

PETITES CLASSES DU COURS

DYNAMIQUE DE L'ATMOSPHERE ET DE L'OCÉAN

Janvier 2007

Olivier THUAL

Département de Mécanique

École Polytechnique

Table des matières

PC1 : Rappel de notions de base de la mécanique des fluides	7
PC2 : Ondes de gravité internes	11
PC3 : Forces d'inertie et ondes d'inertie	16
PC4 : Circulation générale de l'atmosphère	20
PC5 : Classification des ondes barotropes dans un β -plan	25
PC6 : Instabilité barocline aux moyennes latitudes	31
PC7 : Couches limites turbulentes	34
PC8 : Circulation générale de l'océan	38
PC9 : Modèles en couches pour l'océan	42
PC10 : Compléments	46
PC12 : Amphidromie de Kelvin	48
PC13 : Ondes équatoriales	54

Avant-propos

Ce document regroupe les énoncés et corrigés des neuf petites classes de l'enseignement intitulé "Dynamique de l'atmosphère et de l'océan" réalisées depuis plusieurs années dans le cadre de la Majeure "Planète Terre" de la troisième année de l'École Polytechnique.

BIBLIOGRAPHIE

Ph. BOUGEAULT et H. LE TREUT "Dynamique de l'atmosphère et des océans" *Polycopié de l'École Polytechnique*, (2006).

Ph. BOUGEAULT, R. SADOURNY et H. LE TREUT "Dynamique de l'atmosphère et des océans" *Polycopié de l'École Polytechnique*, (2002).

Ph. BOUGEAULT et R. SADOURNY, "Dynamique de l'atmosphère et de l'océan" *Les Éditions de l'École Polytechnique*, (2001).

PC1 : Rappel de notions de base de la mécanique des fluides

Cette PC a pour but de réviser quelques notions de bases de la mécanique des fluides.

PC1.1 Traceurs dans un écoulement de déformation

On considère le mouvement de déformation suivant (λ est un paramètre fixe) :

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \lambda(-x \underline{e}_x + y \underline{e}_y). \quad (1)$$

1) Construire les lignes de courant associées à ce mouvement.

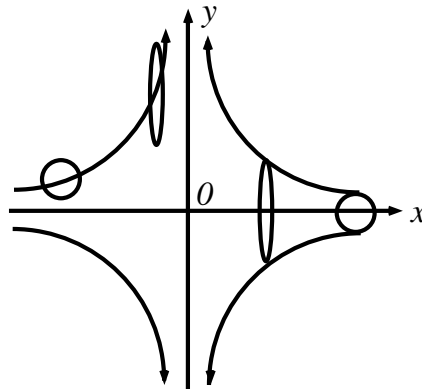
Les composantes de \underline{U} s'écrivent $u = -\lambda x$, $v = \lambda y$ et $w = 0$. Les lignes de courant sont des courbes paramétrées $\underline{x}(s)$ (paramétrage non unique) telles que $\frac{d}{ds}\underline{x}(s) \wedge \underline{U}[\underline{x}(s), t] = \underline{0}$, ce que l'on écrit $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ de manière abrégée pour le plan (x, y) . Pour le présent exemple, la relation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ entraîne $d(xy) = 0$ d'où $xy = \text{cte}$. Les lignes de courants sont des hyperboles.

2) Construire les trajectoires associées à ce mouvement.

Les trajectoires s'obtiennent en résolvant $\frac{d\underline{x}}{dt}(t) = \underline{U}[\underline{x}(t), t]$ ce qui s'écrit ici $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$, $\frac{dy}{dt} = \lambda y$ et $\frac{dz}{dt} = 0$. On en déduit que $\underline{x}(t) = \phi(\underline{X}, t) = X e^{-\lambda t} \underline{e}_x + Y e^{\lambda t} \underline{e}_y + Z \underline{e}_z$. Les trajectoires parcourent des courbes $xy = XY$ qui sont confondues avec les lignes de courant, comme c'est toujours le cas lorsque le champ de vitesse est stationnaire (indépendant du temps).

3) Calculer l'évolution d'une ligne matérielle circulaire de rayon R transportée par ce mouvement et centrée initialement en \underline{X}_0 .

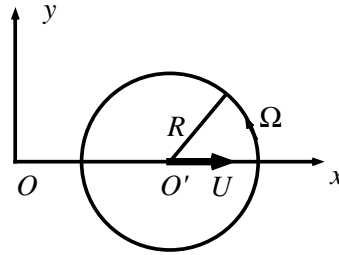
L'équation de la ligne matérielle à $t = 0$ est $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$, l'équation des trajectoires $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$ s'inverse en $\underline{X} = \psi(\underline{x}, t) = x e^{\lambda t} \underline{e}_x + y e^{-\lambda t} \underline{e}_y + z \underline{e}_z$. En notant $\underline{x}_0(t) = X_0 e^{-\lambda t} \underline{e}_x + Y_0 e^{\lambda t} \underline{e}_y + Z_0 \underline{e}_z$ la trajectoire issue de \underline{X}_0 , l'équation de la ligne matérielle à l'instant t s'écrit $\left[\frac{x-x_0(t)}{R e^{-\lambda t}}\right]^2 + \left[\frac{y-y_0(t)}{R e^{\lambda t}}\right]^2 = 1$. C'est une ellipse qui devient de plus en plus allongée dans la direction y , le rapport entre grand axe et petit axe étant égale à $\exp(2\lambda t)$. Cet étirement est une première étape favorisant le mélange de grandeurs scalaires (par exemple l'ozone).



4) Calculer l'évolution d'un traceur passif $b(\underline{x}, t)$ pour ce mouvement en supposant que la concentration initiale est $b(\underline{x}, 0) = \alpha x$. Vérifier que $\frac{Db}{Dt} = 0$.

La description eulérienne $b(\underline{x}, t)$ est reliée à la description lagrangienne $B(\underline{X}, t)$ par $b[\phi(\underline{X}, t), t] = B(\underline{X}, t)$. En l'absence de puit ou de source, $B(\underline{X}, t) = B(\underline{X}) = \alpha X$ est indépendant du temps. En utilisant $\underline{X} = \psi(\underline{x}, t) = x e^{\lambda t} \underline{e}_x + y e^{-\lambda t} \underline{e}_y + z \underline{e}_z$, on obtient $b(\underline{x}, t) = \alpha e^{\lambda t} x$. Le gradient du traceur devient de plus en plus grand dans la direction x . On vérifie que l'on a bien $\frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \underline{U} = 0$.

PC1.2 Fonctions et lignes de courant



- 5) On considère le mouvement de translation uniforme de vitesse $\underline{U}_1 = U \underline{e}_x$. Écrire la fonction de courant $\psi_1(x, y, t)$ associée à ce mouvement et décrire les lignes de courant.

La fonction de courant est définie par les relations $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ou encore $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \nabla \psi$ (on a automatiquement $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$). Comme $\underline{U} \cdot \nabla \psi = 0$, les lignes de courant sont des iso- ψ . On a ici $\psi_1(x, y, t) = -U y$. Les lignes de courant sont les droites de directions \underline{e}_x .

- 6) On considère le mouvement \underline{U}_2 constitué d'une rotation solide de vitesse angulaire Ω . Écrire la fonction de courant $\psi_2(x, y, t)$ associée à ce mouvement et tracer les lignes de courant.

La vitesse dans le tourbillon est $u(x, y) = -\Omega r \sin \theta$ et $v(x, y) = \Omega r \cos \theta$ où $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance au centre du tourbillon et $\theta(x, y)$ l'angle polaire que fait le vecteur $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y$ avec l'axe \underline{e}_x . On peut aussi écrire $\underline{U} = \Omega r \underline{e}_\theta$. On a donc $\psi_2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega r^2(x, y)$. En effet, $\nabla \psi_2 = \Omega r \underline{e}_r$ conduit à $\underline{e}_z \wedge \nabla \psi_2 = \Omega r \underline{e}_\theta$. En conclusion, la fonction de courant s'écrit $\psi_2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega r^2(x, y) = \frac{1}{2} \Omega (x^2 + y^2)$. Les lignes de courant sont des cercles de centre \underline{O} .

- 7) On considère le mouvement $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ obtenu en composant les deux mouvements précédents. Écrire la fonction de courant $\psi_3(x, y, t)$ associée à ce mouvement et décrire les lignes de courants.

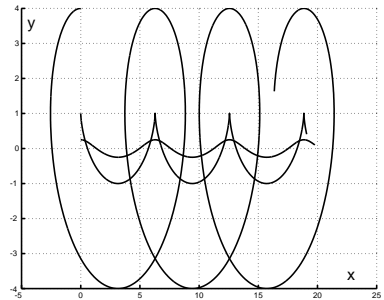
La fonction de courant est $\psi_3(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x - Ut, y)$. On a donc $\psi_3(x, y, t) = -U y + \frac{1}{2} \Omega [(x - Ut)^2 + y^2] = \frac{1}{2} \Omega [(x - Ut)^2 + (y - U/\Omega)^2] - \frac{1}{2} U^2/\Omega$. Les lignes de courant à l'instant t sont des cercles de centre $(Ut, U/\Omega)$.

- 8) Tracer les trajectoires de ce mouvement \underline{U}_3 et comparer avec les lignes de courant.

Les trajectoires s'obtiennent en résolvant les équations différentielles ordinaires couplées $\frac{dx}{dt} = U - \Omega y$ et $\frac{dy}{dt} = \Omega(x - Ut)$. En éliminant y on obtient $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\Omega^2(x - Ut)$ d'où $x = Ut + A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$ et $y = \frac{1}{\Omega}(U - \frac{dx}{dt}) = A \sin \Omega t - B \cos \Omega t$. En notant $\underline{x}(0) = X_0 \underline{e}_x + Y_0 \underline{e}_y$ la condition initiale, l'équation des trajectoires $\underline{x}(t)$ est donc

$$x = Ut + X_0 \cos(\Omega t) - Y_0 \sin(\Omega t) \quad \text{et} \quad y = X_0 \sin(\Omega t) + Y_0 \cos(\Omega t)$$

La figure ci-contre représente trois trajectoires obtenues pour $Y_0 = \lambda \frac{U}{\Omega}$ avec $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1, 4]$. Ce sont des trochoïdes avec comme cas particulier une cycloïde obtenue pour $Y_0 = \frac{U}{\Omega}$.



- 9) On considère le mouvement \underline{U}_{24} obtenu en restreignant le mouvement de rotation solide \underline{U}_2 à un disque de centre O et de rayon R et en supposant que le mouvement est axisymétrique et irrotationnel à l'extérieur de ce disque. On suppose que le champ de vitesse est continu dans tout l'espace. Calculer la fonction de courant $\psi_4(x, y, t)$ associé au mouvement extérieur au disque.

Comme l'écoulement est irrotationnel à l'extérieur du disque, la formule de Stokes entraîne $\int_{C_r} \underline{U} dl = 0$, où C_r est une courbe entourant le disque de rayon R , est constant. On note $\underline{U}_4 = U_r(r) \underline{e}_r + U_\theta(r) \underline{e}_\theta$ la vitesse à l'extérieur du disque. La relation de continuité $\text{div } \underline{U}_4 = 0$, qui s'écrit $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0$ et la continuité de la vitesse en $r = R$ entraînent que $U_r = 0$. On a $2\pi U_\theta r = 2\pi (\Omega R) R$, d'où $U_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}$. Par définition de la fonction de courant, on a $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \nabla \psi_4$, ce qui entraîne $\frac{\partial}{\partial r} \psi_4 = v_\theta = \frac{\Omega R^2}{r}$ et donc $\psi_4 = \Omega R^2 \text{Ln } \frac{r}{R} + D$ où D est une constante. Comme $\psi_4 = \frac{1}{2} \Omega r^2$ pour $r \leq R$, la continuité entraîne que $D = \frac{1}{2} \Omega R^2$. En conclusion, la fonction de courant pour $r \geq R$ s'écrit

$$\psi_4(x, y, t) = \frac{\Omega R^2}{2} \left[1 + \text{Ln} \left(\frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) \right].$$

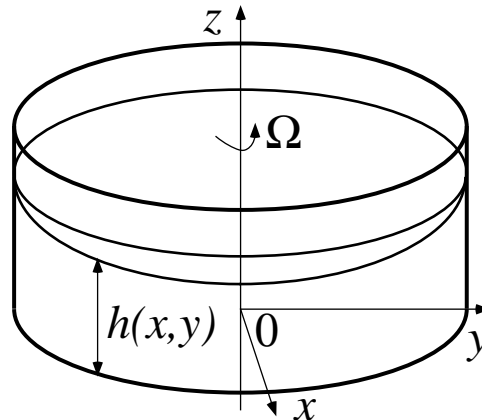
10) On considère le mouvement $\underline{U}_5 = \underline{U}_1 + \underline{U}_{24}$. Donner l'expression de la fonction de courant $\psi_5(x, y, t)$ associée à ce mouvement de tornade mobile.

On a $\psi_5(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x - Ut, y)$ pour $(x - Ut)^2 + y^2 \leq R$ et $\psi_5(x, y, t) = \psi_1(x, y) + \psi_4(x - Ut, y)$ pour $(x - Ut)^2 + y^2 \geq R$.

PC1.3 Repère tournant

11) On veut démontrer que la relation $\underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$ est vraie pour tout vecteur $\underline{\Omega}$ constant. Démontrer cette relation dans le cas $\underline{\Omega} = \underline{e}_z$. En déduire qu'elle est vraie pour un $\underline{\Omega}$ quelconque. Retrouver cette relation en utilisant l'expression $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ où $\underline{c} = \underline{a} \wedge \underline{b}$, ϵ_{ijk} est le pseudo-tenseur alterné et où la convention de sommation des indices répétés (convention d'Einstein) est utilisée.

On calcule facilement $\underline{e}_z \wedge \underline{x} = -y \underline{e}_x + x \underline{e}_y$ si $\underline{x} = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + z \underline{e}_z$. On en déduit que $\underline{e}_z \wedge (\underline{e}_z \wedge \underline{x}) = -x \underline{e}_x - y \underline{e}_y$. D'autre part, $(\underline{e}_z \wedge \underline{x})^2 = x^2 + y^2$. On en déduit facilement que $\underline{e}_z \wedge (\underline{e}_z \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{e}_z \wedge \underline{x})^2]$. Pour un vecteur $\underline{\Omega}$ quelconque, il suffit de choisir l'axe \underline{e}_z parallèle à $\underline{\Omega}$ et de remarquer que la relation est homogène de degré deux en $\|\underline{\Omega}\|$. En notant $\underline{d} = \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$, on peut écrire $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{npq} \Omega_p x_q \epsilon_{nrs} \Omega_r x_s) = 2 \epsilon_{npq} \Omega_p \delta_{iq} \epsilon_{nrs} \Omega_r x_s = 2 \epsilon_{npi} \epsilon_{nrs} \Omega_p \Omega_r x_s$. En notant $\underline{c} = \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x})$, on peut écrire $c_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j \epsilon_{klm} \Omega_l x_m = -\epsilon_{kji} \epsilon_{klm} \Omega_j \Omega_l x_m$ en utilisant la relation $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}$. On voit donc que $c_i = -\frac{1}{2} d_i$ en comparant la position des indices répétés (donc sommés).



On considère une cuve animée d'un mouvement de rotation solide autour de l'axe Oz et de vecteur rotation $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$ constant. Cette cuve est remplie d'un liquide à surface libre d'équation $z = h(x, y)$.

La force de gravité est $-g \underline{e}_z$. On suppose que l'écoulement est incompressible. On note ρ la masse volumique du fluide et on suppose que les forces de tensions visqueuses sont négligeables.

12) En notant \underline{U}_a la vitesse absolue du fluide dans un repère fixe, P le champ de pression et

$$\left(\frac{Db}{Dt}\right)_a = \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \underline{U}_a$$

la dérivée particulière dans le mouvement absolu, écrire les équations du mouvement en faisant apparaître le potentiel de gravitation $\Phi_a = g z$. En déduire les équations du mouvement dans le repère tournant en notant \underline{U} la vitesse relative et en faisant apparaître le géopotential $\Phi = \Phi_a - \frac{1}{2}(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2$ que l'on explicitera en fonction des coordonnées (x, y, z) . On suppose que la pression atmosphérique P_a est constante. Déterminer l'élévation de la surface libre $h(x, y)$ dans le cas où le fluide est immobile dans le repère tournant en supposant que $h(0, 0) = h_0$ est connu.

Les équations du mouvement s'écrivent $\nabla \cdot \underline{U}_a = 0$ et $\left(\frac{D}{Dt}\right)_a \underline{U}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_a$ en remarquant que la force volumique de gravité peut s'écrire $-g \underline{e}_z = -\nabla \Phi_a$ avec $\Phi_a = g z$. Dans le repère tournant, les équations s'écrivent $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_a$. En utilisant la relation $\underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}) = -\frac{1}{2} \nabla [(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2]$ on peut écrire $\frac{D}{Dt} \underline{U} + 2 \underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi$ avec $\Phi = \Phi_a - \frac{1}{2}(\underline{\Omega} \wedge \underline{x})^2$. On peut écrire $\Phi = g z - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)$. Dans le cas où $\underline{U} = \underline{0}$, on peut écrire $\nabla(P + \rho \Phi) = 0$. En appliquant la condition aux limites $P = P_a$ en $\underline{x} = (0, 0, h_0)$ on obtient $P = P_a - \rho [g(h - h_0) - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)]$. En appliquant la même condition aux limites aux autres points de la surface libre on en déduit la forme parabolique $h(x, y) = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$.

13) Calculer la forme de la surface libre d'une aquaplanète de vecteur de rotation $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$.

On a $\Phi = g \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2)$. On en déduit que $P = P_a - \rho [g r - \frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2)]$. La forme de la surface libre est donc donnée par l'équation $g \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r_0 \right) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 - r_0^2) = 0$.

PC2 : Ondes de gravité internes

L'objet de cette PC est d'examiner en détail les propriétés des ondes de gravité internes. La PC est construite à partir de l'exemple d'un gaz parfait, tirant ainsi partie de la simplicité de la loi d'état. Les propriétés des ondes de gravité internes mise en évidence dans cette PC sont identiques pour un gaz plus complexe ou pour un fluide.

NB : Des animations de champs d'ondes internes monochromatiques ou émises par un obstacle oscillant (croix de Saint-André) peuvent être consultées à la rubrique "Ondes dans les Fluides" de l'URL suivant :

<http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/>

PC2.1 Rappel sur l'approximation de Boussinesq

- 1) Un gaz parfait est défini par les lois d'état $P = \rho RT$, $e = C_v T$ et $T dS = de + P d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ où C_v et R sont des constantes. On note $C_p = C_v + R$ et $\Gamma = C_p/C_v$. Dédurre de ces définitions l'expression de l'entropie S en fonction de P et de ρ .

On peut écrire $T dS = C_v dT - \frac{P}{\rho^2} d\rho$ d'où $dS = C_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$. On a aussi $\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$ qui entraîne alors $dS = C_v \frac{dP}{P} - C_p \frac{d\rho}{\rho}$. On a finalement $S = C_v \text{Ln } P - C_p \text{Ln } \rho + Cste = C_v \text{Ln } (P \rho^{-\Gamma}) + Cste$.

- 2) On considère un état de référence tel que ρ_r et S_r sont constants. Montrer que l'on peut écrire $S - S_r \sim -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$ si ρ et S sont "proches" de l'état de référence et si la vitesse du son $c^2 = \Gamma RT$ tend vers l'infini. En déduire que l'expression $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim -\gamma(S - S_r)$ définissant γ entraîne $\gamma = g/C_p$.

L'équation d'état $dS = C_v \frac{dP}{P} - C_p \frac{d\rho}{\rho}$ entraîne $dS = -\frac{C_p}{\rho} \left(d\rho - \frac{1}{\Gamma RT} dP\right)$. En considérant que la vitesse du son est infinie et en remplaçant $d\rho$ et dS par $\rho - \rho_r$ et $S - S_r$, on obtient finalement $S - S_r \sim -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$. On en déduit que $\gamma = g/C_p$.

- 3) On considère un état de référence (P_r, S_r, ρ_r) où ρ_r et S_r sont des constantes et $P_r(z)$ dépend de z . Montrer que cet état ne peut pas simultanément satisfaire l'équation d'état et l'équilibre hydrostatique. Donner l'expression de $P_r(z)$ qui découle de l'équilibre hydrostatique.

Comme ρ_r et S_r sont constants, P_r devrait l'être aussi si la loi d'état était satisfaite. Le profil de pression de référence vérifie $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$, ce qui entraîne $P_r(z) = -\rho_r g z + Cste$.

- 4) Écrire les équations d'évolution d'un fluide parfait dans le cadre de l'approximation de Boussinesq $\rho \sim \rho_r$ et $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim \gamma(S - S_r)$ en notant $(P, S, \rho) = (P_r + p, S_r + s, \rho_r + \delta\rho)$ la masse volumique, la pression totale et l'entropie.

En utilisant $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$, les équations d'évolution sont $\frac{D}{Dt}\underline{U} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - g \underline{k} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + g \delta\rho \underline{k})$, $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{DS}{Dt} = \frac{Ds}{Dt} = 0$. En utilisant les approximations $\rho \sim \rho_r$ et $\frac{g}{\rho_r}(\rho - \rho_r) \sim \gamma(S - S_r)$, on peut écrire $\frac{D}{Dt}\underline{U} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r}\nabla p + \gamma s \underline{k}$. Ces équations ne sont valides que dans la mesure où $(p, s, \delta\rho)$ ne sont pas trop "grands".

- 5) On considère l'état de base $(u, v, w, P_r + p, S_r + s, \rho) = [0, 0, 0, P_r + \bar{p}(z), S_r + \bar{s}(z), \bar{\rho}(z)]$. On choisit désormais ρ plutôt que $\delta\rho = \rho - \rho_r$ pour exprimer les équations. On suppose connu le profil $\bar{s}(z)$. En déduire les profils $\bar{p}(z)$ et $\bar{\rho}(z)$ en supposant que cet état de base est solution des équations dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Montrer que cet état ne vérifie pas la loi d'état

des gaz parfaits.

Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, la loi d'état est remplacée par la relation $S - S_r = -\frac{C_p}{\rho_r}(\rho - \rho_r)$ et la pression P n'est plus qu'un champ déterminé par les équations du mouvement (c'est un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité). Le profil de densité $\bar{\rho}(z)$ est donné par la relation $\bar{s}(z) = -\frac{C_p}{\rho_r}[\bar{\rho}(z) - \rho_r]$ et le profil d'écart de pression $\bar{p}(z)$ découle des équations à travers la relation hydrostatique $\frac{d}{dz}\bar{p}(z) = \rho_r \gamma \bar{s}(z)$.

PC2.2 Relation de dispersion des ondes internes

Les équations de l'approximation de Boussinesq s'écrivent donc

$$\nabla \cdot \underline{U} = 0, \quad \frac{D\underline{U}}{Dt} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \gamma s \underline{k} \quad \text{et} \quad \frac{Ds}{Dt} = 0.$$

Les variables d'état sont $(P, S, \rho) = [P_r(z) + p, S_r + s, \rho_r + \delta\rho]$ avec ρ_r et S_r constants et $P_r(z)$ défini par $\frac{dP_r}{dz} = -\rho_r g$ où g est la gravité locale ($\Phi \sim gz$). Dans cette approximation, la loi d'état a été remplacée par la relation $\delta\rho = -\frac{\gamma\rho_r}{g} s$.

- 6) On suppose maintenant que le repère est cartésien avec $\underline{k} = \underline{e}_z$ et que $\underline{\Omega} = \underline{0}$, ce qui revient à s'intéresser à des écoulements pour lesquels les effets de la rotation sont négligeables. On se donne un état de base $[P_r(z) + \bar{p}(z), S_r + \bar{s}(z), \bar{\rho}(z)]$. Montrer qu'il vérifie $\frac{d\bar{p}}{dz}(z) = \rho_r \gamma \bar{s}(z)$ et $\bar{\rho}(z) = \rho_r - \frac{\gamma\rho_r}{g} \bar{s}(z)$. Écrire les équations du mouvement linéarisées autour de l'état de base en notant $(u, v, w, P_r + p, S_r + s, \rho) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, P_r + \bar{p} + \tilde{p}, S_r + \bar{s} + \tilde{s}, \bar{\rho} + \tilde{\rho})$. Montrer que la fréquence de Brunt-Väisälä $\bar{N}(z)$, définie par la relation $\bar{N}^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz}$, vérifie la relation $\bar{N}^2 = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{d\bar{\rho}}{dz}(z)$.

L'état de base étant solution des équations, il vérifie les relations indiquées. La relation entre $\bar{\rho}(z)$ et $\bar{s}(z)$ entraîne que $\bar{N}^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz} = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$. Les équations linéarisées s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \gamma \tilde{s}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \bar{N}^2 \tilde{w}.$$

On peut ajouter à ces équations la relation $\tilde{s} = -\frac{g}{\rho_r} \tilde{\rho}$.

- 7) On suppose que $\bar{N} = N_0$ est constant et on cherche alors des solutions du système linéarisé sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{s}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s}) \exp(ikx + ily + imz - i\omega t)$. Écrire le système linéaire que vérifient les amplitudes complexe de cette onde plane.

Le système linéaire s'écrit

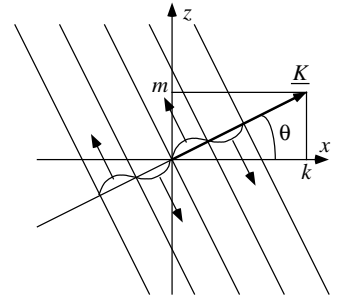
$$-i\omega \hat{u} + ik \frac{\hat{p}}{\rho_r} = 0, \quad -i\omega \hat{v} + il \frac{\hat{p}}{\rho_r} = 0, \quad -i\omega \hat{w} + im \frac{\hat{p}}{\rho_r} - \gamma \hat{s} = 0, \quad k\hat{u} + l\hat{v} + m\hat{w} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\gamma} N_0^2 \hat{w} - i\omega \hat{s} = 0.$$

- 8) En supposant que $\omega \neq 0$, éliminer $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{s})$ pour n'obtenir qu'une seule équation en \hat{w} . En déduire la relation de dispersion des ondes gravité interne peut s'écrire $\omega^2 = N_0^2 \frac{k_H^2}{K^2}$ avec $k_H = \sqrt{k^2 + l^2}$ et $K = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$.

