varphi = 0$ et en choisissant ψ linéaire sur chacun des quatre triangles délimités par les diagonales de la section et nulle sur la périphérie du carré.

7) Améliorer ces bornes avec les fonctions suivantes $\varphi = Axy(x^2 - y^2)$ et $\psi = A\cos(\pi x/2a)\cos(\pi y/2a)$ ou $\psi = A(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)$.

5. Déformation d'un barrage poids

On considère un barrage prismatique le largeur l dont la section est le triangle $x \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + z \leq a$. On suppose que $\xi_y^d = 0$ pour les flancs $y = \pm l/2$ et que le contact de ces sections avec la roche est sans frottement (peu réaliste). La région $x \leq 0$ (la retenue) est en eau. On note ρ_0 la masse volumique de l'eau et ρ la masse volumique du barrage. On suppose que la base du barrage est parfaitement encastrée sur la roche et que la paroi aval est libre de contraintes. L'intensité de la gravité est g.

1) On cherche des champs de déplacements cinématiquement admissibles de la forme $\xi_x = q_1 + r_1 x + s_1 z$, $\xi_y = 0$ et $\xi_z = q_3 + r_3 x + s_3 z$. Montrer que $\xi_x = q_1(1 - z/a)$. Utiliser ces champs pour obtenir une borne supérieur de l'énergie potentielle.

2) On cherche des champs contraintes statiquement admissibles dont les composantes non nulles sont de la forme $\sigma_{xx} = Q_{11} + R_{11}x + S_{11}z$, $\sigma_{zz} = Q_{33} + R_{33}x + S_{33}z$, $\sigma_{xz} = Q_{13} + R_{13}x + S_{13}z$ et $\sigma_{yy} = T(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})$. Montrer que $\sigma_{xx} = \rho_0 gz$, $\sigma_{zz} = -(\rho_0 - \rho)gz - (\rho - 2\rho_0)gx$, $\sigma_{xz} = -\rho_0 gx$ et $\sigma_{yy} = T(\rho gz + (\rho - 2\rho_0)gx)$. Utiliser ces champs pour obtenir une borne supérieur de l'énergie complémentaire.

3) Commenter l'encadrement obtenu.

ÉTUDE D'UN MOUVEMENT

Déformation finie	Cinématique lagrangienne	Cinématique eulérienne	Petite transformation
$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t) =$	$\underline{U}(\underline{X},t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X},t) =$	$\underline{U}_t(\underline{x},t) = \underline{U}\left[\underline{\psi}(\underline{x},t),t\right] =$	$\underline{\xi}(\underline{X},t) = \underline{\phi}(\underline{X},t) - \underline{X} =$
$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X},t) =$	$\underline{\underline{\nabla U}}(\underline{X},t) =$	$\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}(\underline{x},t) =$	$\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) =$
$\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\,\underline{\underline{e}} =$	$\dot{\underline{\underline{e}}} =$	$\underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} =$	$\underline{\underline{\nabla\xi}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\omega}} =$
$\underline{dM} = \underline{\underline{F}}\cdot\underline{dM}_0$	$\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\nabla U}}\cdot\underline{dM}_0$	$\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}\,U}}\cdot\underline{dM}$ $= \underline{\underline{d}}\cdot\underline{dM} + \underline{\Omega}\wedge\underline{dM}$	$\underline{dM} - \underline{dM}_0 = \underline{\underline{\nabla\xi}}\cdot\underline{dM}_0$ $= \underline{\underline{\epsilon}}\cdot\underline{dM}_0 + \underline{\omega}\wedge\underline{dM}_0$
$\underline{dM}\cdot\underline{dM}' =$ $\underline{dM}_0\cdot(\underline{\underline{\mathbb{1}}}+2\,\underline{\underline{e}})\cdot\underline{dM}'_0$	$\dot{\widehat{\underline{dM}\cdot\underline{dM}'}} =$ $2\,\underline{dM}_0\cdot\dot{\underline{\underline{e}}}\cdot\underline{dM}'_0$	$\dot{\widehat{\underline{dM}\cdot\underline{dM}'}} =$ $2\,\underline{dM}\cdot\underline{\underline{d}}\cdot\underline{dM}'$	$\underline{dM}\cdot\underline{dM}' - \underline{dM}_0\cdot\underline{dM}'_0 \sim$ $2\,\underline{dM}_0\cdot\underline{\underline{\epsilon}}\cdot\underline{dM}'_0$
$\frac{ds}{ds_0} = \sqrt{C_{11}} =$	$\frac{\dot{\widehat{ds}}}{ds_0} =$	$\frac{\dot{\widehat{ds}}}{ds} = d_{11} =$	$\frac{ds-ds_0}{ds_0} \sim \epsilon_{11} =$
$\sin\theta = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}} =$	$\dot\theta =$	$\dot\theta = 2\,d_{12} =$	$\theta \sim 2\,\epsilon_{12} =$
$\frac{d\Omega_t}{d\Omega_0} = J(\underline{X},t) =$	$\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_0} =$	$\frac{\dot{\widehat{d\Omega_t}}}{d\Omega_t} = \mathrm{div}\,\underline{U} =$	$\frac{d\Omega_t - d\Omega_0}{d\Omega_0} \sim \mathrm{div}\,\underline{\xi} =$

PUISSANCES VIRTUELLES ET MODÉLISATION DES EFFORTS

	$\mathcal{S}$ ou sous-système $\mathcal{S}'$	$\mathcal{S}$ ou sous-système $\mathcal{S}'$	$\mathcal{S}$ ou sous-système $\mathcal{S}'$
Dessin			
Question posée			
Mouvements virtuels, $n =$			
Mouvements réels			
M. v. r.			
Formes linéaires $\mathcal{P}$			
Puissance $\mathcal{P}_e$ ou $\mathcal{P}'_e$			
Puissance $\mathcal{P}_i$ ou $\mathcal{P}'_i$			
Puissance $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$			
$\mathcal{A} = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i$ ou $\mathcal{A}'$ ...			
$\mathcal{P}_i(\text{mvr}) = 0$ ou $\mathcal{P}'_i$ ...			
Conclusion ou réponse			