On élimine tout d'abord \hat{u} et \hat{v} et \hat{p} en écrivant $\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{p}$, $\hat{v} = \frac{l}{\omega} \hat{p}$, $\hat{p} = -\rho_r \frac{m\omega}{k^2+l^2} \hat{w}$. L'élimination de \hat{s} s'écrit $\hat{s} = \frac{N_0^2}{i\gamma\omega} \hat{w}$. En reportant dans l'équation d'évolution de la vitesse verticale, on obtient alors $-i\omega\hat{w} - im \frac{m\omega}{k^2+l^2} \hat{w} = \frac{N_0^2}{i\gamma\omega} \gamma \hat{w}$ d'où $[\omega^2(k^2 + l^2 + m^2) - N_0^2(k^2 + l^2)]\hat{w} = 0$. Le système admet des solutions non nulles si et seulement si la relation de dispersion $\omega^2 = N_0^2 \frac{k^2+l^2}{k^2+l^2+m^2} = N_0^2 \frac{k^2}{K^2}$ est satisfaite. On peut résumer les éliminations successives en écrivant $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s}) = \hat{w} \left(-\frac{mk}{k^2+l^2}, -\frac{ml}{k^2+l^2}, 1, -\rho_r \frac{m\omega}{k^2+l^2}, -i \frac{N_0^2}{\gamma\omega} \right)$.

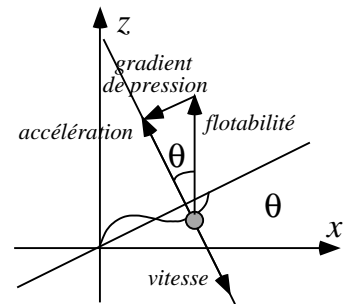
- 9) Montrer que l'on peut toujours ramener cette recherche d'onde plane au cas $l = 0$, sans perte de généralité. On note $\underline{K} = k \underline{e}_x + m \underline{e}_z$, $K = \sqrt{k^2 + m^2}$, $\underline{e}_k = \frac{1}{K} \underline{K} = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ et $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_z$. Montrer que la relation de dispersion peut s'écrire $\omega = \pm N_0 \frac{k}{K} = \pm N_0 \cos \theta$. Montrer ensuite que le champ de vitesse d'une onde de gravité interne peut s'écrire, dans l'espace réel, sous la forme $\tilde{\underline{U}}(x, y, z, t) = U_m \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_\theta$, où U_m est un nombre réel quelconque. Relier le fait que les trajectoires soient parallèles aux plans des phases à l'incompressibilité du fluide.

Comme le problème est invariant par rotation des axes horizontaux autour d'un axe vertical, on peut se ramener au cas $l = 0$. Les deux relations de dispersion $\omega = \pm N_0 \frac{|k|}{K}$ sont équivalentes aux deux relations $\omega = \pm N_0 \frac{k}{K} = \pm N_0 \cos \theta$ où θ varie entre 0 et 2π . En changeant l'origine de l'espace ou du temps, on peut se ramener au cas où \hat{w} est réel et poser $\tilde{u} = -\frac{m}{k^2+m^2} U_m$ et $\tilde{w} = \frac{k}{k^2+m^2} U_m$ avec U_m réel. Comme $\tilde{v} = 0$ (puisque $l = 0$), on peut écrire $\tilde{\underline{U}} = U_m \underline{e}_\theta$. La relation $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ entraîne que le vecteur $\tilde{\underline{U}}$ des composantes complexes vérifie $\underline{K} \cdot \tilde{\underline{U}} = 0$, ce qui impose au champ de vitesse $\tilde{\underline{U}}$ d'osciller en restant parallèle aux plans de phase. Dans le cas des ondes internes, les trajectoires décrivent des segments de droite dans le plan engendré par le vecteur d'onde \underline{K} et la verticale.



- 10) Interpréter physiquement ces oscillations en considérant une particule solide de volume \mathcal{V} constant et de densité $\rho_* = \bar{\rho}(z_*)$ constante oscillant autour de la position z_* et contraintes par le gradient de pression du fluide à rester dans un plan de phase.

Soit $x \underline{e}_x + z \underline{e}_z = X(t)(-\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_z)$ le mouvement de la particule solide. Son altitude est alors $z_* + \zeta(t)$ avec $\zeta(t) = X \cos \theta$. La force de flottabilité est $g \mathcal{V} [\bar{\rho}(z_* + \zeta) - \bar{\rho}(z_*)] \underline{e}_z \sim \mathcal{V} g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}(z_*) \zeta(t) \underline{e}_z$. En utilisant la définition $N_0^2 = -g \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}(z)$, cette poussée d'Archimède est égale à $-\mathcal{V} \rho_r N_0^2 \zeta \underline{e}_z$. Pour une onde monochromatique, la force de pression $\nabla \tilde{p} = i \underline{K} \tilde{p} \exp(i \underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ est parallèle à \underline{K} . En projetant les forces sur la direction \underline{e}_θ , la loi fondamentale de la dynamique entraîne donc $\ddot{X}(t) = -N_0^2 \cos \theta \zeta(t) = -N_0^2 \cos^2 \theta X(t)$. On obtient alors $X(t) = X_m \cos[(N_0 \cos \theta)t + \varphi]$ et $\zeta(t) = \zeta_m \cos[(N_0 \cos \theta)t + \varphi]$ avec $X_m = \zeta_m \cos \theta$. La fréquence $N_0 \cos \theta$ est bien celle de l'oscillation des ondes.

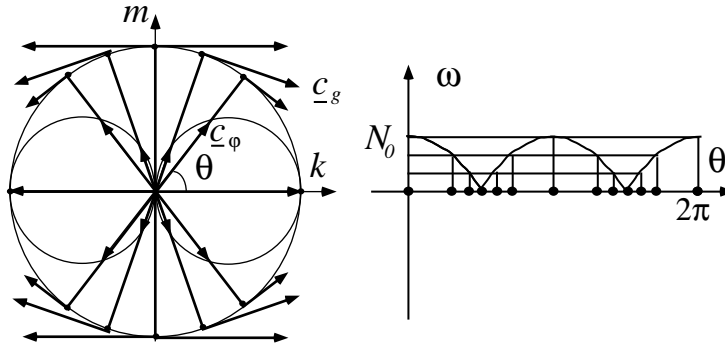


- 11) En considérant la relation de dispersion $\omega = N_0 \frac{k}{K} = N_0 \cos \theta$, donner l'expression des champs de pression $\tilde{p}(x, y, z, t)$, d'entropie $\tilde{s}(x, y, z, t)$ et de masse volumique $\tilde{\rho}(x, y, z, t)$ dans l'espace réel en fonction de U_m . Montrer que les ondes (ω, \underline{K}) associées à la relation de dispersion $\omega = -N_0 \cos \theta$ peuvent être vues comme des ondes $(-\omega, -\underline{K})$ associées à la relation de dispersion $\omega = N_0 \cos \theta$. En déduire que l'on peut se limiter à l'étude des $\omega \geq 0$.

Comme $\hat{p} = -\frac{m\omega}{\rho_r K^2} \hat{w}$ et $\hat{s} = -i \frac{N_0^2}{\gamma\omega} \hat{w}$, on a $\tilde{p} = -\frac{m N_0}{\rho_r K^3} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\tilde{s} = \frac{N_0}{\gamma} U_m \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\tilde{\rho} = \frac{N_0 \rho_r}{g} U_m \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$. Comme les équations du problème sont réelles, toute solution de la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{K})$ est telle que $-\omega = \Omega(-\underline{K})$. On peut donc ne considérer que les $\omega \geq 0$.

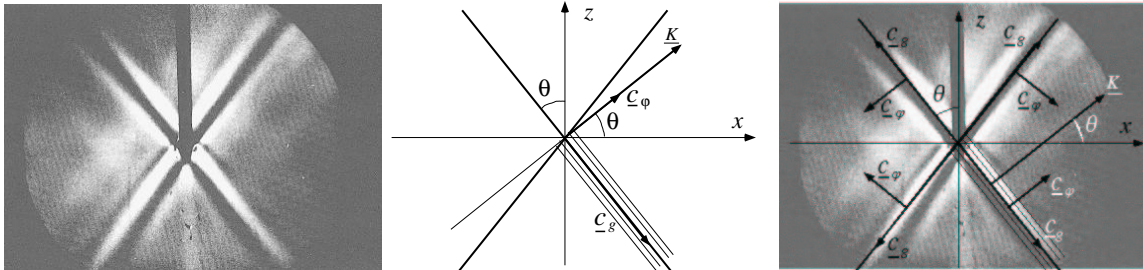
- 12) Tracer les courbes iso- ω de la relation de dispersion $\omega = \Omega(\underline{K}) = N_0 |\cos \theta|$ dans le plan (k, m) en ne considérant que les $\omega \geq 0$. En déduire que la vitesse de groupe \underline{c}_g , définie par $\underline{c}_g(\underline{K}) = \frac{\partial \Omega}{\partial k} \underline{e}_x + \frac{\partial \Omega}{\partial m} \underline{e}_z$, est perpendiculaire à la vitesse de phase $\underline{c}_\varphi(\underline{K}) = \frac{\Omega(\underline{K})}{K} \underline{e}_k$. Mettre en relation ce résultat avec la direction des trajectoires.

Comme $\Omega(\underline{K}) = N_0 |\cos \theta|$ ne dépend pas du module K , les iso- ω sont des droites passant par l'origine. On en déduit que la vitesse de groupe \underline{c}_g , qui égale au gradient de la fonction $\Omega(\underline{K})$ est perpendiculaire à \underline{K} et donc à la vitesse de phase \underline{c}_φ . La vitesse de groupe est donc parallèle à la vitesse du fluide. Ceci est consistant avec le fait que la vitesse de groupe caractérise la vitesse de propagation de l'énergie. En utilisant l'expression du gradient en coordonnées polaires on peut écrire $\underline{c}_g = \frac{\partial \Omega}{\partial K} \underline{e}_k + \frac{1}{K} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$. On en déduit que $\underline{c}_g = -\frac{N_0}{K} \sin \theta \underline{e}_\theta$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ et $\underline{c}_g = \frac{N_0}{K} \sin \theta \underline{e}_\theta$ pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.



PC2.3 Application à deux problèmes d'émission d'ondes

- 13) On fait osciller une sphère autour de sa position moyenne avec une pulsation ω_0 . Un faisceau lumineux traverse l'expérience. Les fluctuations de densité, influant sur l'indice de réfraction de la lumière, sont visualisés sur un écran. Expliquer l'existence de la croix de Saint-André observée sur la figure et relier l'angle de ses branches à ω_0 et N_0 . Discuter la forme de cette croix lorsque ω_0 varie.

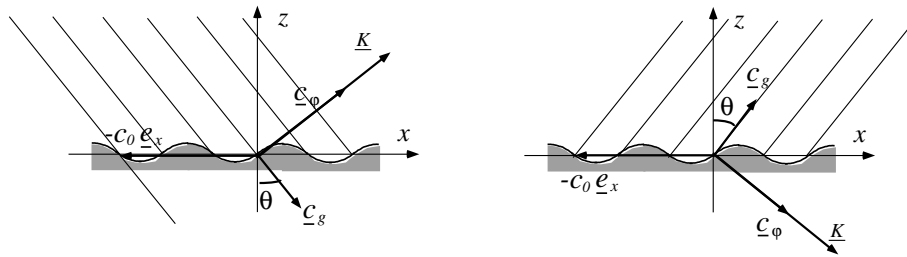


Seules les ondes de vecteur d'onde \underline{K} vérifiant $\omega_0 = N_0 |\cos \theta|$ sont excitées par l'oscillation. Cette équation sélectionne donc les angles $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2\pi - \theta_0$, $\pi - \theta_0$ et $\pi + \theta_0$. Loin de la sphère (en pratique au bout de quelques longueurs d'ondes), seules les points de l'espace physique situés le long des droites passant par la sphère et parallèles aux quatre vitesse de groupe \underline{c}_g possibles sont animées d'oscillations dues aux ondes. Le lieu des points oscillants forme alors une croix de Saint-André faisant un angle θ_0 avec la verticale. Pour $\omega_0 = 0$ on a $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$: les particules oscillent infiniment lentement le long de l'axe des x . Lorsque ω_0 augmente, l'angle θ_0 diminue : les particules oscillent perpendiculairement à \underline{K} et parallèlement à \underline{c}_g , propageant ainsi l'énergie dans cette direction. Pour $\omega_0 = N_0$, on a $\theta_0 = 0$: les particules oscillent sur un axe vertical. Pour $\omega_0 > N_0$, aucune onde n'est observée loin de la sphère : le milieu amortit les perturbations exponentiellement en fonction de la distance.

- 14) On considère maintenant que l'écoulement est généré par le déplacement à la vitesse $-c_0 \underline{e}_x$ d'une surface rigide ondulée de période $L_0 = 2\pi/k_0$ et d'amplitude h_m , c'est-à-dire par une condition

aux limites de glissement sur la surface mobile d'équation $z = h(x, t) = h_m \sin[k_0(x - c_0 t)]$. On suppose que h_m est suffisamment petit pour que l'approximation linéaire reste valide. Décrire les vecteurs d'onde des ondes de gravité admissibles pour ce problème en invoquant la stationnarité de l'onde dans le repère mobile.

Les ondes liées à une surface rigide de forme quelconque sont définies par les relations $N_0 \frac{k}{K} + c_0 k = 0$ et $-N_0 \frac{k}{K} + c_0 k = 0$. En supposant $c_0 > 0$, seules les ondes vérifiant $K = N_0/c_0$ sont émises. Dans le cas d'un sol mobile périodique, les conditions aux limites imposent que la vitesse au sol soit une fonction périodique de période L_0 . On doit donc avoir $k = \pm k_0$, ce qui impose que l'angle θ est solution de $k_0 = \pm K \cos \theta$ ou encore $k_0 c_0 / N_0 = \pm \cos \theta$. Si on note θ_0 la solution comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, il y a deux vecteurs d'ondes admissibles de module N_0/c_0 et d'angles $\theta = \theta_0$ et $\theta = 2\pi - \theta_0$.



- 15) Restreindre encore les vecteurs d'onde admissibles en distinguant les ondes qui "freinent le sol" de celles qui le "poussent". Comparer ce résultat avec le direction des vitesses de groupe.

La condition aux limites cinématique entraîne que $\tilde{w} = \frac{dh}{dt} \sim \frac{\partial h}{\partial t} = c_0 h_m \cos[k_0(x - c_0 t)]$. On en déduit que $\tilde{p} = -\frac{m k}{\rho r K^3} N_0 \tilde{w} = -\frac{1}{2} \rho r \sin(2\theta) \frac{N_0}{K} \tilde{w} = -\frac{1}{2} \rho r \sin(2\theta) U_0 c_0 h_m \cos[k_0(x - c_0 t)]$. La force exercée par le fluide sur une parcelle rectangulaire de longueur L_0 en x et D en y est $\underline{F} = D \int_C p \underline{n} ds$, où C est la courbe d'équation $z = h(x)$ sur une période L_0 en x , \underline{n} la normale au sol et s la coordonnée curviligne. Comme h_m est petit, on peut écrire approximativement $\underline{F} = D \int_0^{L_0} p \underline{n} dx$ avec $\underline{n} \sim h' \underline{e}_x + \underline{e}_y$. Comme p est une fonction périodique en x , on a $\underline{F} = D \int_0^{L_0} p h' dx \underline{e}_x = D \int_0^{L_0} p w dx \underline{e}_x = -\frac{1}{4} \rho r \sin(2\theta) \frac{N_0}{K} (c_0 h_m)^2 \underline{e}_x$. Cette force s'oppose au mouvement seulement lorsque $\sin(2\theta) < 0$. La seule onde émise par le solide mobile est donc celle dont l'angle est $\theta = 2\pi - \theta_0$. La vitesse de groupe \underline{c}_g associée à cette onde fait un angle $\pi/2 - \theta_0$ avec \underline{e}_x . L'onde est émise uniquement en aval de la traction. Ce résultat est conforme avec le sens de la vitesse de groupe.

PC3 : Forces d'inertie et ondes d'inertie

L'objet de cette PC est d'illustrer le rôle des forces d'inertie. La première partie s'intéresse au cas de mouvements horizontaux stationnaires. La seconde partie s'intéresse aux ondes d'inertie.

PC3.1 Écoulements circulaires

On s'intéresse aux écoulements circulaires $\underline{U}(r, \theta) = U_\theta(r) \underline{e}_\theta(\theta)$ en supposant connue la distribution de pression radiale $p(r)$. On cherche les distributions de vitesse azimuthale $U_\theta(r)$ permettant de satisfaire l'équilibre $\underline{0} = \underline{C}_e + \underline{C}_o + \underline{P}$ entre la force centrifuge \underline{C}_e , la force de Coriolis \underline{C}_o et la force de pression \underline{P} . On note $f = 2\Omega \sin \phi$ le paramètre de Coriolis.

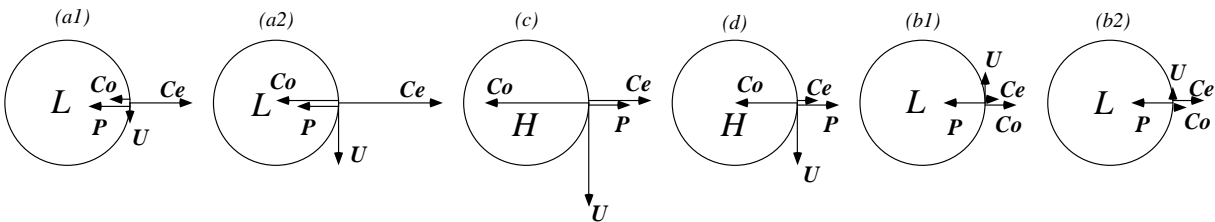
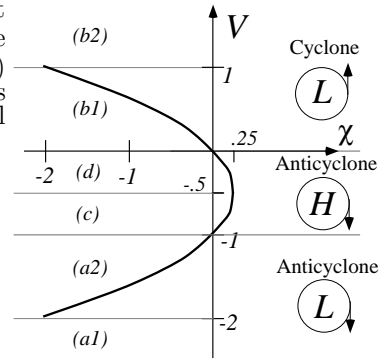
1) Exprimer les forces $\underline{C}_e = C_e \underline{e}_r$, $\underline{C}_o = C_o \underline{e}_r$ et $\underline{P} = P \underline{e}_r$ en fonction de $U_\theta(r)$, $\frac{\partial p}{\partial r}(r)$ et r , ainsi que l'équation de leur équilibre.

La force centrifuge est $\underline{C}_e = C_e \underline{e}_r = \frac{U_\theta^2}{r} \underline{e}_r$, d'où $C_e = \frac{U_\theta^2}{r}$. La force de Coriolis est $\underline{C}_o = C_o \underline{e}_r = f U_\theta \underline{e}_r$ d'où $C_o = f U_\theta$. La force de de pression est $\underline{P} = P \underline{e}_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r$ d'où $P = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r}$. L'équilibre $0 = C_e + C_o + P$ s'écrit donc $0 = \frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r}$.

2) En notant $V = \frac{U_\theta}{f r}$ et $\chi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{1}{f^2 r}$, représenter la courbe des solutions de l'équilibre dans un diagramme (χ, V) . Distinguer les cas où $\underline{0}$ est un maximum (H) ou minimum (L) de pression, ainsi que les cas où la circulation est anticyclonique ou cyclonique. Montrer que $\frac{C_e}{C_o} = V$, $\frac{P}{C_e} = -1 - \frac{1}{V}$ et $\frac{P}{C_o} = -1 - V$. En déduire six schémas de trajectoires circulaires correspondant aux différents signes des forces ainsi qu'à la comparaison de leurs modules respectifs.

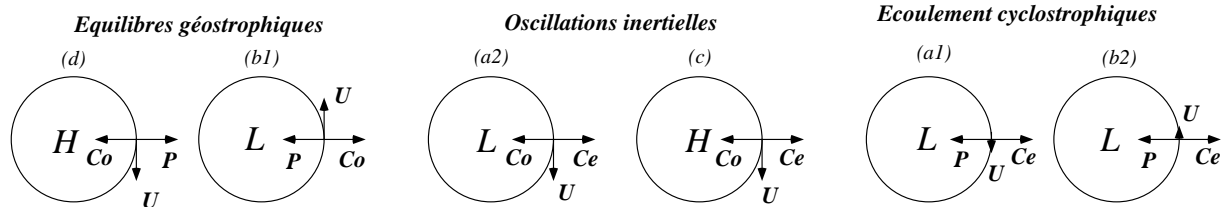
Avec ces notations, l'équilibre s'écrit $V^2 + V + \chi = 0$. La courbe des solutions est une parabole dans le plan (χ, V) . Les solutions n'existent que pour $\chi \leq \frac{1}{4}$. La circulation est cyclonique pour $V > 0$ et anticyclonique pour $V < 0$. La pression est maximum (H) pour $\chi > 0$ et minimum (L) pour $\chi < 0$. La courbe des solutions est donc divisée en trois régions caractérisées par un cyclone normal pour $V > 0$, un anticyclone normal pour $t > 0$ et un anticyclone anormal pour $V < 0$ et $\chi < 0$. Les six cas

- (a₁) : $V < -2$ avec $P < C_o < 0 < C_e$ et $|C_e| = |P| + |C_o|$
- (a₂) : $-2 < V < -1$ avec $C_o < P < 0 < C_e$ et $|C_e| = |P| + |C_o|$
- (c) : $-1 < V < -\frac{1}{2}$ avec $C_o < 0 < P < C_e$ et $|C_o| = |P| + |C_e|$
- (d) : $-\frac{1}{2} < V < 0$ avec $C_o < 0 < C_e < P$ et $|C_o| = |P| + |C_e|$
- (b₁) : $0 < V < 1$ avec $P < 0 < C_e < C_o$ et $|P| = |C_e| + |C_o|$
- (b₂) : $1 < V$ avec $P < 0 < C_o < C_e$ et $|P| = |C_e| + |C_o|$



3) On s'intéresse aux cas limites pour lesquels une force est négligeable devant les deux autres. Décrire les "équilibres géostrophiques" correspondant au cas où C_e est négligeable, les "oscillations inertielles" correspondant au cas où P est négligeable et enfin les "écoulements cyclostrophiques" correspondant au cas où C_o est négligeable. Pourquoi peut-on appeler $Ro = |V|$ le nombre de Rossby local ? Quel régime correspond aux petits nombres de Rossby locaux ?

Les “équilibres géostrophiques” sont obtenus pour $|V| \ll 1$, c’est-à-dire lorsque le nombre de Rossby local $Ro = |V|$ est petit devant 1. La force centrifuge C_e est négligeable et l’équilibre $C_o + P = 0$ s’écrit $f U_\theta = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$. On peut avoir un anticyclone normal (d) ou un cyclone normal (b_1). Les “oscillations inertielles” sont obtenues pour $V \sim -1$. La force de pression P est négligeable et l’équilibre $C_e + C_o = 0$ s’écrit $\frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta = 0$. On peut avoir un anticyclone anormal (a_2) ou un anticyclone normal (c). Les “écoulements cyclostrophiques” sont obtenus pour $Ro = V \gg 1$, c’est-à-dire pour de très grands nombres de Rossby. La force de Coriolis C_o est négligeable et l’équilibre $C_e + P = 0$ s’écrit $\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r}$. On peut avoir un anticyclone anormal (a_1) ou un cyclone normal (b_2).



- 4) On considère une tornade telle que $U \sim 50$ m/s, $R \sim 300$ m et $f \sim 10^{-4}$ s $^{-1}$ et un cyclone tropical tel que $U \sim 50$ m/s, $R \sim 10^5$ m et $f \sim 2.5 \cdot 10^{-5}$ s $^{-1}$. À quels types d’équilibres correspondent ces écoulements.

Le nombre de Rossby $Ro = V = \frac{U}{fR}$ est tel que $|Ro| = 10^3 \gg 1$ pour la tornade et $|Ro| = 20 > 2$ pour le cyclone. La tornade est clairement un écoulement cyclostrophique, insensible à la force de Coriolis, tandis que le cyclone tropical est un écoulement de type (a_1) ou (b_2). Leur centre correspond toujours à un minimum de pression. Théoriquement, la tornade et le cyclone tropical peuvent être cycloniques ou anticycloniques. Dans la réalité (et dans l’hémisphère Nord), le cas anticyclonique est rarement observé pour les tornades et jamais pour les cyclones tropicaux.

- 5) Les oscillations inertielles sont rares dans l’atmosphère, car le gradient de pression n’est jamais nul, mais fréquentes dans l’océan. Calculer le sens et la période de rotation d’une bouée dérivante soumise à de telles oscillations inertielles. Comparer cette période à la période d’un pendule de Foucault.

Dans l’hémisphère Nord, ces mouvements sont anticycloniques. Comme $\frac{U_\theta^2}{r} + f U_\theta = 0$, on a $U_\theta = -f r$. La période de rotation est donc $T = \left| \frac{2\pi r}{U_\theta} \right| = \frac{2\pi}{f}$. La période du pendule de Foucault est $T_f = \frac{2\pi}{\Omega \sin \phi}$ où Ω est la vitesse de rotation de la terre et ϕ la latitude. Comme $f = 2 \Omega \sin \phi$, on a $T = \frac{1}{2} T_f$.

- 6) On considère des vents typiques $U_\theta \sim 10$ m/s observés aux moyennes latitudes pour $f \sim 10^{-4}$ s $^{-1}$. À partir de quelle échelle R peut-on considérer que la vitesse est presque géostrophique ? Montrer que dans ce cas on peut écrire $U_g/U_\theta = 1 + V$ où U_g est la vitesse géostrophique et $V = \frac{U_\theta}{fR}$ le nombre de Rossby. En déduire une règle pratique permettant de comparer la vitesse réelle et la vitesse géostrophique dans les anticyclones et dépressions de petites tailles. Expliquer pourquoi les vents peuvent être plus intenses dans les dépressions que dans les anticyclones.

La vitesse est géostrophique pour $Ro = |V| = \left| \frac{U_\theta}{fR} \right| \ll 1$, c’est-à-dire $R \gg 10^5$ m = 100 km. C’est le cas des anticyclones (d) et dépressions (b_1) observés aux moyennes latitudes. En utilisant la définition de la vitesse géostrophique, l’équilibre des forces s’écrit $\frac{U_\theta^2}{R} + f U_\theta = f U_g$. On en déduit $\frac{U_g}{U_\theta} = 1 + \frac{U_\theta}{fR} = 1 + V$. Si l’anticyclone ou la dépression sont de petite taille Ro sera grand (moins petit). Comme $U_\theta < 0$ (donc $V < 0$) pour les anticyclones, le vent réel y est plus fort que le vent géostrophique. Comme $U_\theta > 0$ (donc $V > 0$) pour les dépressions, le vent réel y est à l’inverse plus faible. On a vu que l’on doit avoir $\frac{1}{\rho_r} \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq \frac{f^2 |R|}{4}$ pour les anticyclones, alors qu’aucune limitation n’est imposée pour le gradient de pression des dépressions. Ceci explique pourquoi les vents des dépressions sont souvent plus intenses que les vents des anticyclones.

PC3.2 Ondes d'inertie

- 7) Écrire les équations de base dans le cadre de l'approximation de Boussinesq à une latitude où le paramètre de Coriolis est f . Montrer que l'on peut se ramener au cas $s = 0$ si l'entropie est homogène à un instant donné et si $F_e = 0$. Rappeler l'expression de la pression totale.

Les équations sont $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{D}{Dt} \underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \gamma s \underline{k} - f \underline{k} \wedge \underline{U}$ où \underline{k} est le vecteur vertical unitaire. En effet, $\underline{F} = 0$ puisque le fluide est parfait, et, puisque $F_e = 0$, on a $\frac{Ds}{Dt} = 0$. On peut alors choisir l'état homogène observé à un instant particulier pour l'entropie de référence. La pression totale est $P_r + p$.

- 8) Écrire les équations linéarisées autour de l'état de base au repos $p = 0$, $s = 0$ et $\rho = 0$ et en notant \underline{U} la vitesse et \tilde{p} la perturbation de pression.

Les équations linéarisées sont $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \underline{U} + f \underline{k} \wedge \underline{U} + \frac{1}{\rho_r} \nabla \tilde{p} = 0$.

- 9) On cherche des solutions "ondes planes" sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}) e^{i(kx + ly + mz - \omega t)}$. Écrire le système linéaire que doivent vérifier les composantes complexes de cette solution.

En reportant dans les équations linéarisées on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & 0 & ik \\ f & -i\omega & 0 & il \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ ik & il & im & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{p}/\rho_r \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

- 10) Montrer que l'on peut se ramener au cas $l = 0$ sans perte de généralité. En déduire que la relation de dispersion des ondes d'inertie dans le cas général peut s'écrire sous la forme $\omega = f |\sin \theta|$.

Comme le système est invariant par rotation dans un plan horizontal, il suffit de changer les axes de coordonnées pour se ramener au cas $l = 0$. La relation de dispersion est obtenue en annulant le déterminant du système linéaire, ce qui conduit à

$$\begin{vmatrix} -i\omega & -f & 0 & ik \\ f & -i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ ik & 0 & im & 0 \end{vmatrix} = f^2 m^2 - \omega^2 (k^2 + m^2) = 0. \quad (3)$$

On en déduit que la relation de dispersion est, dans le cas général $l \neq 0$, $\omega^2 = f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}$.

- 11) Transformer les équations en $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$ en un système d'équations pour les nouvelles variables $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{w}, \tilde{p})$ avec $\tilde{\zeta} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ et $\tilde{\delta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$. Éliminer \tilde{u} , \tilde{v} et \tilde{p} pour n'obtenir qu'une seule équation en \tilde{w} . Retrouver la relation de dispersion dans le cadre de ce changement de variable.

En combinant les équations d'évolution de \tilde{u} et \tilde{v} , on obtient $\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} + f \tilde{\delta} = 0$ et $\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} - f \tilde{\zeta} + \frac{1}{\rho_r} \nabla_H \tilde{p} = 0$. L'équation d'évolution de la vitesse verticale est $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_r} \tilde{p} = 0$ et l'équation de continuité s'écrit $\tilde{\delta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0$. La relation de dispersion s'obtient donc en annulant le déterminant du nouveau système linéaire en $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{w}, \tilde{p}/\rho_r)$, ce qui conduit à

$$\begin{vmatrix} -i\omega & f & 0 & 0 \\ f & -i\omega & 0 & -k_H^2 \\ 0 & 0 & -i\omega & im \\ 0 & 1 & im & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(k_H^2 + m^2) + f^2 m^2 = 0, \quad (4)$$

avec $k_H^2 = k^2 + l^2$. En éliminant $(\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}, \tilde{p}/\rho_r)$, on obtient l'équation $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla_H \tilde{w} = 0$ et donc la relation de dispersion $(-\omega^2 + f^2)m^2 - \omega^2 k_H^2 = 0$. Les deux approches permettent de retrouver la relation $\omega^2 = f^2 \frac{m^2}{k^2 + l^2 + m^2}$.

- 12) Appliquer l'opérateur rotationnel à l'équation de quantité de mouvement linéarisée pour obtenir l'équation d'évolution de $\nabla \wedge \underline{U}$. En déduire que si l'écoulement est irrotationnel ou stationnaire, la vitesse ne dépend pas de z (théorème de Taylor-Proudman).

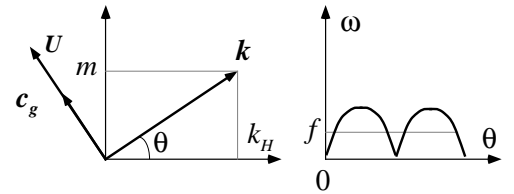
En utilisant $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, on obtient $\nabla \wedge (\underline{k} \wedge \underline{U}) = -\frac{\partial}{\partial z} \underline{U}$. L'équation linéarisée de la vorticité est donc $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \underline{U}) = f \frac{\partial \underline{U}}{\partial z}$. Si le rotationnel est nul ou constant dans le temps on a $\frac{\partial \underline{U}}{\partial z} = \underline{0}$. L'écoulement est donc bidimensionnel.

- 13) Appliquer une nouvelle fois l'opérateur rotationnel pour pouvoir déduire facilement la relation de dispersion.

En utilisant la relation $\nabla \wedge (\nabla \wedge \underline{U}) = -\Delta \underline{U}$ valable lorsque $\nabla \cdot \underline{U} = 0$, on obtient l'équation $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \underline{U} + f^2 \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial z^2} = 0$. On en déduit la relation de dispersion $\omega^2(k^2 + l^2 + m^2) - f^2 m^2 = 0$.

- 14) On note θ l'angle polaire du vecteur \underline{k} . Tracer la pulsation ω en fonction de l'angle θ . Montrer que la vitesse \underline{U} des particule ainsi que la vitesse de groupe appartiennent aux plans de phase.  tudier le cas limite $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(\underline{k}) = f |\sin \theta|$. La pulsation ω croît de 0   f lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. L'incompressibilité $\nabla \cdot \underline{U} = 0$ entraîne $\underline{k} \cdot \underline{U} = 0$, ce qui montre que la vitesse est orthogonale à \underline{k} et appartient donc aux plans de phase. Comme la relation de dispersion ne dépend pas du module de \underline{k} , la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k}) = \text{grad}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k})$ est orthogonale à \underline{k} . Lorsque le vecteur d'onde \underline{k} est vertical, la pulsation est donc égale à f . On retrouve les oscillations inertielles.



PC4 : Circulation générale de l'atmosphère

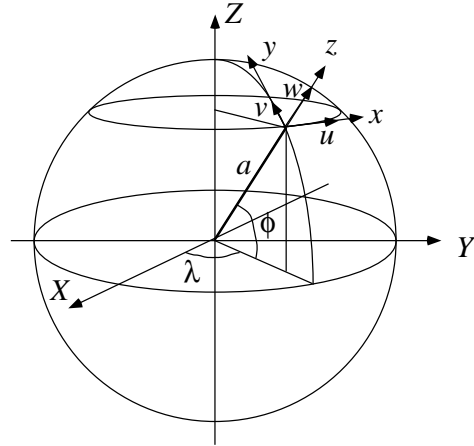
L'objet de cette PC est d'estimer les valeurs numériques des grandeurs qui permettent d'appréhender la circulation générale de l'atmosphère. On étudie ici la cellule de Hadley.

PC4.1 Mouvement d'échelle planétaire

- 1) Écrire les équations du mouvement d'échelle planétaire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, de l'approximation hydrostatique et de l'approximation de couche mince. Expliciter, en particulier, l'expression de la dérivée particulaire en coordonnées sphériques.

Les équations du mouvement d'échelle planétaire s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 &= \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{Du}{Dt} - \text{tg } \phi \frac{uv}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi + F_u \\ \frac{Dv}{Dt} + \text{tg } \phi \frac{u^2}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi + F_v \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho_r \gamma_s \\ \frac{Ds}{Dt} &= \frac{F_e}{T} \end{aligned}$$



- 2) On note $m_a(x, y, z, t)$ le moment cinétique absolu d'une particule fluide par rapport à l'axe de rotation de la terre. Donner l'expression de m_a en fonction de u et ϕ ainsi que son équation de conservation.

Le moment cinétique absolu est $m_a = a \rho_r \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ et son équation de conservation s'écrit $\frac{Dm_a}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} + a \rho_r \cos \phi F_u$.

PC4.2 Cellules de Hadley

Dans ce paragraphe, on suppose que la contrainte d'incompressibilité $\text{div } \underline{U}$ est remplacée par la contrainte $\text{div } (\rho \underline{U})$ où la masse volumique ρ peut varier. Cet abandon de l'approximation d'incompressibilité est nécessaire pour calculer étudier le débit massique $\rho \underline{U}$ en couplant la basse et la haute atmosphère. On dit alors que l'approximation de Boussinesq est remplacée par l'approximation "anélastique".

- 3) La figure 1 représente la fonction de courant φ du débit massique méridien pour les mois d'hiver (boréal). L'unité des iso- φ est égale à 10^{10} kg/s. Les latitudes sont graduées de 80° S à 80° N avec un intervalle de 10° . La verticale est représentée à l'aide des coordonnées pression graduées avec un intervalle de 200 HPa. À partir de la lecture de ce graphique, estimer grossièrement le temps que met une particule d'air de la cellule de Hadley pour faire un tour complet. On supposera que la température est de 300° K à 1000 HPa au sol et 225° K à 200 HPa au sommet de la troposphère afin de calculer la densité de l'air, que l'on supposera sec, par l'intermédiaire de la loi d'état ($R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$). On pourra considérer une particule animée d'un mouvement vertical à 10° S et 20° N et horizontal aux niveaux 1000 HPa et 200 HPa.

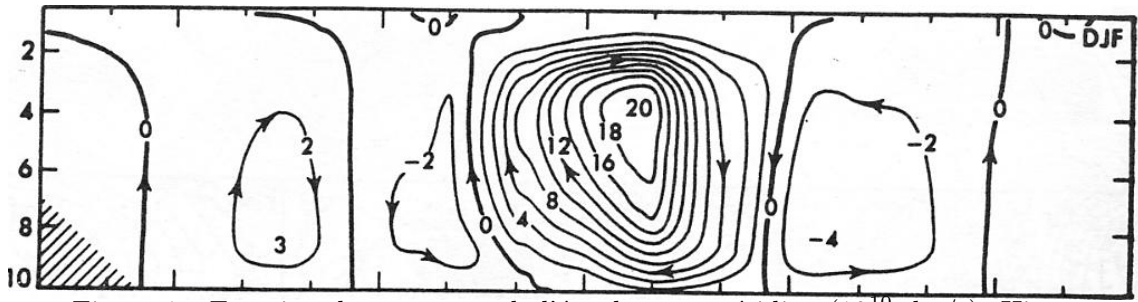


Figure 1 : Fonction de courant ϕ de l'écoulement méridien (10^{10} kg/s). Hiver.

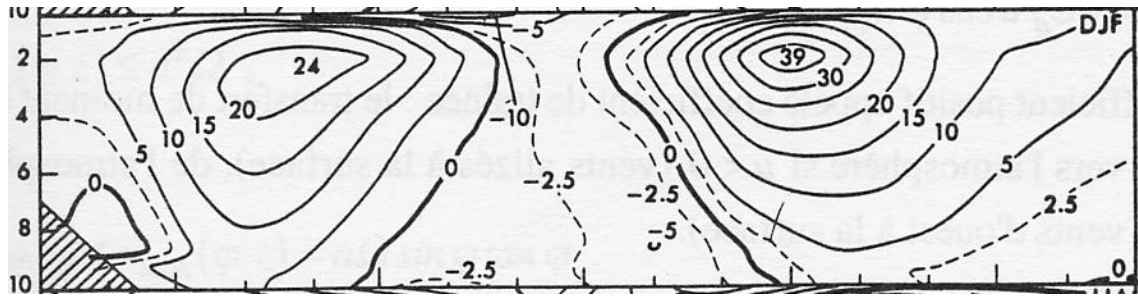


Figure 2 : Moyenne zonale de la vitesse du vent u (5 m/s). Hiver.

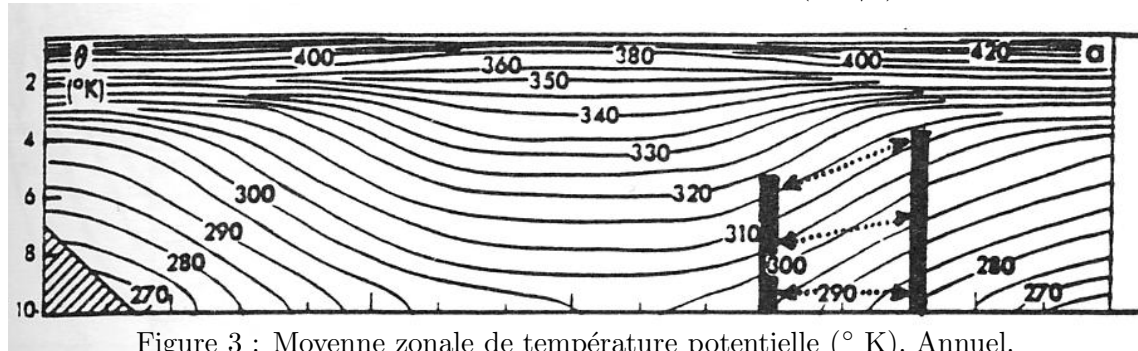


Figure 3 : Moyenne zonale de température potentielle ($^{\circ}$ K). Annuel.

$\frac{m_a}{a\rho}$ (m/s)	-5 m/s	0 m/s	5 m/s	10 m/s	15 m/s	20 m/s	25 m/s	30 m/s
0°	462	467	472	477	482	487	492	497
10°	448	452	457	462	467	472	477	482
20°	407	412	417	421	426	431	435	440
30°	346	350	354	359	363	367	372	376
40°	270	274	278	281	285	289	293	297

Table 1 : Abaque pour la fonction $\frac{m_a}{a\rho} = \cos \phi(u + \Omega a \cos \phi)$.

u_0	ϕ_0	ϕ_0	ϕ_0	ϕ_0
ϕ_1				
ϕ_1				
ϕ_1				
ϕ_1				

0	0°	10°	20°	30°
0°	0	-14	-55	-117
10°	14	0	-41	-104
20°	58	43	0	-66
30°	135	118	72	0

20	0°	10°	20°	30°
0°	20	6	-36	-99
10°	35	20	-22	-87
20°	79	64	20	-48
30°	158	141	93	20

Table 2 : Abaques pour la fonction $u_1 = u_0 \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} + \Omega a \left(\frac{\cos^2 \phi_0}{\cos \phi_1} - \cos \phi_1 \right)$.

La fonction de courant φ correspond à des débits intégrés sur des cercles de latitude de rayon $a \cos \phi$. Sur la figure 1, on observe qu'un écart de $\Delta\varphi$ de la fonction de courant du débit méridien sur une longueur ΔL correspond donc à une vitesse V déterminée par l'équation $2\pi a \cos \phi \rho V = \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}$, donc $V = \frac{1}{2\pi a \cos \phi \rho} \frac{\Delta\varphi}{\Delta L}$. Un écart de $\Delta\varphi \sim 10 \times 10^{10}$ kg/s correspond à un écart de $\Delta\phi = 10^\circ$, donc $\Delta Y \sim 10^6$ m, à 10° S et 20° N, et à un écart de $\Delta Z \sim 10^3$ m au sol ou au sommet de la troposphère. Comme la hauteur de la troposphère est environ 10 km et la distance entre 20° N et 10° S est environ 3000 km, on obtient les valeurs des vitesses verticales w ou horizontales v ainsi que les temps de transfert τ qui sont résumées dans le tableau ci-dessous. Le temps moyen total mis par une particule pour faire un cycle complet est alors de 33 jours.

$P = 200$ HPa $T = 225$ K $\rho = 0.3$ kg/m ³	↑ $w = 0.01$ m/s $\tau = 5$ j	→ $v = 10$ m/s $\tau = 3$ j	$w = -0.01$ m/s ↓ $\tau = 5$ j
$P = 1000$ HPa $T = 300$ K $\rho = 1.2$ kg/m ³	↑ $w = 0.003$ m/s $\tau = 15$ j	$v = -3$ m/s $\tau = 10$ j ←	$w = -0.003$ m/s ↓ $\tau = 15$ j
Total : 33 j	10° S	10° S à 20° N	20° N

4) Pour décrire les cellules de Hadley, on suppose que l'écoulement est stationnaire et indépendant de la longitude λ . On suppose que la masse volumique $\rho(z)$ ne dépend que de l'altitude. On note alors $m_a = a \rho \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ le moment cinétique d'une particule qui reste à une altitude constante et Δm_a la différence de moment cinétique entre deux positions de sa trajectoire. Justifier sans calculs la relation $\Delta m_a = \overline{M_u} \tau$ où τ est le temps qu'a mis la particule pour passer d'une position à l'autre et $\overline{M_u}$ est la valeur moyenne le long de ce parcours du moment $M_u = a \rho \cos \phi F_u$ de la force de frottement.

Puisque ρ reste constant, il suffit de remplacer ρ_r par ρ dans les équations du mouvement d'échelle planétaire initialement écrites dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. En intégrant l'équation, on obtient alors $\frac{Dm_a}{Dt} = M_u$ puisque $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$. En définissant $\overline{M_u} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau M_u dt$, on obtient le résultat indiqué.

5) À partir de la figure 2 qui représente la moyenne zonale du vent u en hiver estimer grossièrement le frottement moyen $\overline{M_u}$ le long de la trajectoire supérieure (10° S \rightarrow 20° N , 200 HPa) et la trajectoire inférieure (20° N \rightarrow 10° S , 1 000 HPa). On pourra utiliser la table 1 pour ce calcul.

En notant S la latitude 10° S et N la latitude 20° N, H le niveau 200 HPa et B le niveau 1000 HPa, on peut lire sur la figure que $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ m/s. On en déduit la valeur de m_a pour ces quatre régions et donc $\frac{\Delta m_a}{a\rho}$ qui vaut $431 - 452 = -21$ m/s pour la branche haute de la cellule de Hadley et $452 - 412 = 40$ m/s pour la branche basse. Pour l'estimation du frottement moyen, on peut négliger les vitesses négatives de faible intensité dans la région équatoriale. On peut donc considérer que u est toujours positif, ce qui entraîne que M_u est toujours négatif. On en déduit $\overline{M_u} = -\frac{|\Delta m_a|}{\tau}$. Le tableau ci-dessous ($a = 6,3$ km) indique les valeurs numériques du moment moyen de cette force de frottement.

(H) $P = 200$ HPa $\rho = 0.3$ kg/m ³	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a\rho} = 452$ m/s	→ $\tau = 3$ j $\overline{M_u} = -500$ N/ m ²	$u = 20$ m/s $\frac{m_a}{a\rho} = 431$ m/s
(B) $P = 1000$ HPa $\rho = 1.2$ kg/m ³	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a\rho} = 452$ m/s	$\tau = 10$ j $\overline{M_u} = -200$ N/ m ² ←	$u = 0$ m/s $\frac{m_a}{a\rho} = 412$ m/s
	10° S	10° S à 20° N	20° N

6) Comparer les valeurs de u observées dans la cellule de Hadley avec celles que l'on obtiendrait si l'on faisait disparaître soudainement les forces de frottement ainsi que le forçage (thermique). On pourra utiliser la table 2 pour ce calcul.

En l'absence de frottement, l'équation de conservation $\frac{Dm_a}{Dt} = 0$ implique que m_a est constant le long d'une trajectoire. La relation $u_1 = u_0 \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} + \Omega a \left(\frac{\cos^2 \phi_0}{\cos \phi_1} - \cos \phi_1 \right)$ permet donc de calculer la vitesse u_1 à la latitude ϕ_1 connaissant la vitesse u_0 à la latitude ϕ_0 . En utilisant la table 2, on voit que les quatre vitesses seraient $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 43 \\ -41 & 43 \end{pmatrix}$ m/s au lieu des valeurs $\begin{pmatrix} u_{SH} & u_{NH} \\ u_{SB} & u_{NB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ m/s observées. La vitesse est donc freinée de 41 m/s près du sol et de 23 m/s près de la tropopause.

- 7) Est-il normal de trouver un frottement du même ordre de grandeur à la tropopause qu'à la troposphère ? En déduire une critique des hypothèses d'écoulement stationnaire et zonal et invoquer un mécanisme susceptible d'extraire de la quantité de mouvement à la partie haute de la cellule de Hadley.

On pourrait, à juste titre, supposer que le frottement turbulent de la cellule de Hadley sur la tropopause est négligeable devant le frottement sur le sol. Ce sont en fait les fluctuations temporelles et spatiales (en fonction de la longitude) qui sont responsables de l'extraction de moment cinétique dans la partie haute de la cellule de Hadley. Le moment cinétique ainsi perdu se retrouve aux moyennes et hautes latitudes. Les hypothèses d'écoulement stationnaire et zonal ne sont donc pas valides, sauf si on s'intéresse aux moyennes temporelles et zonales. Dans ce cas, il faut prendre en compte la moyenne des termes non linéaires dans les équations moyennées, ce qui introduit de nouveaux termes de flux. On appelle "flux d'Eliassen-Palm" le flux de moment cinétique obtenu après cette prise de moyenne.

PC4.3 Jet d'ouest aux moyennes latitudes

- 8) À partir du système d'équations dans le cadre des approximations hydrostatique, de Boussinesq et de couche mince, écrire la relation de l'équilibre géostrophique. On supposera que le frottement est négligeable et que l'écoulement est indépendant de la longitude λ . En examinant la figure 4, commenter la validité de ces hypothèses et de cet équilibre aux moyennes latitudes.

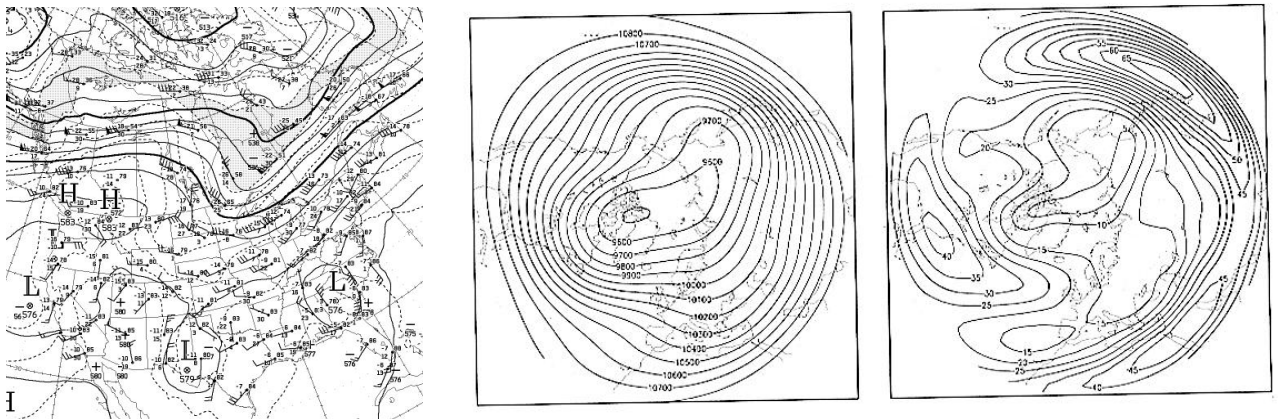


Figure 4 : a) Écoulement au niveau 500 HPa. — isobare, - - - isotherme, $\leftarrow\rightarrow$ vecteur vitesse
Écoulement au niveau 250 HPa : b) géopotential (m) et c) module de la vitesse (m/s).

La relation géostrophique la plus générale s'écrit $\text{tg } \phi \frac{u v}{a} = -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi$ et $-\text{tg } \phi \frac{u^2}{a} = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi$. En supposant qu'il n'y a pas de dépendance avec λ , on obtient que $v = 0$ et $-\text{tg } \phi \frac{u^2}{a} + 2 \Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi}$. La Figure 4a) montre que le vecteur champ de vitesse suit bien les isohypses (iso-géopotential) à 500 HPa qui ont une forme très voisine des isobares à altitude constante (environ 5000 m). Les figure 4b et 4c (250 HPa) montrent que l'intensité de la vitesse augmente lorsque les isohypses (iso-géopotential) se resserrent. Cependant, on voit que l'hypothèse de zonalité de l'écoulement n'est pas bien vérifiée.

- 9) Estimer le rapport entre le terme de sphéricité $\text{tg } \phi \frac{u^2}{a}$ et le terme de Coriolis $2\Omega u \sin \phi$. En déduire que l'on peut négliger le terme de sphéricité pour un raisonnement qualitatif et semi-quantitatif.

La rapport du premier terme sur le second est $\frac{u}{2\Omega a \cos \phi}$ qui est de l'ordre de 10^{-1} . On peut donc négliger le terme de sphéricité pour une estimation grossière de la circulation.

- 10) On suppose que l'écoulement est zonal et géostrophique aux moyennes latitudes. Écrire la relation du vent thermique dans le cadre de ces hypothèses. À partir de l'examen de la figure 3, donner alors une estimation du profil de vent $u(z)$ aux moyennes latitudes que l'on centrera à 40° N. Comparer avec le profil de vitesse de la figure 2.

En négligeant le terme de sphéricité, l'équilibre géostrophique s'écrit $v = 0$ et $2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{a\rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi}$. En dérivant cette relation par rapport à z , on obtient la relation du vent thermique $2\Omega \sin \phi \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{a\rho_r} \gamma \frac{\partial s}{\partial \phi}$. Comme $S = C_p \text{Ln } \theta$ et $\gamma = \frac{g}{C_p}$, on obtient finalement $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$. En notant localement $dy = a d\phi$, on obtient la relation $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g}{2\Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$. On voit sur la figure 3 qu'une distance $\Delta L \sim 2\,000$ km entre 30° N et 50° N correspond à un écart $\Delta\theta \sim 10^\circ$ K. On en déduit la valeur $\Lambda = \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ que l'on considère comme constante dans la troposphère. Comme la vitesse est nulle au sol, le modèle conduit à un profil linéaire $u(z) = \Lambda z$. Au sommet de la troposphère la vitesse u de ce profil est égale à 20 m/s, ce qui est conforme aux observations de la figure 2.

PC5 : Classification des ondes barotropes dans un β -plan

L'objet de cette PC est d'effectuer une classification des ondes obtenues dans le cadre du modèle de Saint-Venant et de l'approximation du β -plan. Les cas $\beta = 0$ (f_0 -plan) et $f_0 = 0$ (ondes équatoriales) sont des cas particuliers de cette étude. Dans le cas général (f_0, β) quelconque, on montre que seules les ondes de Rossby subsistent lorsque l'on passe du modèle de Saint-Venant au modèle quasi-géostrophique. Les autres ondes sont "filtrées" par cette approximation, comme le sont les ondes sonores dans l'approximation incompressible ou l'approximation de Boussinesq.

PC5.1 Modèle de Saint-Venant sur un β -plan

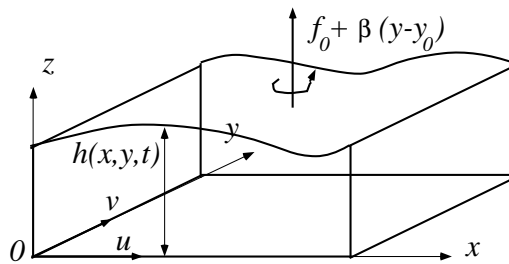


Figure 1: Écoulement à surface libre dans un β -plan.

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant dans le cas où le paramètre de Coriolis $f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$ est celui d'un " β -plan" et où le fond est horizontal ($h_{inf} = 0$). On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $h(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre. Linéariser ensuite ces équations autour de l'état de base $(u, v, h) = (0, 0, h_r)$ où h_r est une hauteur constante. On notera $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ les perturbations autour de cet état de base.

Les équations de Saint-Venant de l'approximation du β -plan [$f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$] s'écrivent

$$\frac{Du}{Dt} - f(y)v = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{Dv}{Dt} + f(y)u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{Dh}{Dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0.$$

On en déduit les équations linéarisées qui s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f(y)\tilde{v} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f(y)\tilde{u} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0.$$

On cherche une classification des ondes qui se propagent sans amplification ni amortissement dans la direction x . On s'intéresse alors aux solutions bornées ou non bornées dans la direction y . Ces dernières ne sont valides que sur un sous-ensemble des $y \in \mathbb{R}$ et doivent donc être raccordées à des conditions aux limites ou à d'autres solutions situées en-dehors du domaine de validité de l'approximation du β -plan.

- 2) Justifier la recherche de solutions sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{h}(y)]e^{i(kx - \omega t)}$ et écrire le système linéaire d'équations différentielles ordinaires que doivent satisfaire les fonctions \hat{u} , \hat{v} et \hat{h} . Éliminer \hat{u} et \hat{h} pour n'obtenir qu'une équation différentielle ordinaire pour \hat{v} . On notera $c^2 = gh_r$.

Le système est invariant par translation en x et t mais pas en y . Les solutions de base ont donc la forme recherchée dans la mesure où elles doivent être propagatives dans la direction x . Le système s'écrit alors

$$-i\omega \hat{u} - f(y) \hat{v} = -ik g\hat{h}, \quad -i\omega \hat{v} + f(y) \hat{u} = -g \frac{d\hat{h}}{dy} \quad \text{et} \quad -i\omega \hat{h} + h_r ik \hat{u} + h_r \frac{d\hat{v}}{dy} = 0.$$

L'élimination de \hat{u} s'écrit $\omega \hat{u} = [i f(y) \hat{v} + k g\hat{h}]$. Celle de \hat{h} entraîne

$$(\omega^2 - k^2 c^2) g\hat{h} = -i c^2 \omega \frac{d\hat{v}}{dy} + i c^2 k f(y) \hat{v} \quad \text{et} \quad \omega (\omega^2 - k^2 c^2) \hat{u} = i\omega \left(f \omega \hat{v} - c^2 k \frac{d\hat{v}}{dy} \right).$$

On en déduit alors la relation $\omega^2 \left\{ -\frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} + \left[\left(\frac{k\beta}{\omega} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{f^2(y)}{c^2} \right] \hat{v} \right\} = 0$.

- 3) On s'intéresse au cas $\omega = 0$. Exprimer les solutions stationnaires $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ dans le cas où $f(y)$ n'est pas nul. Quel nom donner à ces équilibres ?

Les équilibres géostrophiques s'écrivent $\tilde{u}(x, y) = -\frac{g}{f(y)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(x, y)$ et $\tilde{v}(x, y) = \frac{g}{f(y)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}(x, y)$ où $\tilde{h}(x, y)$ est une fonction quelconque.

- 4) On s'intéresse au cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y) = 0$. Montrer que l'on obtient des solutions non triviales si et seulement si $\omega^2 = c^2 k^2$. Exprimer dans ce cas les fonctions $\hat{u}(y)$ et $\hat{h}(y)$. On appelle "ondes de Kelvin" ces solutions.

Dans le cas $\hat{v}(y) = 0$, les équations deviennent

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega} k g\hat{h}, \quad 0 = -i f(y) k g\hat{h} - i\omega \frac{d(g\hat{h})}{dy} \quad \text{et} \quad (\omega^2 - k^2 c^2) g\hat{h} = 0.$$

On a donc $\omega^2 = k^2 c^2$ et $g\hat{h}(y) = gh_* e^{-\frac{k}{\omega} [f_0 (y-y_0) + \frac{1}{2}\beta (y-y_0)^2]}$ où gh_* est l'amplitude arbitraire de l'onde. On obtient donc deux familles d'ondes de Kelvin $\omega = \pm kc$ avec $g\hat{h}_{\pm}(y) = gh_* e^{\mp \frac{k}{c} [f_0 (y-y_0) + \frac{1}{2}\beta (y-y_0)^2]}$ et $\hat{u}(y) = \pm \frac{1}{c} g\hat{h}_{\pm}(y)$.

- 5) On s'intéresse au cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y)$ non identiquement nul. Montrer que les solutions $\hat{v}(y)$ sont alors des modes propres (bornées ou non) de l'opérateur $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dy^2} + \frac{f^2(y)}{c^2}$. Quel est la dimension de l'espace vectoriel des solutions $\hat{v}(y)$ associées à une valeur propre de \mathcal{L} ? En notant χ les valeurs propres (plus exactement les valeurs du spectre), exprimer la relation de dispersion $\chi = Q(k, \omega)$ que l'on doit imposer pour trouver des solutions. En supposant le profil de vitesse $\hat{v}(y)$ connu, exprimer les fonctions $\hat{u}(y)$ et $\hat{h}(y)$ en excluant les couples (ω, k) tels que $\omega^2 = k^2 c^2$ et dont l'étude a déjà été traitée (ondes de Kelvin).

La relation de dispersion s'écrit $\chi = Q(k, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}$. Pour une valeur de χ donnée, il existe deux ondes bornées ou non bornées en y . En supposant que $\hat{v}(y)$ est le profil d'une telle onde et $\omega^2 - k^2 c^2 \neq 0$, on a $g\hat{h}(y) = \frac{ic^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \left[-\omega \frac{d\hat{v}}{dy} + k f(y) \hat{v} \right]$ et $\hat{u}(y) = i \frac{f(y)}{\omega} \hat{v}(y) + \frac{k}{\omega} g\hat{h}(y)$.

PC5.2 Étude de la fonction $\chi = Q(k, \omega)$

- 6) Remarquer que $\chi = Q(k, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \left(\frac{\omega}{c} + k + \frac{\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{c} - k \right) - \frac{\beta}{c} = \left(\frac{\omega}{c} - k - \frac{\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{c} + k \right) + \frac{\beta}{c}$. En déduire l'équation et le tracé des courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ puis des courbes $\chi = \frac{\beta}{c}$. En déduire que le point $(k, \omega) = \left(-\sqrt{\frac{\beta}{2c}}, \sqrt{\frac{\beta c}{2}} \right)$ est un point selle de la fonction $Q(k, \omega)$ avec $\chi = \frac{\beta}{c}$. Tracer le lieu des points (k, ω) pour lesquels les iso- χ sont parallèles à l'un des axes. Déduire de cette étude un

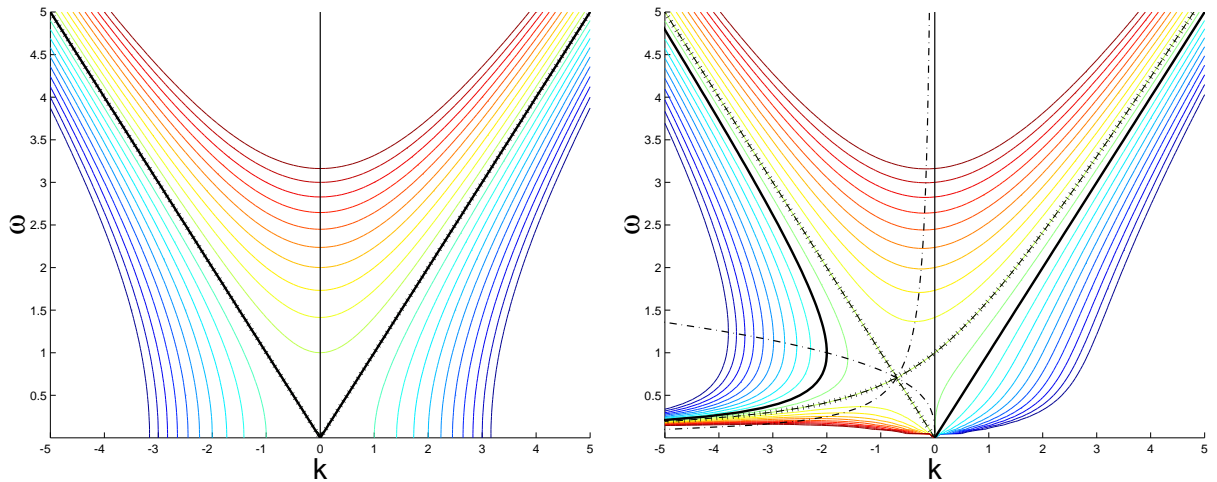


Figure 2: Isovaleurs $\chi = Q(k, \omega)$. a) cas $\beta = 0$. b) cas général avec un intervalle de $\frac{\beta}{c}$ entre les contours. (—) : courbe $\chi = -\frac{\beta}{c}$, (- - -) : courbe $\chi = \frac{\beta}{c}$. (---) : courbes $\frac{\partial Q}{\partial k} = 0$ ou $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = 0$.

tracé approximatif des courbes iso- χ .

Les courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ sont définies par $\left(\frac{\omega}{c} + k + \frac{\beta}{\omega}\right) \left(\frac{\omega}{c} - k\right) = 0$. Il s'agit donc de la droite $\omega = kc$ et de l'hyperbole $k = -\frac{\omega}{c} - \frac{\beta}{\omega}$. Les courbes $\chi = \frac{\beta}{c}$ sont définies par $\left(\frac{\omega}{c} - k - \frac{\beta}{\omega}\right) \left(\frac{\omega}{c} + k\right) = 0$. Il s'agit donc de la droite $\omega = -kc$ et de l'hyperbole $k = \frac{\omega}{c} - \frac{\beta}{\omega}$. Cette droite et cette hyperbole se coupent en un point qui vérifie automatiquement $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{\partial Q}{\partial k} = 0$. Il s'agit donc d'un point selle. La courbe $\frac{\partial Q}{\partial k} = -2k - \frac{\beta}{\omega} = 0$ c'est-à-dire l'hyperbole $\omega = -\frac{\beta}{2k}$ définit le lieu des points où les iso- χ sont parallèles à l'axe des k . La courbe $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = \frac{2\omega}{c^2} + \frac{k\beta}{\omega^2} = 0$, c'est-à-dire la cubique $k = -\frac{2\omega^3}{\beta c^2}$, définit le lieu des points où les iso- χ sont parallèles à l'axe des ω . La figure (b) représente les iso- χ pour des valeurs espacées d'un intervalle $\frac{\beta}{c}$.

7) Tracer les iso- χ dans le cas $\beta = 0$. En déduire comment se modifient les iso- χ lorsque $\beta \rightarrow 0$.

Pour $\beta = 0$, la relation de dispersion s'écrit $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$. Les iso- χ sont donc des hyperboles avec comme asymptotes les droites d'équations $\omega = \pm kc$. Dans la limite $\beta \rightarrow 0$, les courbes $\chi = -\frac{\beta}{c}$ et $\chi = \frac{\beta}{c}$ tendent vers ces asymptotes.

PC5.3 Ondes dans le f_0 -plan

On suppose ici que $\beta = 0$. On a donc $f(y) = f_0$.

8) Dans le cas $\omega = 0$, on obtient les équilibres géostrophiques caractérisés par un champ $h(x, y)$ arbitraire. Montrer que les trajectoires suivent les courbes iso- h .

On a $u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{f_0} h(x, y) \right]$ et $v(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{f_0} h(x, y) \right]$. La fonction $\frac{1}{f_0} h(x, y)$ est donc une fonction de courant du champ de vitesse. Les trajectoires suivent donc les iso- h .

9) Dans le cas $\omega \neq 0$ et $\hat{v}(y) = 0$, montrer que les ondes de Kelvin, qui vérifient la relation de dispersion $\omega = kc$, ne sont pas bornées. Montrer que dans un canal ou dans l'océan, ces ondes peuvent se propager le long d'une paroi ou d'une côte rectiligne de direction quelconque. On parle alors d'ondes de "Kelvin de bord". Tracer schématiquement les champs de vitesse et de hauteur de la surface libre.

Les deux familles d'ondes de Kelvin de relations de dispersion $\omega = \pm k c$ vérifient $g\hat{h}_{\pm}(y) = gh(0) e^{\mp \frac{f_0}{c}(y-y_0)}$ et $\hat{u} = \pm \frac{1}{c} g\hat{h}_{\pm}(y)$. Ces profils croissent donc exponentiellement dans une direction parallèle à l'axe des y . La nullité de $\hat{v}(y)$ rend ces ondes compatibles avec une condition aux limites cinématique $v = 0$ le long d'une paroi parallèle à l'axe des x . Comme le f_0 -plan est isotrope, cette côte rectiligne peut être orientée dans n'importe quelle direction.

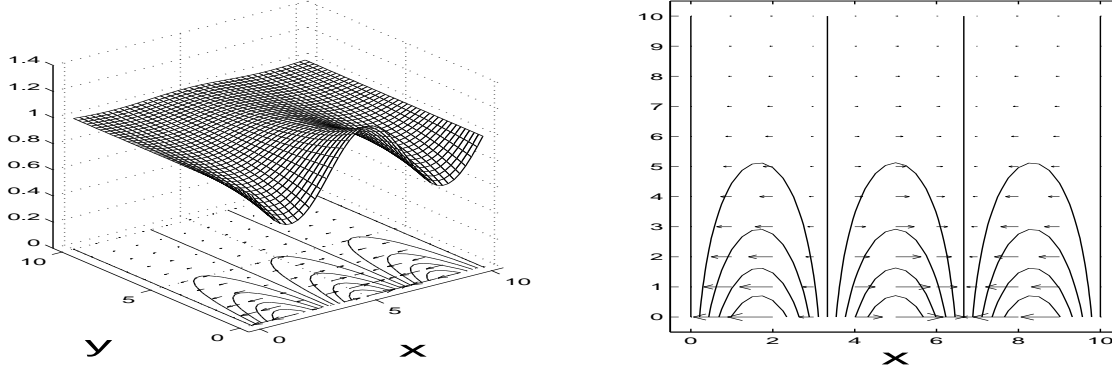


Figure 3: Onde de Kelvin de bord. Hauteur \tilde{h} et champ de vitesse \underline{U}_H pour $\omega/f_0 = 2.25$

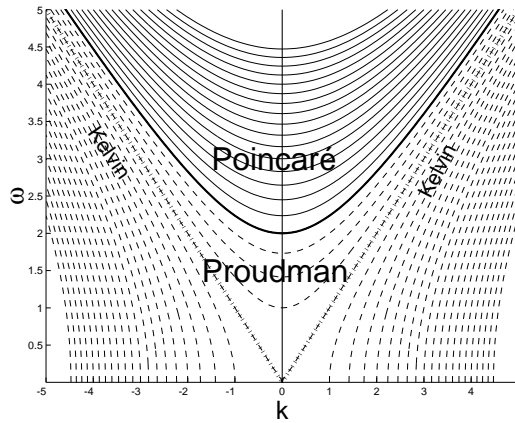


Figure 4: Relation de dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ des ondes de Poincaré et $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$ des ondes de Proudman. (- -) Relation de dispersion $\omega^2 = k^2 c^2$ des ondes de Kelvin de bord.

- 10) Dans le cas où $\hat{v}(y)$ n'est pas identiquement nul, montrer que l'on a $\hat{v}(y) = v_* e^{il y}$ pour $\chi \geq \frac{f_0^2}{c^2}$ et $\hat{v}(y) = v_* e^{\alpha y}$ pour $\chi \leq \frac{f_0^2}{c^2}$. En déduire les relations de dispersion des ondes de Poincaré $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ et des ondes de Proudman $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$.

Le problème aux valeurs propres $\mathcal{L} \hat{v} = \chi \hat{v}$ s'écrit, pour le présent cas du f_0 -plan, $-\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{c^2} \hat{v} = \chi \hat{v}$. On note alors l^2 ou $-\alpha^2$ le paramètre $\chi - \frac{f_0^2}{c^2}$ suivant son signe. Les ondes de Poincaré obéissent à la relation dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ et vérifient $\hat{v}(y) = v_* e^{il y}$. Le problème est alors isotrope et on peut choisir les axes de telle sorte que $l = 0$. Dans ce cas $g\hat{h} = i \frac{c_0^2 k}{f_0} \hat{v}$ et $\hat{u} = i \frac{\omega}{f_0} \hat{v}$. Les ondes de Proudman obéissent à la relation de dispersion $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \alpha^2)$.

PC5.4 Ondes bornées du β -plan

On revient ici au cas général $f(y) = f_0 + \beta(y - y_0)$ du β -plan et l'on cherche les solutions bornées pour $y \in \mathbb{R}$. Les profils de ces solutions permettent de donner une idée de la structure spatiale de l'ensemble des solutions, en particulier pour les ondes "d'inertie-gravité" et de "Rossby" de petites longueurs d'ondes.

- 11) On considère l'opérateur $\mathcal{H}_a = -\frac{d^2}{dy^2} + V_a(y)$ avec $V_a(y) = a^2 (y - y_e)^2$ où y_e est une constante. Trouver l'ensemble des valeurs propres λ_n et des fonctions propres $\psi_n(y)$ cet opérateur dans $L^2(\mathbb{R})$. On supposera connu le fait que les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dY^2} + Y^2$ sont les entiers impairs $\Lambda_n = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$ et que les fonctions propres s'écrivent $\Psi_n(Y) = H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}}$ où $H_n(Y) = (-1)^n e^{Y^2} \frac{d^n}{dY^n} (e^{-Y^2})$ sont les polynômes d'Hermite $H_0(Y) = 1$, $H_1(Y) = 2Y$, $H_2(Y) = 4Y^2 - 2$, etc. Formuler une analogie avec la mécanique quantique.

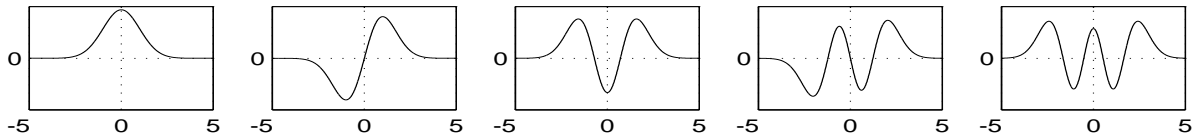


Figure 5: Tracé des premières fonctions propres normalisées $H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}} / (2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}$.

On sait que $\mathcal{H}\Psi_n(Y) = \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n(Y) = (2n + 1) \Psi_n(Y)$. En posant $Y = \sqrt{a} (y - y_e)$ et $\psi_n(y) = \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)]$ on peut écrire $\mathcal{H}_a \psi_n(y) = \left[-\frac{d^2}{dy^2} + a^2(y - y_e)^2\right] \psi_n(y) = a \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)] = a \Lambda_n \Psi_n[\sqrt{a} (y - y_e)] = a \Lambda_n \psi_n(y)$. On en déduit donc que $\lambda_n = a (2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\psi_n(y) = H_n[\sqrt{a} (y - y_e)]e^{-\frac{a(y - y_e)^2}{2}}$. On peut voir \mathcal{H}_a comme le Hamiltonien de l'équation de Schrodinger associée au potentiel harmonique $V_a(y) = a^2 (y - y_e)^2$. Les valeurs propres $\lambda_n = a (2n + 1)$ sont alors les niveaux d'énergie associés à ce potentiel, et les fonctions propres $\psi_n(y)$ sont les densités de probabilité de la particule piégée dans le potentiel pour ces différents états quantiques.

- 12) En déduire que les profils $\hat{v}(y)$ non triviaux et bornés des ondes du β -plan sont obtenus pour $\chi = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Tracer les iso- χ correspondants.

Il suffit de remarquer que l'équation pour \hat{v} s'écrit $\mathcal{H}_a \hat{v} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}\right) \hat{v}$ avec $a = \frac{\beta}{c}$ et $y_e = y_0 - \frac{f_0}{\beta}$. Les solutions sont alors $\hat{v} = 0$ ou $\hat{v} = v_* \psi_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}}\right) = v_* H_n \left[\sqrt{\frac{\beta}{c}} (y - y_e)\right] e^{-\frac{\beta(y - y_e)^2}{2c}}$ avec v_* arbitraire pour les valeurs de (ω, k) vérifiant $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec n entier.

- 13) On pose $l^2 = \chi - \frac{f_0^2}{c^2}$ avec $\chi = (2n + 1)\frac{\beta}{c}$ et on s'intéresse au cas où n , donc l , est grand. Montrer que la relation de dispersion se décompose alors en une relation $\omega \sim \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{c^2}}$ avec $\omega \ll 1$ (ondes de Rossby) et une relation $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ avec $\omega \gg 1$ (ondes d'inertie-gravité). Montrer que pour l grand, les ondes de Rossby et d'inertie-gravité vérifient $\hat{v}(y) \sim v_* e^{i l y}$. Tracer schématiquement les trajectoires, le champ de vitesse et la hauteur de la surface libre pour les ondes de Rossby.

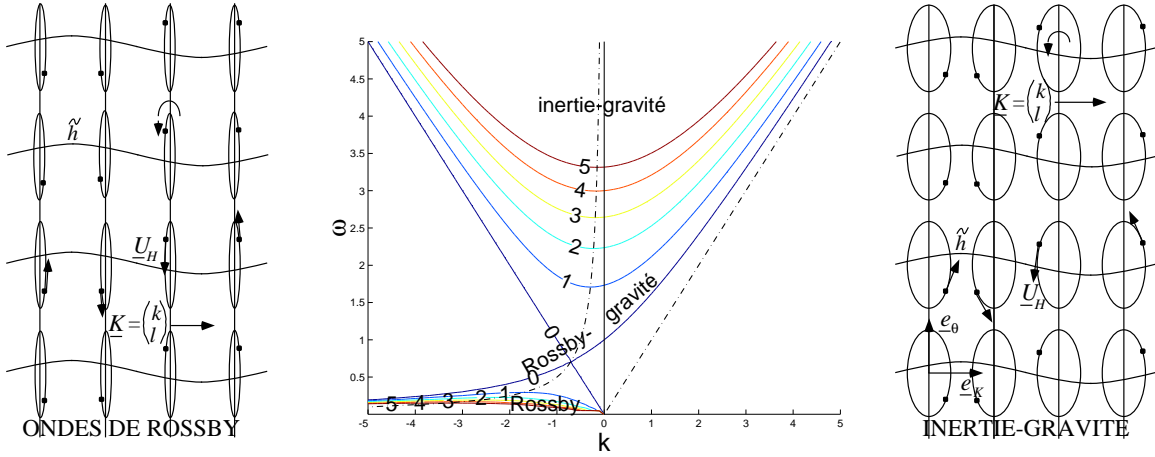


Figure 6: Ondes aux profils $\tilde{v}(y)$ non triviaux et bornés. (b) Relation de dispersion pour $\chi = \frac{\beta}{c}(2n+1)$ avec $n \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Cas limites n grand : (a) Ondes de Rossby ω petit. (c) Ondes d'inertie gravité ω grand.

La relation de dispersion s'écrit $\chi = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{f_0^2}{c^2} + l^2$. Pour les ondes d'inertie-gravité (ω grand), les solutions s'écrivent $\omega^2 \sim f_0^2 + c^2(k^2 + l^2)$ et $\omega \sim \frac{-\beta k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{c^2}}$. Tant que l^2 est grand devant $\frac{f_0^2}{c^2}$, le profil \hat{v} vérifie la relation $-\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} \sim l^2\hat{v}$ et donc $\hat{v}(y) \sim v_* e^{i l y}$ avec $l \in \mathbb{R}$. Pour les ondes de Rossby (ω petit), on a $\hat{v} \sim i \frac{k}{f(y)} g \hat{h}$ et $\hat{u} \sim -\frac{1}{f(y)} g \frac{d\hat{h}}{dy} \sim -i \frac{l}{f(y)} g \hat{h}$. Le champ de vitesse est donc presque parallèle aux lignes de phase, et donc "quasi-géostrophique".

PC6 : Instabilité barocline aux moyennes latitudes

L'objet de cette PC est d'estimer les valeurs numériques des grandeurs qui permettent d'appréhender la circulation générale de l'atmosphère. On étudie ici les instabilités barocline aux moyennes latitudes.

PC6.1 Instabilité barocline et problème d'Eady

On s'intéresse aux perturbations de l'équilibre géostrophique au niveau du jet d'Ouest. On se place alors dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique en supposant que le paramètre de Coriolis $f = f_0$ et la fréquence de Brunt-Vaisala $\bar{N} = N_0$ sont des constantes.

- 1) Écrire les équations exprimant l'évolution de la vorticité potentielle quasi-géostrophique tridimensionnelle $\eta_{qg}/N_0^2 = f_0 + \nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$ ainsi que la valeur de la vitesse verticale w . La fonction $\psi(x, y, z, t)$ désigne la fonction de courant dont découle la vitesse géostrophique $(u_g, v_g) = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$.

Les équations du modèle quasi-géostrophique 3D entraînent que $\left(\frac{D}{Dt} \right)_g \left[f_0 + \nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0$ et $w = -\frac{f_0^2}{N_0^2} \left(\frac{D}{Dt} \right)_g \frac{\partial \psi}{\partial z}$ avec $\left(\frac{D}{Dt} \right)_g = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$.

On s'intéresse au temps de croissance des instabilités baroclines qui vont venir déstabiliser l'écoulement simplifié $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\Lambda z, 0, 0)$ qui modélise le jet d'Ouest, en équilibre avec le gradient zonal d'entropie $\frac{\partial \bar{s}}{\partial y}$. On rappelle que la linéarisation du modèle d'Eady entraîne $c^2 - \Lambda H c - \frac{\Lambda^2}{\alpha^2} [1 - \alpha H \coth(\alpha H)] = 0$.

- 2) En utilisant les résultats du modèle d'Eady, montrer que le taux de croissance d'une onde barocline de longueur d'onde $L = 2\pi/k$ est relié à la partie imaginaire de $c = c_r + i c_i$ solution de l'équation $\left(\frac{\alpha c}{\Lambda} - \frac{\alpha H}{2} \right)^2 = F \left(\frac{\alpha H}{2} \right)$ où H est la hauteur de la troposphère, $\alpha = \frac{N_0 k}{f_0}$ et $F(\kappa) = 1 + \kappa^2 - \frac{2\kappa}{\text{th}(2\kappa)} = (\kappa \text{th } \kappa - 1) \left(\frac{\kappa}{\text{th } \kappa} - 1 \right)$. En prenant $\phi_0 = 40^\circ$ N pour le calcul de $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$, $N = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $\Lambda = 1.7 \cdot 10^{-3}$, estimer la valeur de la longueur d'onde L_* la plus amplifiée ainsi que le temps de croissance $T_* = L_*/c_{i*}$ et la vitesse de propagation c_{r*} correspondant. Comparer avec le régime de temps des régions tempérées.

La résolution du problème d'Eady s'effectue en linéarisant les équations quasi-géostrophiques autour de l'écoulement de base $(\bar{u}, 0, 0)$ et en imposant à la vitesse verticale w d'être nulle au sol et à la tropopause. On vérifie trivialement la factorisation de la fonction $F(\kappa)$ qui est négative entre $\kappa = 0$ et κ_0 solution de l'équation $\text{th } \kappa_0 = 1/\kappa_0$. Par résolution graphique sur le tracé de la fonction F , on voit que $\kappa_0 \sim 1.2$ et que $\kappa_* \sim 0.8$ avec $F_* = F(\kappa_*) \sim -0.1$. Comme $\kappa_* = \frac{\alpha_* H}{2} = \frac{N_0 k_* H}{2 f_0}$, on a $k_* = \frac{2 f_0 \kappa_*}{N_0 H}$ et donc $L_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{\pi N_0}{f_0 \kappa_*} H \sim 3600 \text{ km}$. Le temps de croissance maximale correspond à $\alpha_* c_{i*} / \Lambda = \sqrt{-F_*}$, d'où $T_* = L_*/c_{i*} \sim 11 \text{ j}$. La vitesse de propagation de la perturbation est $c_{r*} \sim 3 \text{ m/s}$. Ces valeurs correspondent bien aux caractéristiques des perturbations qui traversent les régions tempérées aux moyennes latitudes.

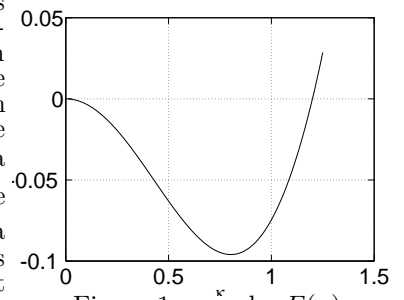


Figure 1 : courbe $F(\kappa)$

PC6.2 Moment cinétique et flux d'Eliassen-Palm

On s'intéresse maintenant au bilan de moment cinétique dans la branche descendante commune à la cellule de Hadley et à la cellule de Ferrel à 40° N. Pour cela, on utilise les figures et les tableaux de la PC4 et on suppose que le moment cinétique absolu $m_a = a \rho \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$ est, en l'absence de frottement F_u et de gradient de pression latitudinal $\frac{\partial p}{\partial \lambda}$, conservé le d'une trajectoire, même dans le cas où la masse ρ est variable.

- 3) À partir de la figure 2 et de la table 1 de la PC4, estimer la différence de moment cinétique entre les niveaux 200 hPa et 1000 hPa. En déduire que le mouvement est accéléré par un mécanisme plus puissant que le frottement. Estimer le moment \overline{M} , moyenné sur une trajectoire descendante, de la résultante de ces forces antagonistes. Comparer cette valeur à celles des moments moyens du frottement le long des trajectoires horizontales de la cellule de Hadley.

À la latitude 40° N, on lit sur la figure 2 de la PC4 les valeurs $u \sim 25$ m/s à 200 hPa et $u \sim 5$ m/s à 1000 hPa. En prenant en compte la valeur de la densité ρ à chaque niveau (multipliée par 4 en descendant), on obtient $\frac{\Delta m_a}{a} = 1.2 \times 278 - 0.3 \times 293 = 245$ N s/m³. On voit que le frottement F_u , qui seul diminuerait m_a dans la mesure où u reste positif, est contrecarré par une autre force qui tend à accélérer le mouvement. On peut estimer l'effet accélérateur du bilan des moments de cette force et de la force de frottement en calculant le moment moyen $\overline{M}_u = \Delta m_a / \tau$ où $\tau = 20$ j est le temps que met une particule pour descendre. On obtient alors la valeur $\overline{M}_u = 900$ N /m² qui est grande en comparaison avec le frottement moyen calculé dans les branches horizontales de la cellule de Hadley (entre 200 et 500 N /m²).

- 4) On suppose que l'apport de moment cinétique qui vient d'être mis en évidence est dû au flux d'Eliassen-Palm \underline{E} . La figure 5 représente le vecteur flux \underline{E} , ainsi que les isocontours de la quantité $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi)\nabla \underline{E}$ avec un intervalle égal à 10^{15} m³. À partir de la figure, estimer le moment $-\nabla \underline{E}$ moyenné sur une trajectoire qui descend de 900 hPa à 1000 hPa à 40° N. Donner alors une description globale du bilan de moment cinétique de la cellule de Hadley.

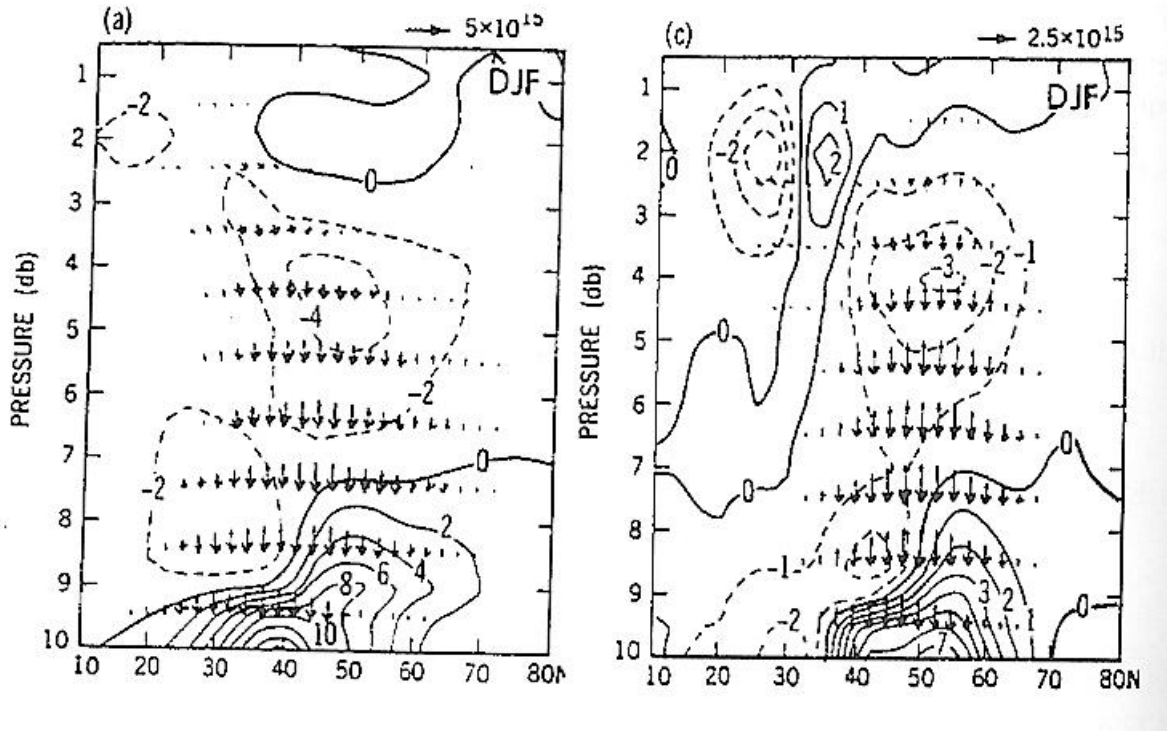


Figure 2 : Flux d'Eliassen-Palm et convergence $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi)\nabla \underline{E}$ (10^{15} m³) en hiver dus a) aux transitoires baroclines et b) aux ondes stationnaires.

À partir de la figure, on voit que la valeur de la quantité $-\frac{a}{\rho g}(2\pi a \cos \phi)\nabla \underline{E}$ moyennée entre 900 et 1000 hPa est environ $6 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ pour les transitoires baroclines et $2 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ pour les ondes stationnaires, soit $8 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ au total. On en déduit que $-\overline{\nabla \underline{E}} \sim 400 \text{ N/m}^2$. Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur des moments calculés précédemment. On peut alors esquisser le scénario suivant : une particule fluide monte dans la Zone de Convergence Inter-Tropicale (ZCIT) avec une vitesse moyenne $u \sim 0$ puis monte vers les moyennes latitudes pour former le jet d'ouest. La perte de moment cinétique par frottement est d'autant moins grande que l'altitude est haute, à cause de la densité. En arrivant aux moyennes latitudes le moment cinétique est absorbé par les ondes stationnaires et les transitoires baroclines pour être réinjecté dans les basses couches. Ce mécanisme est à l'origine de la circulation de Ferrel. Tous ces effets sont du même ordre de grandeur (moment moyen de l'ordre de plusieurs centaines de N/m^2).

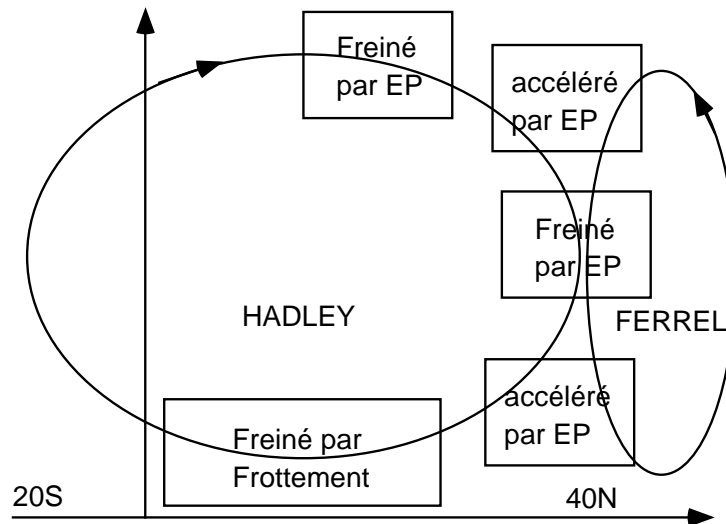


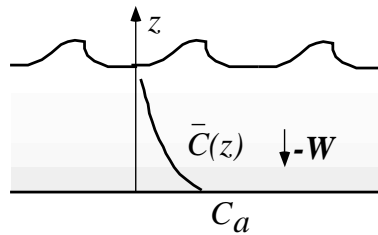
Figure 3 : représentation schématique de l'action du flux d'Eliassen-Palm (EP)

PC7 : Couches limites turbulentes

Cette PC illustre le paragraphe intitulé "Conditions aux limites" à travers l'exemple de la mise en suspension de sédiments par un écoulement turbulent. On aurait pu, de manière semblable, prendre l'exemple d'un polluant émis dans la couche limite atmosphérique.

PC7.1 Équilibre sédimentation / diffusion turbulente

On cherche à calculer la concentration de fines particules mises en suspension par un écoulement turbulent incompressible et animées d'une vitesse de chute supposée constante. On s'intéresse, par exemple, au profil vertical de concentration $\bar{C}(z)$ (en kg/m^3) du sable mis en suspension par la turbulence générée par le courant ou le déferlement des vagues sur une plage.



- 1) On considère un champ de vitesse solénoïdal $\underline{U}(x, y, z, t)$ de composantes (u, v, w) . On note $C(x, y, z, t)$ la concentration du constituant transporté par le mouvement et animé d'une vitesse de chute constante W . Écrire l'équation de bilan intégrale de la masse de constituant contenu dans un domaine fixe Ω . En déduire l'équation de bilan local de la concentration. Dans tout ce qui suit, on néglige l'effet de la viscosité moléculaire.

Étant donné un domaine Ω immobile, le flux sortant de concentration à travers un élément de surface de la frontière $\partial\Omega$ et de normale \underline{n} est égale à $(C \underline{U} - C W \underline{e}_z) \cdot \underline{n}$. On peut donc écrire $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} C \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} C (\underline{U} - W \underline{e}_z) \cdot \underline{n} \, da = 0$. On en déduit que $\frac{DC}{Dt} - W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + (w - W) \frac{\partial C}{\partial z} = 0$.

- 2) On suppose que le champ de vitesse est turbulent et on note $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$. On note alors $C = \bar{C} + C'$ la concentration. Écrire les équations de Reynolds décrivant l'évolution du champ de concentration moyenne $\bar{C}(x, y, z, t)$.

En appliquant l'opérateur de moyenne $\bar{(\)}$ à l'équation de bilan de concentration, on obtient

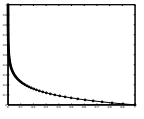
$$\frac{D\bar{C}}{Dt} + \frac{\partial \overline{u'C'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'C'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}.$$

- 3) On suppose que la turbulence est stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, homogène dans les directions horizontales ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$) et que la vitesse verticale moyenne est nulle ($\bar{w} = 0$). On n'exclut pas le cas où les vitesses horizontales moyennes \bar{u} et \bar{v} sont non nulles. Écrire l'équilibre vérifié par la concentration moyenne $\bar{C}(z)$ que l'on suppose indépendante des directions horizontales. On suppose que le flux de sédiment à la surface est nul (pas d'apport par le vent). En déduire la relation entre \bar{C} et le flux turbulent $\overline{w'C'}$.

L'équation de bilan local devient $\frac{\partial \overline{w'C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$. On l'intègre en $\overline{w'C'} = W \overline{C} + cste$. La constante d'intégration est nulle dans la mesure où le flux à travers la surface est nul. On est donc en présence de l'équilibre $\overline{w'C'} = W \overline{C}$ qui indique que le flux turbulent compense exactement le flux dû à la chute constante des particules.

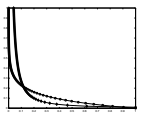
- 4) On choisit de paramétriser le flux turbulent par la relation empirique $\overline{w'C'} = -K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ où K est constant. Calculer le profil $\overline{C}(z)$ en supposant que la concentration au sol en $z = 0$ est égale à C_a . Montrer que flux turbulent au sol ne dépend pas de la valeur du coefficient K .

L'équilibre s'écrit $-K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = W \overline{C}$ et s'intègre en $\overline{C}(z) = C_a e^{-\frac{W}{K} z}$. Le flux turbulent au sol est donc égal à $W C_a$. C'est le flux qui permet de compenser la chute des particules.

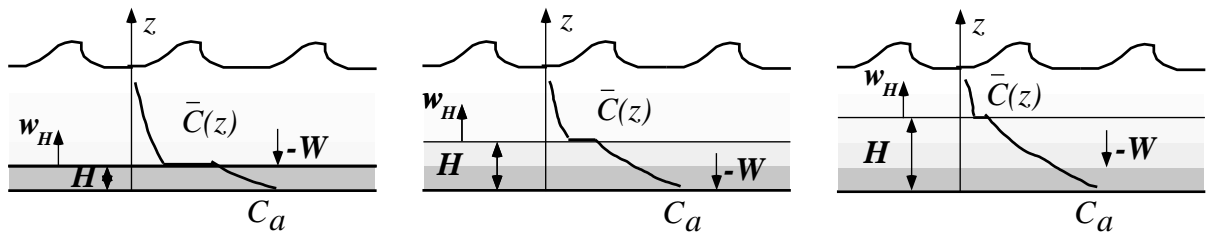


- 5) On choisit une nouvelle paramétrisation de K sous la forme $K = k u_* z$, où k est une constante sans dimension (constante de Karman) et u_* une vitesse constante qui traduit l'intensité du cisaillement de vitesse turbulent au sol (vitesse de frottement). Calculer le profil $\overline{C}(z)$ en supposant que la concentration en $z = z_0$ est égale à C_a , où z_0 traduit la rugosité du sol (longueur de rugosité). Donner l'expression du flux turbulent en $z = z_0$.

L'équilibre s'écrit $-k u_* z \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = W \overline{C}$ et s'intègre en $\overline{C}(z) = C_a \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\frac{W}{k u_*}}$. Le flux turbulent en $z = z_0$ est égal à $W C_a$.



PC7.2 Entraînement et propagation d'un front



On suppose maintenant que le niveau de turbulence dans la région située entre les altitudes $z = 0$ et $z = H(t)$ n'est pas le même que dans la région située entre $z = H(t)$ et la surface libre. En effet, la région du bas (région 1) est contrôlée par la turbulence due au cisaillement de vitesse sur le fond, tandis que la région du haut (région 2) est contrôlée par la turbulence générée par les vagues et leur déferlement. Cette discontinuité dans le niveau de turbulence est susceptible de se traduire par des discontinuités dans le profil de concentration $\overline{C}(z)$ ou de son flux. On suppose connue la variation de $H(t)$ en fonction du temps, et donc la vitesse $W_H(t) = H'(t)$ du front. On s'intéresse alors au profil de concentration $\overline{C}(z, t)$ dans les deux couches, au flux vertical net de sédiment extrait du sol que l'on note $G(t)$ et à la concentration au fond que l'on note $C_a(t)$. Comme précédemment, on suppose que le flux de sédiment à la surface est nul.

- 6) En revenant aux équations de bilan non moyennées, écrire le bilan de masse d'un constituant de concentration C sur un domaine $\Omega(t)$ transporté par le champ de vitesse \underline{U} , à l'intérieur duquel se propage une surface de discontinuité $\Sigma(t)$ animée d'une vitesse \underline{W}_Σ . On notera $[[X]]$ le saut $[[X]] = X_+ - X_-$ de la quantité X en choisissant (arbitrairement) une orientation de la normale \underline{n} à la surface Σ pointant du $-$ vers le $+$. On notera \underline{A} le flux sortant de la quantité C (dans le cas

particulier de la chute de sédiments, on a $\underline{A} = -C W \underline{e}_z$). Écrire le duo "bilan local / équation de saut" qui découle du bilan global $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} dA = 0$.

On démontre tout d'abord que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} da - \int_{\Sigma} \llbracket C \rrbracket \underline{W}_{\Sigma} \cdot \underline{n} da$. L'équation de bilan en présence d'une discontinuité s'écrit donc

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} C \underline{U} \cdot \underline{n} da - \int_{\Sigma} \llbracket C \rrbracket \underline{W}_{\Sigma} \cdot \underline{n} da + \int_{\partial\Omega} \underline{A} \cdot \underline{n} da = 0 .$$

En utilisant la relation $\int_{\partial\Omega} \underline{Q} \cdot \underline{n} da = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{Q} d\Omega + \int_{\Sigma} \llbracket \underline{Q} \rrbracket \cdot \underline{n} da$ qui généralise la formule de la divergence au cas discontinu, on obtient finalement les relations

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \underline{U} + \underline{A}) \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \left[C (\underline{U} - \underline{W}_{\Sigma}) + \underline{A} \right] \cdot \underline{n} da = 0 .$$

On en déduit les équations $\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \underline{U} + \underline{A}) = \frac{DC}{Dt} + \nabla \cdot \underline{A} = 0$ pour le bilan local en tout point hors de Σ et $\llbracket C (\underline{U} - \underline{W}_{\Sigma}) + \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ pour la relation de saut en tout point de Σ .

- 7) On suppose que le champ de vitesse \underline{U} est turbulent. Écrire les équations de Reynolds dans le cas général.

Les équations de Reynolds s'écrivent $\frac{D}{Dt} \overline{C} + \nabla \cdot (\overline{U' C'} + \underline{A}) = 0$ pour tout point \underline{x} en dehors de Σ et $\llbracket \overline{C} \underline{U} + \overline{C' U'} - \overline{C} \underline{W}_{\Sigma} + \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0$ pour tout point \underline{x} sur la surface Σ .

- 8) On suppose maintenant que la turbulence est homogène dans la direction horizontale et que la surface de discontinuité est un plan horizontal mobile d'équation $z = H(t)$. On notera $W_H = H'(t)$ la vitesse verticale de ce plan. On suppose que le mélange est suffisamment rapide par rapport à la vitesse W_H pour pouvoir considérer que le profil \overline{C} atteint son équilibre instantanément dans chacune des régions séparées par la discontinuité. Dans le cas du flux de sédiment $\underline{A} = -W C \underline{e}_z$ résultant de la vitesse de chute constant W , écrire les équations de Reynolds.

L'équation de bilan local s'écrit $\frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ de part et d'autre de la surface de discontinuité. La relation de saut s'écrit $\llbracket \overline{w' C'} - W_H \overline{C} \rrbracket = \llbracket W \overline{C} \rrbracket$ ou encore $\llbracket \overline{w' C'} \rrbracket = (W_H + W) \llbracket \overline{C} \rrbracket$.

- 9) Montrer que le flux net de sédiment est nul dans la région 2 (supérieure) et égal à une valeur constante que l'on notera G dans la région 1 (inférieure) que l'on peut interpréter comme étant le flux de sédiment net extrait au sol. Relier ce flux vertical à la vitesse du front W_H et à la discontinuité de concentration $\llbracket C \rrbracket$ sur ce front.

En intégrant l'équation de bilan $\frac{\partial \overline{w' C'}}{\partial z} = W \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$ par rapport à z , on trouve $\overline{w' C'} = W \overline{C}$ dans la région 2, puisque le flux net est nul en surface, et $\overline{w' C'} = W \overline{C} + G$ dans la région 1 où la constante d'intégration G représente le flux net de sédiment extrait du sol par entraînement. On soustrayant les deux relations précédentes, on obtient la relation $\llbracket \overline{w' C'} \rrbracket = W \llbracket \overline{C} \rrbracket - G$. La relation de saut peut donc s'écrire $W \llbracket \overline{C} \rrbracket - G = (W_H + W) \llbracket \overline{C} \rrbracket$, ce qui entraîne $G = -W_H \llbracket \overline{C} \rrbracket$.

- 10) On suppose que $\overline{C} = 0$ dans la région supérieure 1. Relier entre elles les quantité $G(t)$, $C_a(t)$ et $W_H(t)$ en supposant valide le modèle de turbulence $\overline{w' C'} = -K \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$.

Comme $\bar{C} = 0$ dans la région 2, on peut écrire que le flux net de sédiment extrait par entraînement est $G = -W_H [\bar{C}] = W_H \bar{C}(H)$. Pour la paramétrisation $\overline{w' C'} = -K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$, on doit résoudre l'équation $-K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = W \bar{C} + G$ avec la condition $\bar{C}(0) = C_a$. On obtient alors $\bar{C}(z) = \left(\frac{G}{W} + C_a\right) e^{-\frac{W}{K}z} - \frac{G}{W}$, ce qui permet d'écrire $G = W_H \bar{C}(H) = \left(G \frac{W_H}{W} + C_a W_H\right) e^{-\frac{W}{K}H} - G \frac{W_H}{W}$. Cette relation s'écrit encore

$$G = C_a \frac{W W_H e^{-\frac{W}{K}H}}{W + W_H \left(1 - e^{-\frac{W}{K}H}\right)} = C_a W_H \frac{1}{\left(1 + \frac{W_H}{W}\right) e^{\frac{W}{K}H} - 1}.$$

PC7.3 Critique du modèle discontinu

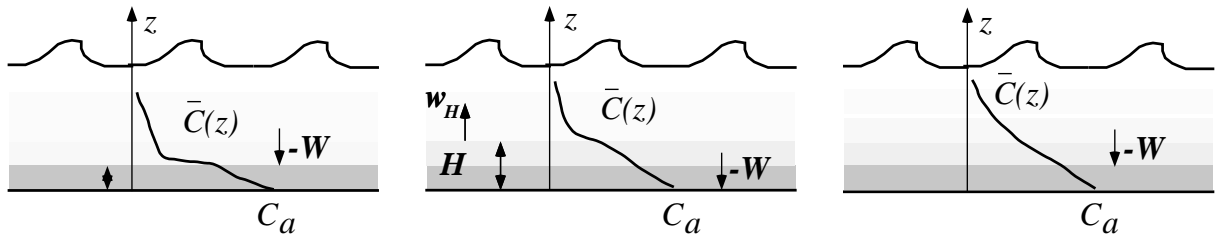
On veut maintenant remplacer le modèle de propagation d'un front par un modèle plus réaliste. On adopte le modèle de turbulence $\overline{w' C'} = -K(z, t) \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$ avec $K(z, t) = K_1$ pour $0 \leq z \leq H(t)$ et $K(z, t) = K_2$ pour $H(t) \leq z$. On étudie alors l'évolution temporelle de $\bar{C}(z, t)$.

11) Écrire l'équation d'évolution de $\bar{C}(z, t)$ pour le modèle de turbulence étudiée.

L'équation d'évolution de la concentration de sédiment s'écrit $\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} - W \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right]$. C'est une équation d'advection diffusion.

12) Dessiner schématiquement l'évolution du profil de concentration pour ce modèle en supposant que la concentration au sol reste égale à C_a . Comparer l'évolution d'un front de concentration avec celle du modèle discontinu précédent.

L'évolution du profil de concentration fait apparaître une discontinuité dans la pente au niveau $z = H(t)$. La propagation d'un éventuel front de concentration (généralisé par exemple par les conditions initiales) diffère du modèle discontinu par le fait qu'il diffuse et que la discontinuité de concentration disparaît (seule la discontinuité de la pente subsiste). La résolution analytique de ce système est envisageable en imposant un flux nul à la surface.



PC8 : Circulation générale de l'océan

L'objet de cette PC est de décrire la circulation générale de l'océan à l'aide de modèles conceptuels simplifiés qui mettent en évidence les mécanismes principaux qui interviennent.

PC8.1 Mouvement à l'échelle d'un bassin

- 1) Écrire les équations du mouvement à l'échelle d'un bassin océanique planétaire dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, de l'approximation hydrostatique, de l'approximation de couche mince. En supposant que u est au plus égal à 1 m/s, montrer que l'on peut négliger les termes d'accélération dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Indiquer comment résoudre la singularité rencontrée près des pôles pour les coordonnées sphériques.

Les équations du mouvement à l'échelle planétaire et dans le cadre des quatre approximations mentionnées s'écrivent

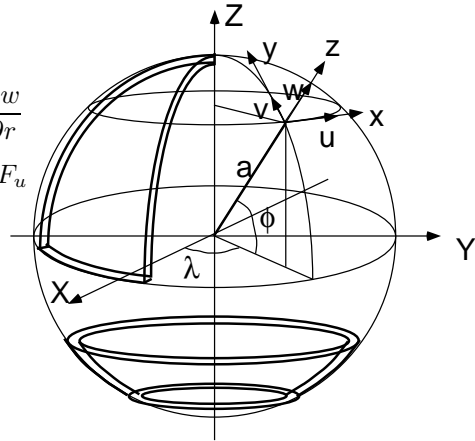
$$0 = \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \operatorname{tg} \phi \frac{u v}{a} = -\frac{1}{\rho_r a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi + F_u$$

$$\frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a} = -\frac{1}{\rho_r a} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi + F_v$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_r \gamma s$$

$$\frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial s}{\partial \phi} + w \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{F_e}{T}$$



Le rapport entre les termes de sphéricité $\left(-\operatorname{tg} \phi \frac{u v}{a}, \operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a}\right)$

et les termes de Coriolis $(2 \Omega v \sin \phi, -2 \Omega u \sin \phi)$ est égal à $\frac{u}{\Omega a \cos \phi}$. Pour u de l'ordre de 1 m/s (courant très fort) il est supérieur à $\epsilon = .01$ pour des latitudes supérieures à $\phi = \arccos \frac{u}{\epsilon \Omega a}$ qui est de l'ordre de 80° . Dans les régions polaires, on peut utiliser des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) qui permettent de s'affranchir de la singularité des coordonnées sphériques. Il n'y a donc plus de terme de sphéricité. On démontre facilement que les autres termes d'accélération sont négligeables.

- 2) On néglige donc que les termes d'accélération et on suppose maintenant que les termes de frottement F_u et F_v sont nuls. Donner l'expression de la vitesse géostrophique (u, v) en fonction de $\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)$. En déduire l'expression de $\frac{\partial w}{\partial r}$ en fonction de v (relation de Sverdrup).

La vitesse géostrophique s'écrit $u = -\frac{1}{f(\phi)} \frac{1}{\rho_r a} \frac{\partial p}{\partial \phi}$ et $v = \frac{1}{f(\phi)} \frac{1}{\rho_r a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}$ avec $f(\phi) = 2 \Omega \sin \phi$. En reportant dans l'équation de quantité de mouvement, on obtient $\frac{1}{\rho_r a^2 \cos \phi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial \lambda}\right) \right] + \frac{\partial w}{\partial r} = 0$. Cette équation conduit à $-\frac{1}{a \cos \phi} \frac{f'(\phi)}{f^2(\phi)} \frac{1}{\rho_r a} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0$, soit encore $-\frac{1}{a} \frac{f'(\phi)}{f(\phi)} v + \frac{\partial w}{\partial r} = 0$. Comme $f'(\phi) = 2 \Omega \cos \phi$ on obtient $v = a \operatorname{tg} \phi \frac{\partial w}{\partial r}$. En notant $\beta = \frac{1}{a} f'(\phi)$ ($= \frac{df}{dy}$), on obtient la célèbre relation de Sverdrup $\beta v = f \frac{\partial w}{\partial r}$.

PC8.2 Courant antarctique circumpolaire

On modélise la ceinture antarctique circumpolaire par une couche sphérique de profondeur $H = 4$ km comprise entre les latitudes 50° S et 70° S. On néglige toujours les termes d'accélération et les frottements. On suppose que l'écoulement est zonal, c'est-à-dire que $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$ et $v = 0$.

- 3) En imposant à la vitesse verticale de s'annuler au fond, montrer que $w = 0$. Écrire la relation du vent (courant) thermique reliant $\frac{\partial u}{\partial r}$ à $\frac{\partial s}{\partial \phi}$.

La relation de Sverdrup entraîne que $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$, ce qui entraîne $w = 0$ à cause de la condition aux limites du fond. La vitesse géostrophique s'écrit $u = -\frac{1}{f(\phi)} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi}$ et $v = 0$. En dérivant par rapport à r et en remplaçant $\frac{\partial p}{\partial r}$ par son expression en fonction de s , on obtient la relation du vent (courant) thermique $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{f(\phi)} \frac{g}{a} \frac{\partial s}{\partial \phi}$.

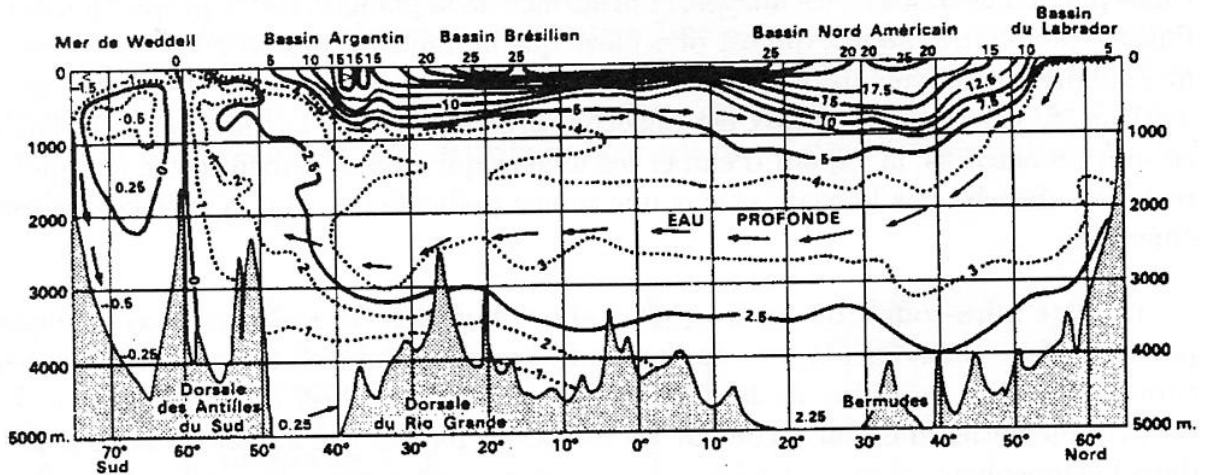


Figure 7: Distribution moyenne de température dans l'océan Atlantique (° K).

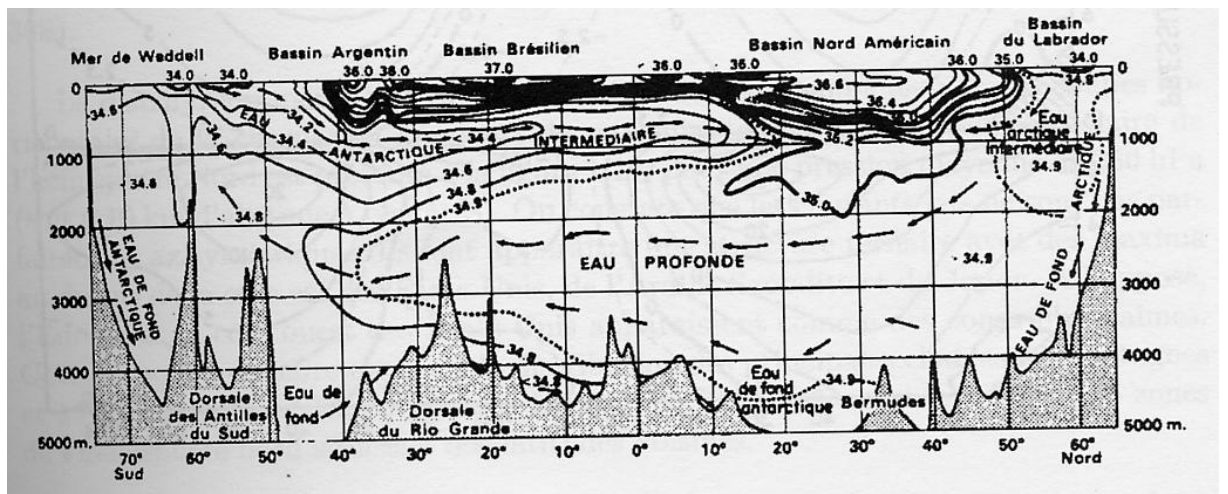
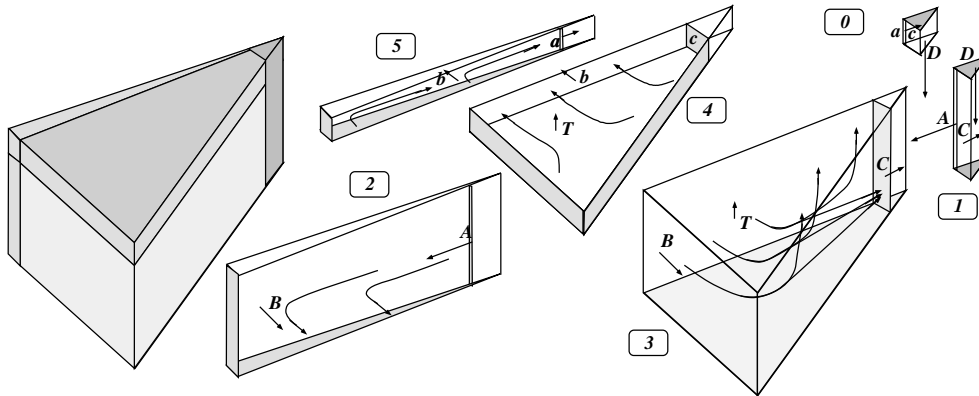


Figure 8: Distribution moyenne de salinité dans l'océan Atlantique (g/kg).

- 4) À partir des cartes montrant les moyennes zonales et annuelles de la température et de la salinité de l'océan Atlantique des Figures 1 et 2 (Tchernia 1978), estimer l'ordre de grandeur des vitesses du profil de vitesse $u(z) = \mu z$ que l'on supposera linéaire en fonction de $z = r - a$ et nul au fond. En déduire une estimation du débit en Sverdrup du courant circumpolaire arctique. Comparer avec la valeur de 130 Sv mesuré au niveau du Déroit de Drake.

La lecture des cartes de température et de salinité indique environ 0°C à 70°S et 3°C à 50°S , soit un écart de température $\Delta T \sim -3^\circ\text{K}$. L'écart de salinité Δr_s n'est pas bien marqué et est de l'ordre de 0.1 g/kg s'il existe. En utilisant la loi d'état, on voit que l'écart de densité $\Delta\rho$ vérifie $\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = -A\Delta T + B\Delta r_s$ avec $A = 1.7 \cdot 10^{-4}\text{ K}^{-1}$ et $B = 7.6 \cdot 10^{-4}\text{ (g/kg)}^{-1}$. L'écart de densité dû à la salinité est au plus égal à 20% de celui dû à la température. On trouve alors $\frac{\Delta\rho}{\rho_r} \sim 5 \cdot 10^{-4}$. Comme $\gamma \Delta s = -\frac{g}{\rho_r} \Delta\rho$ par définition de γ , on peut estimer $\frac{\gamma}{a} \frac{\partial s}{\partial \phi} = \gamma \frac{\partial s}{\partial y} = \gamma \frac{\Delta s}{\Delta L} = -\frac{g}{\Delta L} \frac{\Delta\rho}{\rho_r}$ avec $\Delta L \sim 2000\text{ km}$ la distance entre 50°S et 70°S . En choisissant pour $f(\phi)$ sa valeur à 60°S on obtient $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{f(\phi)} \frac{g}{\Delta L} \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \sim 2 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1}$. On peut modéliser cet océan par un profil linéaire $u(z) = \mu z$ avec $\mu = 2 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1}$. La vitesse maximale en $z = H$ est alors $u_{max} = 0.1\text{ m/s}$. Le débit moyen de cet océan est alors égal à $\frac{1}{2} u_{max} \Delta L H = 400 \cdot 10^6\text{ m}^3/\text{s} = 400\text{ Sv}$. Ce débit est trois fois supérieur à la valeur réelle, ce que l'on peut attribuer à la simplicité du modèle mais aussi aux frottements.

PC8.3 Circulation abyssale dans un bassin fermé



5) On considère un bassin océanique idéalisé ayant la forme d'un secteur sphérique de profondeur H et délimité par deux continents situés aux longitudes λ_0 et λ_1 . On suppose qu'il existe un gradient d'entropie $\frac{\partial s}{\partial \phi}$ entre l'équateur et le pôle. On se place toujours dans le cadre des approximations valables pour l'océan (de Boussinesq, hydrostatique, de couche mince, géostrophique, termes de sphéricité négligeables). Montrer qu'un gradient méridien $\frac{\partial s}{\partial \lambda}$ doit se développer pour garantir l'existence d'une solution qui reste dans le cadre de ces approximations.

En l'absence de gradient méridien, l'écoulement serait zonal ($v = 0$), ce qui est incompatible avec la présence des continents.

On découpe cet océan en six domaines et on schématise la circulation abyssale de la manière suivante. Les eaux polaires plongent du domaine 0 vers le domaine 1 avec un débit total $D = 20\text{ Sv}$. Un débit égal à D_A est alors injecté dans le domaine 2 de bord ouest, étroit et de profondeur $H - h$, à travers la face A. Ce même débit est ensuite injecté dans le domaine 3 à travers la face B. Il se divise alors en une partie D_T injectée dans le domaine 4, d'épaisseur h , à travers la surface T et une partie D_C qui retourne dans le domaine 1 à travers la surface C. Le débit D_T est injecté dans le domaine 5 de bord Ouest à travers la face b, puis retourne dans le domaine 1 à travers la face a. La taille des domaines 0, 1 et 2 est supposée négligeable devant celle des autres domaines.

6) Indiquer les relations entre les débits D, D_A, D_B, D_C et D_T induites par cette modélisation et la conservation de la masse.

On a $D = D_A - D_C, D_A = D_B, D_B = D_T + D_C$ et $D_T = D$.

7) Expliquer les mécanismes physiques permettant de justifier cette description de la circulation

abysale pour cet océan. On notera w_T la vitesse verticale sur la surface T , u_B la vitesse zonale sur la surface B , etc. On suppose que le profil de vitesse verticale w est linéaire dans chacun des boîtes.

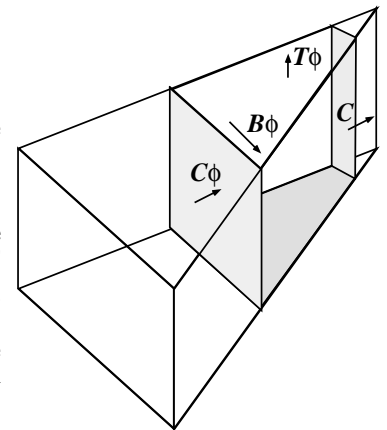
Les régions où plongent les eaux lourdes car froides et salées ont une superficie très petite et sont situées aux hautes latitudes, d'où les domaines 0 et 1. En migrant vers l'équateur, ces eaux abyssales sont confinées sur le bord ouest à cause de la force de Coriolis, d'où le domaine 2. Le domaine 3 est situé sous la thermocline où la vitesse verticale est $w_T > 0$. La relation de Sverdrup impose alors un mouvement $v > 0$, donc dirigé vers le pôle, dans le domaine 3 et un mouvement $v < 0$, donc dirigé vers l'équateur, dans la couche surfacique représentée par le domaine 4. La conservation de la masse entraîne les vitesses $u_B > 0$ et $u_b < 0$ à travers les faces B et b . Un courant de bord ouest dans le domaine de surface 5 remonte alors vers le nord.

- 8) On suppose que la vitesse verticale w_T au niveau de la thermocline est constante sur tout le bassin. Donner son expression en fonction de D . En déduire l'expression de $v(\phi)$ dans le domaine 3. En déduire les ordres de grandeur de ces quantités en supposant que $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = 45^\circ$, $H = 4000$ m et $h = 500$ m.

Le bilan de masse à travers une surface horizontale doit être équilibré. Comme l'aire de la surface T est $\mathcal{A}_T = a^2 \Delta\lambda$, on a $D = w_T \mathcal{A}_T$ et donc $w_T = D/\mathcal{A}_T = \frac{D}{a^2 \Delta\lambda}$. En intégrant la relation de Sverdrup $v = a \operatorname{tg} \phi \frac{\partial w}{\partial z}$ sur la verticale, et en supposant que la vitesse verticale est nulle au fond, on obtient $v = a \operatorname{tg} \phi \frac{w_T}{H-h} = \frac{D}{a(H-h)\Delta\lambda} \operatorname{tg} \phi$. L'application numérique conduit à $w_T \sim .4 \cdot 10^{-6}$ m/s, $v \sim .3 \cdot 10^{-2} \operatorname{tg} \phi$ m/s.

- 9) On considère la portion du domaine 3 comprise entre la latitude ϕ et le pôle. On note alors $T\phi$, $C\phi$ et $B\phi$ les restrictions à ce sous-domaine des surface T , C et B . Calculer le débit $D_{B\phi}$ entrant dans ce sous-domaine à travers la surface $B\phi$. En déduire la vitesse $u_B(\phi)$ qui entre du domaine 2 vers le domaine 3. Conclure en indiquant la valeur de toutes les débits ($D_A, D_B, D_C, D_T, D_a, D_b$), ainsi que le débit total D_B à travers la surface B .

Le débit entrant à travers la surface $C\phi$ est $D_{C\phi} = v(\phi)a \cos \phi \Delta\lambda(H-h)$. En utilisant l'expression de $v(\phi)$ issue de la relation de Sverdrup, on obtient $D_{C\phi} = \frac{D}{a(H-h)\Delta\lambda} \operatorname{tg} \phi a \cos \phi \Delta\lambda (H-h) = D \sin \phi$. En faisant tendre ϕ vers $\frac{\pi}{2}$, on voit que le débit sortant du domaine 3 vers le domaine 1 est $D_C = D$. Le débit sortant à travers la surface $T\phi$ est $D_{T\phi} = \Delta\lambda w_T \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \phi' d\phi' = D(1 - \sin \phi)$. On peut donc écrire que $D_{B\phi} = D_{T\phi} + D_C - D_{C\phi} = D(1 - \sin \phi + 1 - \sin \phi) = 2D(1 - \sin \phi)$. La vitesse $u_B(\phi)$ s'obtient en écrivant $(H-h) \int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} u_B(\phi') a d\phi' = D_{B\phi} = 2D(1 - \sin \phi)$. En dérivant par rapport à ϕ , on obtient $u_B(\phi) = 2 \frac{D}{a(H-h)} \cos \phi$. Le débit total à travers la surface B est $D_B = 2D$. Dans le domaine 1, on peut écrire $D_A = D + D_C = 2D$. On a bien $D_B = D_A = 2D$ dans le domaine 2. Dans le domaine 4, la relation de Sverdrup n'est plus valable dans la mesure où la circulation est dominée par le forçage par le vent. Comme on suppose que le débit à travers la surface c est nulle, on doit avoir $D_b = D_a = D$ pour boucler le bilan. On en conclut que $(D_A, D_B, D_C, D_T, D_a, D_b) = (2D, 2D, D, D, D, D)$. Le courant de bord ouest transporte un débit deux fois plus important que le débit de plongée des eaux profondes.



- 10) À partir de l'équation de continuité, calculer la valeur de $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ dans le domaine 3. Comparer avec la valeur de u_B . Donner l'ordre de grandeur de ces quantités.

En intégrant l'équation de continuité sur la verticale on obtient $\frac{H-h}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + w_T = 0$ et donc à $(H-h) \frac{\partial u}{\partial \lambda} = -w_T a \cos \phi - w_T a \frac{d}{d\phi} \sin \phi = -2w_T a \cos \phi$. D'où $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -2 \frac{D \cos \phi}{a(H-h)\Delta\lambda}$. Comme u , doit être nul sur le bord est, on peut proposer le modèle linéaire $u(\lambda, \phi) = -2 \frac{D}{a(H-h)\Delta\lambda} (\lambda - \lambda_0) \cos \phi$. L'application numérique conduit à $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = -2 \frac{D}{a(H-h)\Delta\lambda} \cos \phi \sim 1 \cdot 10^{-2} \cos \phi \text{ s}^{-1}$. La vitesse maximale sur le bord ouest égale à $u_B \sim -.6 \cdot 10^{-2} \cos \phi$ m/s.

PC9 : Modèles en couches pour l'océan

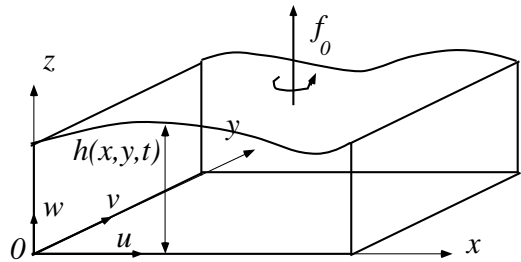
Cette PC a pour but de se familiariser avec les modèles en couches et leur pertinence pour décrire la dynamique océanique. Une autre justification, non abordée ici, repose sur la décompositions en modes verticaux.

PC9.1 Équations sur un f_0 plan

- 1) Écrire les équations du mouvement dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de l'approximation hydrostatique sur un f_0 -plan, c'est-à-dire en supposant que f_0 est constant dans un repère cartésien.

Les équations du mouvement sur un f_0 -plan s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial x} + f_0 v + F_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial y} - f_0 u + F_v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_r \gamma s \quad \text{et} \quad \frac{Ds}{Dt} = \frac{F_e}{T} \end{aligned}$$



- 2) On note $P = p_r(z) + p$ la pression totale et $\rho = \rho_r - \frac{\rho_r \gamma}{g} s$ la masse volumique. Vérifier la pertinence de ces notations et reformuler les équations avec ces nouvelles variables.

Par définition de γ la masse volumique ρ s'exprime bien ainsi en fonction de l'entropie s . Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x} + f_0 v + F_u, \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial y} - f_0 u + F_v, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{et} \quad \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho_r \gamma}{g} \frac{F_e}{T}$$

- 3) On s'intéresse au mouvement d'un domaine océanique à surface libre d'équation $z = h(x, y, t)$, l'origine de l'axe z étant prise au fond supposé plat. Écrire les conditions aux limites en utilisant les grandeurs P et ρ . On négligera la variation de la pression atmosphérique P_a avec l'altitude.

Les conditions aux limites au fond $z = 0$ sont $w(x, y, 0) = 0$. Les conditions aux limites à la surface $z = h(x, y, t)$ sont $\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = w$ et $P = P_a$ où P_a est la pression atmosphérique.

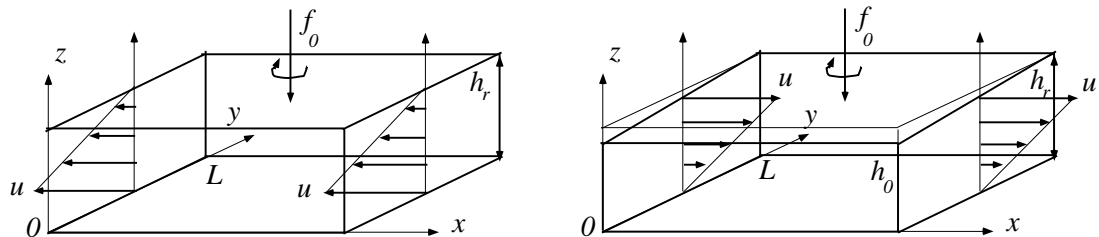
PC9.2 Océan circumpolaire et surface libre

- 4) On considère un modèle simplifié de l'océan circumpolaire où le mouvement est forcé par l'existence d'une densité $\rho(y)$ entre $y = 0$ (70° S) et $y = L$ (50° S) dont le gradient pointe vers le sud. Le modèle est basé sur les équations du f_0 -plan avec $f_0 < 0$. On suppose que F_u, F_v et F_e sont nuls, que l'écoulement est zonal ($v = 0, \frac{\partial}{\partial x} = 0$). Montrer que la solution stationnaire vérifie l'équilibre géostrophique. Exprimer tous les champs en supposant connue la forme $h(y)$ de la surface libre.

Comme $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $v = 0$, on a $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$. À l'équilibre, la condition aux limites cinématique supérieure $\frac{Dh}{Dt} = w$ entraîne $w = 0$ à la surface puisque $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ et $v = 0$. On en déduit que $w = 0$ dans tout le domaine. L'équilibre hydrostatique $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(y) g$ s'intègre en $P(y, z) = P_a - \rho(y) g [z - h(y)]$ en tenant compte des conditions aux limites pour la pression. L'équation de bilan $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et la conservation de la quantité de mouvement projetée sur l'axe Ox sont trivialement satisfaites. La projection sur l'axe Oy exprime l'équilibre géostrophique $u = -\frac{1}{f_0 \rho_r} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-g}{f_0 \rho_r} \left\{ \frac{d}{dy} [\rho(y) h(y)] - \frac{d\rho}{dy}(y) z \right\}$.

- 5) On suppose tout d'abord que $h(y) = h_r$ est constant et que $\rho(y) = \rho_r + \Delta\rho \frac{L-y}{L}$. Donner l'expression du profil de vitesse $u(z)$ et montrer que la circulation est d'est en ouest. Calculer la valeur de la vitesse au fond en supposant que $\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = 5 \cdot 10^{-4}$, $L = 2000$ km, $h_r = 4000$ m et $f_0 = -1.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Ce modèle est-il réaliste ?

Dans le cas où la surface libre est plate, le profil de vitesse est $u = \frac{g}{f_0 \rho_r} \frac{\Delta\rho}{L} (h_r - z)$. Comme $f_0 < 0$, on a $u \leq 0$. La circulation est d'est en ouest. Le courant est nul à la surface et égale à -0.1 m/s au fond. Ce modèle n'est pas réaliste dans la mesure où le frottement au fond devrait freiner le courant.



- 6) On suppose la même expression pour $\rho(y)$ mais on impose $u = 0$ au fond en $z = 0$ pour prendre en compte les frottements. En déduire la forme $h(y)$ de la surface libre, en notant $h(L) = h_r$. Montrer que la circulation est d'ouest en est. Calculer la vitesse maximale ainsi que la différence maximale de niveau de la surface libre. Calculer le gradient horizontal de pression au fond de l'océan. On fera l'hypothèse $\Delta\rho/\rho_r \ll 1$ confirmée par les observations.

Si $u = 0$ est nul au fond, on peut écrire $\frac{d}{dy} [\rho(y) h(y)] = 0$. On en déduit $h(y) = \frac{\rho_r h_r}{\rho(y)} = \frac{h_r}{1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \frac{L-y}{L}} \sim h_r \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_r} \frac{L-y}{L} \right)$. La vitesse maximale se rencontre maintenant à la surface et vaut 0,1 m/s. La circulation va de l'ouest vers l'est. La surface libre est plus basse de $\Delta h = h_r \frac{\Delta\rho}{\rho_r} = 2$ m au sud qu'au nord. Le gradient horizontale de pression au fond de l'océan est nul. Cette circulation est cohérente avec la réalité.

PC9.3 Océan équatorial à deux couches

- 7) On considère un modèle de la couche océanique équatoriale pour lequel $f_0 = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ et $v = 0$. Écrire les équations et conditions aux limites en utilisant les notations P et ρ pour la pression et la masse volumique. On supposera que $F_e = 0$.

Les équations du modèle sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial P}{\partial x} + F_u, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{et} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Les conditions aux limites sont $w = 0$ en $z = 0$ pour le fond et $\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$ et $P = P_a$ en $z = h(x, y, t)$ pour la surface libre.

- 8) On suppose que l'écoulement vérifie $\rho = \rho_2$ et $u = u_2$ pour $z \in [0, h_2]$ et $\rho = \rho_1$ et $u = u_1$ pour $z \in [h_2, h_2 + h_1]$ où $\rho_1 < \rho_2$ sont des constantes, $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ sont indépendants de z et

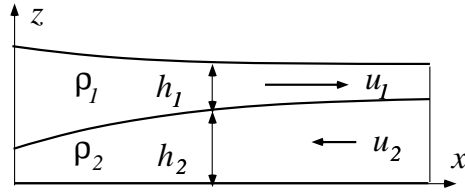
$h_1(x, t)$ et $h_2(x, t)$ sont les épaisseurs respectives des deux couches. Donner l'expression du champ de pression. Montrer que cet écoulement pourrait être solution des équations si F_u prend deux valeurs F_{u1} et F_{u2} indépendantes de z dans chacune des couches. Montrer que l'on est alors en présence de deux modèles de Saint-Venant couplés et écrire le système d'équations correspondant.

La condition aux limites $P = P_a$ à la surface et la continuité de la pression à l'interface des deux couches entraînent que $P_1(x, z, t) = P_a - \rho_1 g [z - h_2(x, t) - h_1(x, t)]$ pour $z \in [h_2, h_2 + h_1]$ et $P_2(x, z, t) = P_a + \rho_1 g h_1(x, t) - \rho_2 g [z - h_2(x, t)]$ pour $z \in [0, h_2]$. On peut alors remplacer ces expressions dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. La condition aux limites cinématique à la surface s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}(h_2 + h_1) = w \text{ pour } z = h_2 + h_1.$$

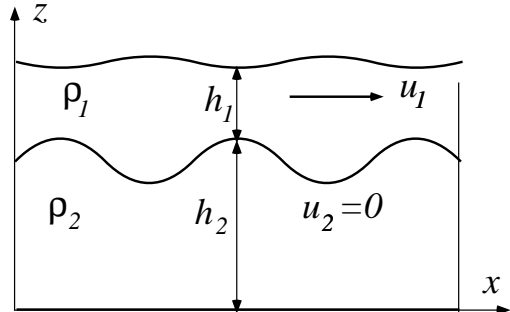
Comme il n'y a pas de transfert de masse entre les deux couches, on peut écrire $\frac{Dh_2}{Dt} = w$ pour $z = h_2$. On intègre alors l'équation de continuité sur chacune des couches et on applique les conditions aux limites cinématiques au fond, à l'interface ou sur la surface libre. On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_1 h_1) &= 0 & \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_2 h_2) &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{\rho_1}{\rho_r} g \frac{\partial}{\partial x}(h_2 + h_1) + F_{u1} & \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{\rho_2}{\rho_r} g \frac{\partial}{\partial x}\left(h_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1\right) + F_{u2} \end{aligned} \quad (5)$$



- 9) On suppose que u_2 est petit devant u_1 et que $F_{u2} = 0$. Justifier cette hypothèse dans le cas où l'interface entre les deux couches est la thermocline équatoriale. Dédire de cette hypothèse une relation entre les pentes des fonctions h_1 et h_2 . On note $\tilde{g} = g \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$ la "gravité réduite". Exprimer le rapport entre la pente de la surface libre d'élévation $h = h_1 + h_2$ et la pente de l'interface d'élévation h_2 en fonction de g et \tilde{g} . Estimer la valeur de ce rapport pour un écart de température de 10°C entre les deux couches. À partir de la Figure 1, estimer la différence de niveau de la mer à l'équateur entre l'est et l'ouest du Pacifique

Dans le cas d'un océan équatorial, l'épaisseur de la couche supérieure est de l'ordre de la centaine de mètres pour une profondeur totale de l'ordre de 4000 m. Le mouvement moyen de la couche inférieure est très petit devant l'intensité des courants de surface. On peut donc considérer que u_2 est négligeable. Le flux de quantité de mouvement à travers la thermocline est faible et F_{u2} ne représente donc que les frottements. Ceux-ci sont donc nuls puisque $u_2 \sim 0$. On en déduit donc que le gradient horizontal de pression dans la couche inférieure est nul, ce qui entraîne $\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) = 0$. On en déduit que $\frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x}$ et l'expression suivante pour le rapport des pentes : $\frac{\partial h}{\partial x} / \frac{\partial h_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) / \frac{\partial h_1}{\partial x} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = \tilde{g}/g$. Une différence $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ en température se



traduit par une différence de masse volumique $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2 = \alpha \Delta T = 1.7 \cdot 10^{-3}$. On en déduit que $\tilde{g} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ et $\frac{\partial h}{\partial x} / \frac{\partial h_1}{\partial x} = 1.7 \cdot 10^{-3}$. La lecture de la figure 1 montre que l'identification de deux couches séparées par la thermocline est raisonnable et que l'écart de température est bien d'environ 10°C . À l'ouest du bassin, un enfoncement de la thermocline de $\Delta h_1 = -200 \text{ m}$ correspond à une élévation de $\Delta h = \frac{\tilde{g}}{g} \Delta h_1 \sim 0.34 \text{ m}$.

- 10) En supposant toujours que le gradient horizontal de pression sous la thermocline est nul, écrire les équations d'évolution de la couche supérieure après avoir éliminé h_2 . On suppose que $h_1 = h_{r1}$ lorsque $u_1 = 0$ avec $F_{u1} = 0$. Calculer la vitesse des ondes autour de cet état de base en supposant que $\frac{\rho_1 - \rho_r}{\rho_r} \ll 1$. Donner la valeur de cette vitesse en supposant que $h_{1r} = 100 \text{ m}$.

En utilisant la relation $\frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial x}$ les équations d'évolution de la couche 1 s'écrivent alors

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 h_1) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\rho_1}{\rho_r} \tilde{g} \frac{\partial h_1}{\partial x} + F_{u1}.$$

Comme $\frac{|\rho_1 - \rho_r|}{\rho_r} \ll 1$, on peut remplacer $\frac{\rho_1}{\rho_r}$ par 1 dans les équations. La vitesse de propagation des ondes du mode barocline (couche inférieure quasi-immobile) est alors $c = \sqrt{\tilde{g} h_{r1}}$. On en déduit que $c \sim 1,3$ m/s.

- 11) On suppose maintenant que $F_{u1} = \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}$ avec $\tau_x = -\tau_s \frac{z-h_2}{h_1}$. Calculer la solution stationnaire forcée par la tension de vent τ_s dirigée vers l'ouest. À partir de la lecture de la Figure 1, estimer la valeur de la tension de vents des alizés.

Les équations de l'équilibre conduisent à $\tilde{g} \frac{\partial h_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_r} \tau_s / h_1$. On en déduit $\tau_s = -\rho_r \tilde{g} h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}$. En estimant que la thermocline s'enfonce d'environ $\Delta h_1 = 200$ m sur la largeur du Pacifique d'environ $L = 13\,000$ km et que sa profondeur moyenne est environ $h_{r1} = 100$ m, on obtient la valeur $\tau_s = \rho_r \tilde{g} h_{r1} \frac{\Delta h_1}{L}$. En prenant $\rho_r \sim 1\,000$ kg/m³, on obtient $\tau \sim 0.03$ Pa.

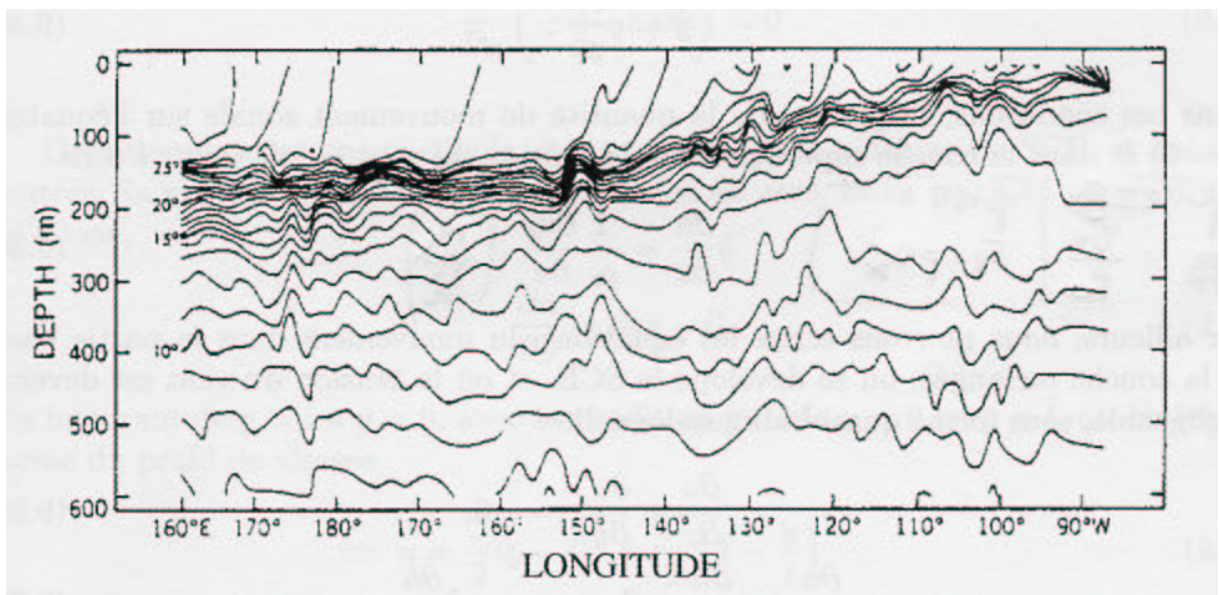


Figure 9: Coupe longitudinale de la thermocline sur l'équateur (Pacifique). Isothermes (intervalle 1°).

- 12) On généralise maintenant ce modèle 1D à deux couches au cas 2D du β -plan équatorial. Calculer le temps que met une onde de Kelvin pour traverser le Pacifique. Comparer avec les observations du satellite TOPEX/POSEIDON.

Une onde de Kelvin barocline, se propage à la vitesse $c = \sqrt{\tilde{g} h_r}$, toujours d'ouest en est. Cette vitesse est donc $c \sim 1.3$ m/s comme calculé précédemment pour les ondes barocline 1D. En prenant $L = 13\,000$ km, le temps nécessaire pour traverser le Pacifique est $T \sim 4$ mois. Ce résultat est en accord avec les observations satellitaires.

PC10 : Compléments

Plusieurs exercices complémentaires aux PC sont répertoriés ici.

PC10.1 Compléments : Écoulement stratifiés

Après la question 8.

- 1) Montrer que l'on peut toujours ramener cette recherche d'onde plane au cas $l = 0$, sans perte de généralité. En effectuant cette simplification, déterminer la relation de dispersion complète en écrivant que le déterminant 5x5 du système linéaire en $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s})$ doit s'annuler pour obtenir des solutions non triviales.

Comme le problème est invariant par rotation des axes horizontaux autour d'un axe vertical, on peut se ramener au cas $l = 0$. Le déterminant 5x5 du système linéaire doit s'annuler. En développant successivement les déterminants par rapport aux premières colonnes puis aux premières lignes, on obtient la relation

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & 0 & ik & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega & im & -\gamma \\ ik & 0 & im & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}N_0^2 & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = -i\omega \begin{vmatrix} -i\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & im & -\gamma \\ il & im & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma}N_0^2 & 0 & -i\omega \end{vmatrix} - ik \begin{vmatrix} 0 & 0 & ik & 0 \\ -i\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & im & -\gamma \\ 0 & \frac{1}{\gamma}N_0^2 & 0 & -i\omega \end{vmatrix}$$

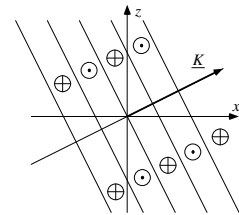
$$= -i\omega \left(-i\omega \begin{vmatrix} -i\omega & im & -\gamma \\ im & 0 & 0 \\ \frac{1}{\gamma}N_0^2 & 0 & -i\omega \end{vmatrix} \right) - ik \left(-i\omega \begin{vmatrix} 0 & ik & 0 \\ -i\omega & im & -\gamma \\ \frac{1}{\gamma}N_0^2 & 0 & -i\omega \end{vmatrix} \right)$$

$$= -i\omega \left[(-i\omega)(-im) \begin{vmatrix} im & -\gamma \\ 0 & -i\omega \end{vmatrix} \right] - ik \left[(-i\omega)(-ik) \begin{vmatrix} -i\omega & -\gamma \\ \frac{1}{\gamma}N_0^2 & -i\omega \end{vmatrix} \right]$$

$$= -i\omega [-\omega^2 m^2 (-\omega^2 + N_0^2)] - ik [-\omega k (-\omega^2 + N_0^2)] = i\omega [\omega^2 (k^2 + m^2) - N_0^2 k^2] = 0.$$

- 2) Décrire, dans l'espace réel, le mode propre correspondant à la solution $\omega = 0$. Montrer qu'il s'agit d'une oscillation transverse.

La relation de dispersion est constituée des relations $\omega = 0$ et $\omega^2 = N_0^2 \frac{k^2}{k^2 + m^2} = N_0^2 \frac{k^2}{K^2}$. Le cas $\omega = 0$ correspond à un mode $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{s}) = (0, \hat{v}, 0, 0, 0)$. On est donc en présence d'une onde $\tilde{U}(x, y, z, t) = \hat{v} e^{(ikx - i\omega t)} \underline{e}_y$ dont la partie réelle de la seule composante non nulle s'écrit $\tilde{v}(x, y, z, t) = v_m \cos(kx + mz - \omega t)$. Il s'agit d'une onde de transversale. Les particules oscillent dans le plan perpendiculaire au plan engendré par la verticale et le vecteur d'onde \underline{K} . La figure représente la projection des plans de phase dans le plan (x, z) perpendiculaire à la direction des trajectoires.



PC10.2 Forces d'inertie et ondes d'inertie

- 3) On considère la trajectoire $\underline{x}(t)$ d'une particule restant dans un plan. On note $\underline{t}(t)$ le vecteur unitaire tel que $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = U(t) \underline{t}(t)$ avec $U \geq 0$, et $\underline{n}(t)$ le vecteur unitaire tel que $(\underline{t}, \underline{n})$ forment un repère orthonormé direct. Étendre la définition du rayon de courbure R au cas $R < 0$ afin de pouvoir projeter plus simplement les équations dans le repère direct $(\underline{t}, \underline{n})$.

On note s la coordonnée curviligne le long de la trajectoire et $\tilde{\underline{x}}(s) = \underline{x}(t)$, $\tilde{\underline{t}}(s) = \underline{t}(t)$ et $\tilde{\underline{n}}(s) = \underline{n}(t)$ les fonctions paramétrées avec cette nouvelle variable. Le rayon de courbure $\tilde{R}(s)$ est défini par la relation $\frac{d}{ds}\tilde{\underline{t}}(s) = \tilde{\underline{n}}(s)/\tilde{R}(s)$. Comme $\underline{t}^2 = 1$, on a $\underline{t} \cdot \underline{n} = 0$. On peut imposer à R d'être positif, ce qui définit le sens de \underline{n} , ou bien imposer que $(\underline{t}, \underline{n})$ forme un repère direct, ce qui définit le signe de R . Cette dernière option est préférée ici.

4) En notant $\underline{U}(t) = \frac{d}{dt}\underline{x}(t)$, la vitesse de la particule, montrer que l'on peut écrire $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{dU}{dt}\underline{t} + \frac{U^2}{R}\underline{n}$.

En notant $s = S(t)$ le changement de coordonnée, on peut écrire $\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \frac{dS}{dt}(t) \frac{d}{ds}\tilde{\underline{x}}[S(t)]$. Comme $\frac{d}{dt}\underline{x} = U \underline{t}$ et $\frac{d}{ds}\tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{t}}$, on a $\frac{dS}{dt}(t) = U(t)$. On peut donc écrire $\frac{d}{dt}\underline{t}(t) = \frac{dS}{dt}(t) \frac{d}{ds}\tilde{\underline{t}}[S(t)] = U(t) \underline{n}(t)/R(t)$.
Donc $\frac{d}{dt}\underline{U} = \frac{d}{dt}(U \underline{t}) = \frac{dU}{dt} \underline{t} + \frac{U^2}{R}\underline{n}$.

5) On considère le champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}, t)$. Montrer que l'on peut définir les champs $\underline{t}(\underline{x}, t)$, $\underline{n}(\underline{x}, t)$, $U(\underline{x}, t)$ et $R(\underline{x}, t)$ tels que $\underline{U} = U \underline{t}$ et $\frac{D}{Dt}\underline{U} = \frac{DU}{Dt} \underline{t} + \frac{U^2}{R} \underline{n}$ et où $(\underline{t}, \underline{n})$ est un repère orthonormé direct.

Il suffit de passer en coordonnées lagrangiennes, considérer la trajectoire de chaque particule et d'appliquer les définitions précédentes en remplaçant la dérivée par rapport au temps des simples fonctions par la dérivée particulaire des champs.

6) Écrire les équations de base dans le cadre de l'approximation de Boussinesq dans le cas d'un fluide parfait d'entropie constante et en supposant que le mouvement est horizontal à une latitude où le paramètre de Coriolis est f .

Les équations sont $\nabla_H \cdot \underline{U} = 0$ et $\frac{D}{Dt}\underline{U} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla_H p - f \underline{k} \wedge \underline{U}$ où \underline{k} est le vecteur vertical unitaire. En effet, $\underline{F} = 0$ puisque le fluide est parfait, et on peut choisir $s = s_r$. L'équation $\frac{Ds}{Dt} = 0$ est alors trivialement satisfaite. La pression réelle est $p_r + p$.

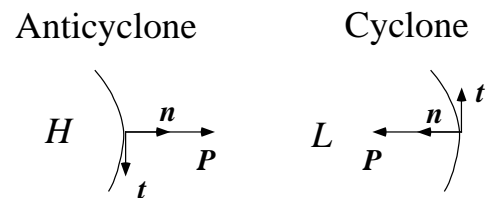
7) Écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans le repère naturel $(\underline{t}, \underline{n})$. On note $\frac{\partial p}{\partial s}$ et $\frac{\partial p}{\partial n}$ les composantes de $\nabla_H p$ dans le repère naturel.

La définition de \underline{n} avec rayon de courbure positif ou négatif permet d'écrire $\underline{k} \wedge \underline{U} = U \underline{n}$. En notant $\nabla_H p = \frac{\partial p}{\partial s} \underline{t} + \frac{\partial p}{\partial n} \underline{n}$, les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent $\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial s}$ et $\frac{U^2}{R} + f U = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial n}$.

8) On considère un région de l'écoulement pour laquelle $R < 0$ et $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$. Montrer que l'on peut écrire l'inégalité $\frac{1}{\rho_r} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| \leq \frac{f^2 |R|}{4}$. Une telle inégalité existe-t-elle dans le cas $R > 0$ et $\frac{\partial p}{\partial n} > 0$. Tracer schématiquement ces deux types d'écoulements en se limitant au cas de l'hémisphère Nord $f > 0$. On notera $\underline{P} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p$ la force de pression.

L'équation $U^2 + f R U + R \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ du second degré en U a pour solutions $U = -\frac{fR}{2} + \epsilon \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - R \frac{1}{\rho_r} \left| \frac{\partial p}{\partial n} \right|}$ avec $\epsilon = \pm 1$. Ces solutions existent seulement si $R \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial n} \leq \frac{f^2 R^2}{4}$.

Le cas $R < 0$ et $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ correspond à une circulation anticyclonique. La contrainte $\left| \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial n} \right| \leq \frac{f^2 |R|}{4}$ doit être satisfaite. Le maximum de pression (H) ne peut pas être trop "escarpé" si R est petit. Le cas $R > 0$ et $\frac{\partial p}{\partial n} < 0$ correspond à une circulation cyclonique. La condition $R \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial n} \leq 0 \leq \frac{f^2 R^2}{4}$ est toujours satisfaite, sans contrainte sur le minimum de pression (L).



NB : dans la PC3 on passe de la convention $U > 0$ et R de signe quelconque, à la convention $r > 0$ et U_θ de signe quelconque. Cette convention pourrait être généralisée au-delà des écoulements circulaires.

PC12 : Amphidromie de Kelvin

On s'intéresse ici à des écoulements à surface libre en milieu peu profond. C'est le cas, par exemple, des mouvements de marée dans l'océan pour lesquels l'échelle horizontale (milliers de km) est grande devant la profondeur (en moyenne 4 km). On décrit ces écoulements à l'aide du modèle de Saint-Venant en rotation. On se place dans le cas où le paramètre de Coriolis $f = f_0$ est constant. On étudie les ondes en milieu infini mais aussi en présence de parois, qui peuvent être deux côtes comme dans le cas de la Manche. Les ondes étudiées dans cette PC peuvent être observées expérimentalement à l'aide d'un batteur à houle dans un canal en rotation autour d'un axe vertical (MODEX).

PC12.1 Ondes en milieu infini

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas aux frontières afin de trouver des bases de solutions du problème linéaire.

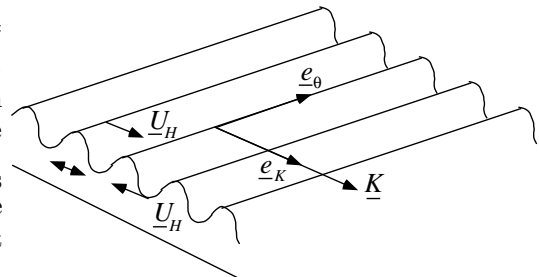
- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant dans le cas où le paramètre de Coriolis $f = f_0$ est constant et où le fond est horizontal ($h_{\text{inf}} = 0$). On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $h(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre. Linéariser ensuite ces équations autour de l'état de base $(u, v, h) = (0, 0, h_r)$ où h_r est une hauteur constante. On notera $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ les perturbations autour de cet état de base.

Les équations de Saint-Venant en rotation s'écrivent $\frac{Du}{Dt} - f_0 v = -g \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{Dv}{Dt} + f_0 u = -g \frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{Dh}{Dt} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$. On en déduit les équations linéarisées qui s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f_0 \tilde{v} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f_0 \tilde{u} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0.$$

- 2) Montrer qu'en l'absence de rotation $f_0 = 0$ et en écartant les équilibres géostrophique $\omega = 0$, la vitesse de propagation des ondes est $c = \sqrt{g h_r}$. En notant $\underline{e}_K = \underline{K}/K$ le vecteur unitaire dans la direction du vecteur d'onde \underline{K} de norme K , donner l'expression des champs $\underline{U}_H = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$ et h dans l'espace réel et indiquer la forme des trajectoires. Montrer que la relation de dispersion $\omega = -K c$ est en fait contenue dans la relation de dispersion $\omega = K c$ lorsque le vecteur d'onde \underline{K} peut prendre toutes les directions. Dessiner les lignes de phase de ces ondes. Comparer la vitesse de groupe \underline{c}_ρ et la vitesse de phase \underline{c}_g . Indiquer la forme des trajectoires et en donner une expression approchée pour une onde d'amplitude petite.

Une première méthode consiste à éliminer u et v du système $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0$. En dérivant la dernière équation par rapport au temps, on obtient $\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial t^2} - g h_r \nabla_H^2 \tilde{h} = 0$ où $\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. On reconnaît alors l'équation des ondes avec des vitesses de propagation $\pm c$ vérifiant $c^2 = g h_r$. Une seconde méthode consiste à chercher des solutions sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h}) \exp(ikx + ily - i\omega t)$. Le système linéaire s'écrit alors $-i\omega \hat{u} = -ik g \hat{h}$, $-i\omega \hat{v} = -il g \hat{h}$ et $-i\omega \hat{h} + h_r (ik \hat{u} + il \hat{v}) = 0$.



La relation de dispersion s'obtient en annulant le déterminant du système linéaire ce qui s'écrit :

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & gik \\ 0 & -i\omega & gil \\ h_r ik & h_r il & -i\omega \end{vmatrix} = 0.$$

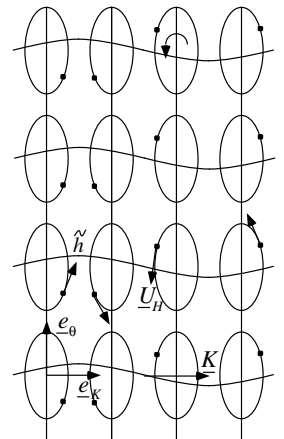
On peut se ramener au cas $l = 0$ ce qui conduit à :

$$\begin{vmatrix} -i\omega & 0 & gik \\ 0 & -i\omega & 0 \\ h_r ik & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = i\omega(\omega^2 - g h_r k^2) = 0.$$

Le cas $\omega = 0$ correspond à des équilibres géostrophiques qui ne sont pas considérés ici. En revenant au cas général $l \neq 0$, la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = g h_r (k^2 + l^2)$. En choisissant \hat{h} réel (par changement de l'origine du temps ou de l'espace), l'expression des champs d'une onde propagative rectiligne s'écrit $h(x, y, t) = \hat{h} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\underline{U}_H = g\hat{h} \frac{\underline{K}}{\omega} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_K$. On voit qu'une onde à gauche de vecteur d'onde \underline{K} et de relation de dispersion $\omega = -cK$ est une onde à droite de vecteur d'onde $-\underline{K}$ et de relation de dispersion $\omega = cK$ (il suffit de changer $\omega \rightarrow -\omega$, $\hat{h} \rightarrow \hat{h}^*$, $\hat{u} \rightarrow \hat{u}^*$ et $\hat{v} \rightarrow \hat{v}^*$). On peut donc se limiter à l'étude de la relation de dispersion $\omega = cK$. Les lignes de phases sont des droites perpendiculaires au vecteur d'onde \underline{K} . La vitesse de phase $\underline{c}_\varphi = c_\varphi \underline{e}_K$ et la vitesse de groupe $\underline{c}_g = c_g \underline{e}_K$ sont telles que $c_\varphi = c_g = c = \sqrt{g h_r}$. Ces ondes sont donc "non-dispersives". L'expression du champ de vitesse s'écrit $\underline{U}_H = g\hat{h} \frac{1}{c} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_K$. Les trajectoires sont des segments rectilignes. En supposant que \hat{h} est petit et en notant $\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$ la position moyenne, ces trajectoires sont approximées par l'expression $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 - g\hat{h} \frac{1}{c^2 K} \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_K$ avec $\frac{g\hat{h}}{c^2 K} = \frac{\hat{h}}{h_r K}$.

- 3) Calculer la relation de dispersion des ondes planes dans le cas où $f_0 \neq 0$ (ondes de Poincaré). En déduire la vitesse de phase \underline{c}_φ et la vitesse de groupe \underline{c}_g . Donner l'expression du champ de vitesse (u, v) et de la hauteur h pour une onde de vecteur d'onde $\underline{K} = (k_1, k_2)$. On notera $\underline{e}_\theta = (-l\underline{e}_x + k\underline{e}_y)/K$. Montrer que la seule relation $\omega = \sqrt{f_0^2 + c^2 K^2}$ suffit à décrire la relation de dispersion. Dessiner schématiquement les trajectoires.

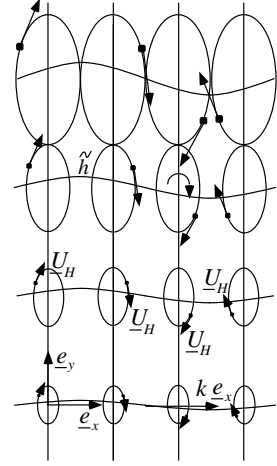
La relation de dispersion est $\begin{vmatrix} -i\omega & -f_0 & gik \\ f_0 & -i\omega & 0 \\ h_r ik & 0 & -i\omega \end{vmatrix} = i\omega(\omega^2 - f_0^2 - g h_r k^2) = 0$ dans le cas particulier où $l = 0$. En écartant le cas $\omega = 0$ et en revenant au cas général $l \neq 0$, la relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = f_0^2 + g h_r (k^2 + l^2) = f_0^2 + c^2 K^2$. La vitesse de phase $\underline{c}_\varphi = c_\varphi \underline{e}_K$ est telle que $c_\varphi = \frac{\omega}{K}$. La vitesse de groupe est $\underline{c}_g = c_g \underline{e}_K$ est telle que $c_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{c^2 K^2}{c^2 K^2 + f_0^2} c_\varphi$. Le système linéaire $-i\omega \hat{u} - f_0 \hat{v} = -g i k \hat{h}$, $-i\omega \hat{v} + f_0 \hat{u} = -g i l \hat{h}$ et $-i\omega \hat{h} + h_r (i k \hat{u} + i l \hat{v}) = 0$ permet d'écrire $\hat{u} = \frac{1}{\omega^2 - f_0^2} (\omega k + i f_0 l) g \hat{h}$ et $\hat{v} = \frac{1}{\omega^2 - f_0^2} (\omega l - i f_0 k) g \hat{h}$. Comme $\omega^2 - f_0^2 = c^2 K^2$, on peut écrire $\hat{u} \underline{e}_x + \hat{v} \underline{e}_y = g \hat{h} \frac{1}{c^2 K} (\omega \underline{e}_k - i f_0 \underline{e}_\theta)$. En choisissant \hat{h} réel (il suffit de changer l'origine du temps ou de l'espace, on obtient $h = \hat{h} \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t)$ et $\underline{U}_H = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y = g \hat{h} \frac{1}{c^2 K} [\omega \cos(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_K + f_0 \sin(\underline{K} \cdot \underline{x} - \omega t) \underline{e}_\theta]$. Si \hat{h} est petit, les trajectoires $\underline{x}(t)$ vérifient $\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{U}_H(x_0, y_0, t)$ où (x_0, y_0) est la position moyenne. Les particules décrivent donc des ellipses dans un plan horizontal.



- 4) On cherche maintenant des solutions sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h}) e^{ikx + \beta y - i\omega t}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ (ondes de Kelvin généralisées). Écrire la relation que doivent satisfaire les grandeurs (k, β, ω) pour obtenir des solutions non nulles. Donner l'expression des champs h et \underline{U}_H réels associés à ces ondes.

Le système linéaire s'écrit
$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f_0 & ik g \\ f_0 & -i\omega & \beta g \\ ik h_r & \beta h_r & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{pmatrix} = 0.$$
 En annulant le

déterminant, on obtient $i\omega[\omega^2 - f_0^2 - c^2(k^2 - \beta^2)] = 0$. Ce résultat peut être directement trouvé en posant $il = \beta \Leftrightarrow l = -i\beta$ dans l'expression des ondes de Poincaré. La relation de dispersion dans le cas $\omega \neq 0$ s'écrit alors $\omega^2 = f_0^2 + c^2(k^2 - \beta^2)$ en notant $c = \sqrt{gh_r}$. On peut ne retenir que les cas $\omega > 0$ en invoquant la symétrie $\omega \rightarrow -\omega$, $\hat{h} \rightarrow \hat{h}^*$, $\hat{u} \rightarrow \hat{u}^*$ et $\hat{v} \rightarrow \hat{v}^*$. Le système linéaire s'écrit $-i\omega \hat{u} - f_0 \hat{v} = -gik \hat{h}$, $-i\omega \hat{v} + f_0 \hat{u} = -g\beta \hat{h}$ et $-i\omega \hat{h} + h_r(ik \hat{u} + \beta \hat{v}) = 0$. Dans le cas où $f_0 \neq \omega$, c'est-à-dire lorsque $\beta^2 \neq k^2$, on peut écrire $\hat{u} = \frac{1}{\omega^2 - f_0^2}(\omega k + f_0 \beta) g \hat{h}$ et $\hat{v} = -\frac{1}{\omega^2 - f_0^2} i(\omega \beta + f_0 k) g \hat{h}$. En remarquant que $\omega^2 - f_0^2 = c^2(k^2 - \beta^2)$, et en choisissant \hat{h} réel on obtient $\tilde{h} = \hat{h} \cos \varphi(x, t) e^{\beta y}$ et $\underline{U}_H = \frac{g \hat{h}}{c^2} \left[\frac{\omega k + f_0 \beta}{k^2 - \beta^2} \cos \varphi(x, t) \underline{e}_x + \frac{\omega \beta + f_0 k}{k^2 - \beta^2} \sin \varphi(x, t) \underline{e}_y \right] e^{\beta y}$ avec $\varphi(x, t) = kx - \omega t$. Si \tilde{h} est petit, les trajectoires $\underline{x}(t)$ vérifient $\frac{d}{dt} \underline{x} = \underline{U}_H(x_0, y_0, t)$ où (x_0, y_0) est la position moyenne. Les particules décrivent donc des ellipses dans un plan horizontal. Les lignes de phases sont perpendiculaires à \underline{e}_x et l'amplitude des oscillations croît avec y lorsque $\beta > 0$ et décroît lorsque $\beta < 0$.



Des deux cas particuliers $(\beta, \omega) = (\pm k, f_0)$ seuls le cas $\beta = -k$ conduit à une solution non triviale. Cette onde a pour expression $h = \hat{h} \cos \varphi e^{-ky}$ et $\underline{U}_H = \frac{g \hat{h}}{2c^2} \left[\frac{f_0^2 - c^2 k^2}{f_0 k} \cos \varphi(x, t) \underline{e}_x + \frac{f_0^2 + c^2 k^2}{f_0 k} \sin \varphi(x, t) \underline{e}_y \right] e^{-ky}$ avec $\varphi = \cos(kx - f_0 t)$.

PC12.2 Ondes de Poincaré et de Kelvin dans un canal

On suppose maintenant que l'écoulement est restreint au demi-plan $y \geq 0$. On impose à la vitesse normale v de s'annuler sur la frontière $y = 0$.

- 5) Construire les solutions des équations de Saint-Venant en rotation vérifiant ces conditions aux limites dans la base des ondes de Poincaré.

Le vecteur vitesse d'une onde de Poincaré propagative décrit un ellipse dont les grands axes et petits axes sont dans un rapport ω/f_0 . On ne peut annuler la vitesse \tilde{v} qu'en superposant une onde de Poincaré d'amplitude \hat{h} et de nombre d'onde $\underline{K}_+ = k \underline{e}_x + l \underline{e}_y$ et une onde de Poincaré d'amplitude $-\hat{h}$ et de nombre d'onde $\underline{K}_- = k \underline{e}_x - l \underline{e}_y$, afin d'obtenir une structure d'onde stationnaire dans la direction y . En choisissant \hat{h} réel et en notant $\varphi_{\pm} = kx \pm l(y - y_0) - \omega t$, la hauteur s'écrit alors $\tilde{h}(x, y, t) = \hat{h} \cos \varphi_+ - \hat{h} \cos \varphi_- = -2\hat{h} \sin(kx - \omega t) \sin[l(y - y_0)]$ où y_0 est pour l'instant arbitraire. La vitesse dans la direction \underline{e}_y s'écrit $\tilde{v} = \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} (\omega l \cos \varphi_+ + f_0 k \sin \varphi_+) - \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} (-\omega l \cos \varphi_- + f_0 k \sin \varphi_-) = 2 \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} \cos(kx - \omega t) \{ \omega l \cos[l(y - y_0)] + f_0 k \sin[l(y - y_0)] \}$. En choisissant $y_0 = \frac{1}{l} \arctg \left(\frac{\omega l}{f_0 k} \right)$, l'expression de la vitesse devient $\tilde{v} = -2 \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} \cos(kx - \omega t) \sin(l y)$ et la condition aux limites $v = 0$ en $y = 0$ est donc satisfaite. La vitesse dans la direction \underline{e}_x s'écrit $\tilde{u} = \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} (\omega k \cos \varphi_+ - f_0 l \sin \varphi_+) - \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} (\omega k \cos \varphi_- + f_0 l \sin \varphi_-) = -2 \frac{g \hat{h}}{c^2 K^2} \sin(kx - \omega t) \sin[l(y - y_1)]$ avec $y_1 = y_0 + \frac{1}{l} \arctg \left(\frac{f_0 l}{\omega k} \right) = \frac{1}{l} \arctg \left(\frac{k l c^2}{f_0 \omega} \frac{k^2 + l^2}{k^2 - l^2} \right)$. Les trajectoires sont des ellipses dont les grand et petit axes sont dans un rapport $\sin(l y) / \sin[l(y - y_1)]$.

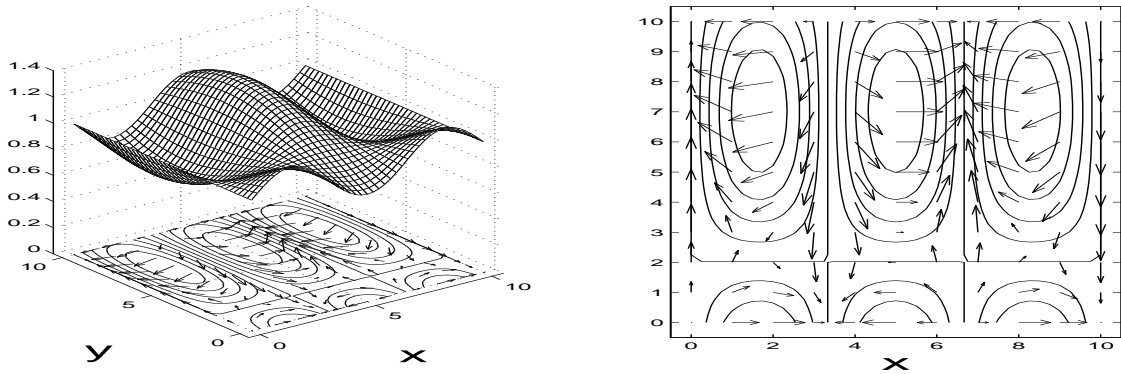


Figure : onde de Poincaré stationnaire en y . Hauteur \tilde{h} et champ de vitesse \underline{U}_H pour $\omega/f_0 = 2.25$

6) En excluant le cas $\beta^2 = k^2$, construire les solutions des équations de Saint-Venant en rotation vérifiant $v = 0$ en $y = 0$ dans la base des ondes de Kelvin généralisées. On appelle “ondes de Kelvin” ces solutions.

Dans le cas $\beta^2 \neq k^2$, la seule manière d’obtenir $v = 0$ en $y = 0$ pour les ondes de Kelvin généralisées consiste à ne retenir que les ondes qui vérifient $\omega\beta + f_0k = 0$. Ces ondes, appelées “ondes de Kelvin”, ont la particularité que la vitesse v est nulle en tout point de l’espace. En associant cette relation avec la relation de dispersion, on voit que le couple $(\omega, \beta c)$ est solution du système $w^2 + (\beta c)^2 = f_0^2 + c^2 k^2$ et $\omega(\beta c) = -f_0(k c)$ ce qui entraîne $(\omega, \beta c) = (f_0, -kc)$ ou $(\omega, \beta c) = (kc, -f_0)$. La première solution est exclue car on est dans le cas $\beta^2 \neq k^2$. La seconde solution $\omega = kc$ et $\beta = -f_0/k$ conduit à la solution $\tilde{h} = \hat{h} \cos[k(x - ct)]e^{-\frac{f_0}{k}y}$ et $\underline{U}_H = g\hat{h} \underline{e}_x$.

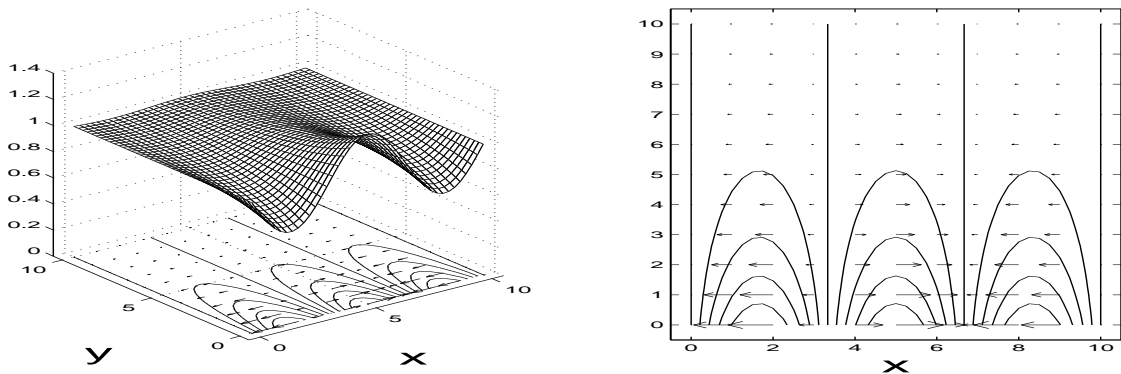


Figure : onde de Kelvin de bord. Hauteur \tilde{h} et champ de vitesse \underline{U}_H pour $\omega/f_0 = 2.25$

PC12.3 Amphidromie de Kelvin

On suppose maintenant que l’écoulement est confiné dans un canal de largeur L . Les conditions aux limites sont donc $v = 0$ en $y = 0$ et en $y = L$.

7) On cherche des solutions sur la base des ondes de Poincaré. Montrer que seules les ondes de Poincaré stationnaires vérifiant $l = n\pi/L$ avec $n \in \mathbb{N}$ satisfont les conditions aux limites. En déduire que $L_{\min} = c \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - f_0^2}}$ est la taille critique en-deçà de laquelle on ne peut pas trouver d’onde de Poincaré stationnaires si ω et f_0 sont données (batteur à houle ou marée) en supposant que $\omega > f_0$. Calculer cette longueur pour la Manche en supposant que la profondeur moyenne est $h_r = 50$ m, que la marée est semi-durée et que la latitude est environ 45° . Comparer avec la largeur moyenne $L = 150$ km de cette mer.

Les conditions aux limites $v = 0$ en $y = 0$ et $y = L$ imposent que $\sin(lL) = 0$. On a donc $l = n\frac{\pi}{L}$ avec n entier. La relation de dispersion entraîne alors $\omega^2 = f_0^2 + c^2 k^2 + c^2 n^2 \frac{\pi^2}{L^2}$. Si $\omega \leq f_0$, aucune onde de Poincaré n'est possible. Si $\omega > f_0$, on peut écrire $\omega^2 \leq f_0^2 + c^2 \frac{\pi^2}{L^2}$ ce qui entraîne $L^2 \leq c^2 \frac{\pi^2}{\omega^2 - f_0^2}$. Pour la marée dans la Manche, on a les valeurs $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\omega \sim 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $c \sim 20 \text{ m/s}$ et $L_{\min} \sim 700 \text{ km}$. La largeur du canal de la Manche est donc trop petite pour que l'on y observe des ondes de Poincaré.

8) On cherche ensuite des solutions sur la base des ondes de Kelvin. Montrer que toutes les ondes de Kelvin sont solutions.

Comme $v = 0$ en tout point pour une onde de Kelvin, les deux conditions aux limites sont automatiquement satisfaites.

9) On s'intéresse à superposition de deux ondes de Kelvin de même pulsation, se propageant en sens contraire avec la même célérité mais d'amplitudes différentes et de signes opposés. Donner l'expression du champ de hauteur résultant en notant ω la pulsation, k_0 le module du nombre d'onde en \underline{e}_x , $-h_d$ l'amplitude de l'onde se propageant vers les x croissante et h_g l'amplitude de l'onde se propageant en sens contraire.

La hauteur résultante s'écrit $\hat{h}(x, y, t) = -h_d \cos(k_0 x - \omega t) e^{-\frac{f_0}{k_0} y} + h_g \cos(-k_0 x - \omega t) e^{\frac{f_0}{k_0} y}$.

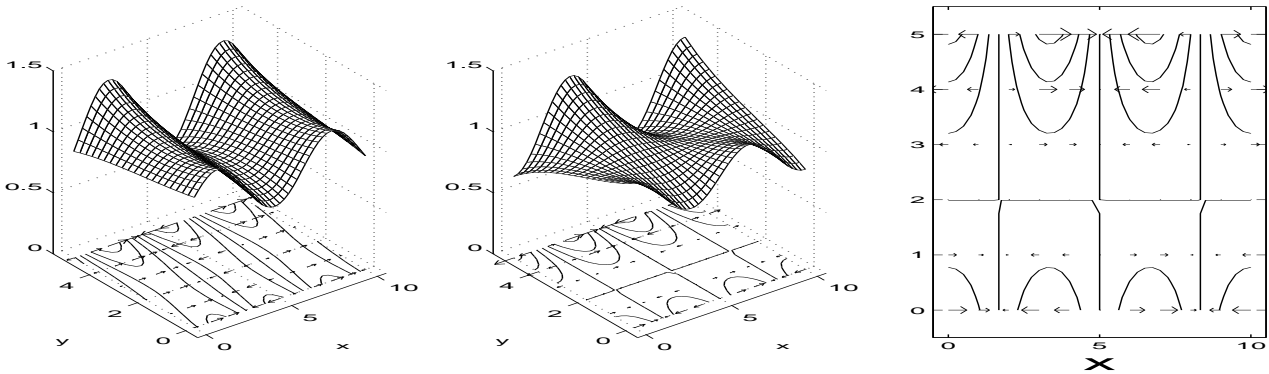


Figure : superposition de deux ondes de Kelvin. Hauteur \hat{h} et champ de vitesse \underline{U}_H pour $h_d/h_g = .6$

10) Montrer qu'en effectuant le changement de variable $X = kx$, $T = \omega t$ et $Y = \frac{f_0}{c} y - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{h_d}{h_g}$ et en posant $h_0 = \sqrt{2 h_d h_g}$, l'expression du champ de hauteur peut se mettre sous la forme $\hat{h} = h_0 [\cos(X + T) e^Y - \cos(X - T) e^{-Y}]$. Montrer alors que $\hat{h} = h_0 R \cos(T - \Theta)$ avec $R = \sqrt{2} \sqrt{\text{ch}(2Y) - \cos(2x)}$ et Θ vérifiant $\text{th} \Theta = \text{th} Y / \text{tg} X$.

On peut écrire $\hat{h} = -\cos(X - T) e^{-\frac{f_0}{c} y + \text{Ln} h_d} + \cos(X + T) e^{\frac{f_0}{c} y + \text{Ln} h_g}$. En remarquant que $\text{Ln} h_d = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{h_d}{h_g} + \frac{1}{2} \text{Ln} h_d h_g$ et $\text{Ln} h_g = -\frac{1}{2} \text{Ln} \frac{h_d}{h_g} + \frac{1}{2} \text{Ln} h_d h_g$ on obtient le résultat indiqué. On peut alors écrire $\hat{h} = h_0 [\cos(X + T) e^Y - \cos(X - T) e^{-Y}] = 2 h_0 [\text{sh} Y \cos Y \cos T - \text{ch} Y \sin Y \sin X]$. En définissant B par $B = \sqrt{\text{sh}^2 Y \cos^2 X + \text{ch}^2 Y \sin^2 X}$ et Θ par les relations $\sin \Theta = \text{sh} Y \cos Y / B$ et $\cos \Theta = \text{ch} Y \sin Y / B$, on peut écrire $\hat{h} = 2 h_0 B \cos(T - \Theta)$. On montre alors que $2 B = \sqrt{2} \sqrt{\text{ch}(2Y) - \cos(2x)}$ ce qui permet de conclure que $\hat{h} = h_0 R \cos(T - \Theta)$.

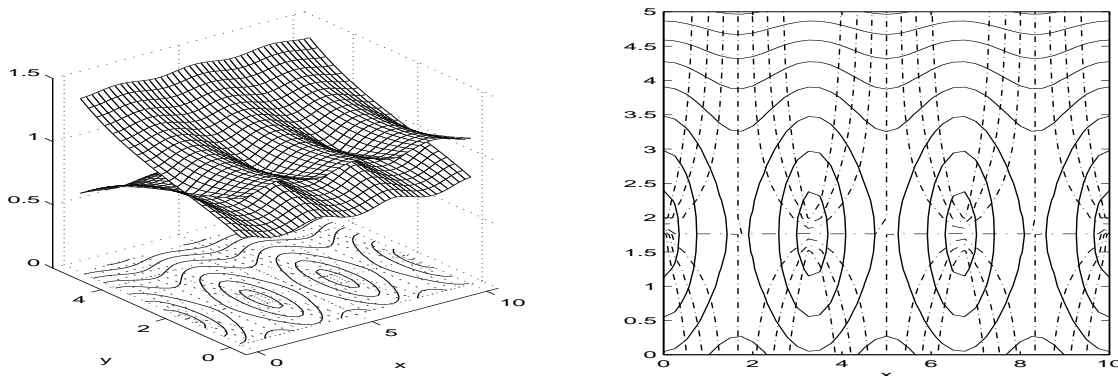


Figure : hauteurs extrémales (—) et phase de l'oscillation (. -) pour la superposition.

- 11) Montrer que les lignes d'égale amplitude de l'onde $R(X, Y) = cste$ sont orthogonales aux lignes d'égale phase $\Theta(X, Y) = cste$ (lignes cotidales). En déduire que les lignes cotidales convergent vers les points où l'amplitude de l'onde est nulle (points amphidromiques).

Si on note $Z = X + iY \in \mathcal{C}$ et $W = R(\cos \Theta + i \sin \Theta) = U + iV$, on peut écrire $W = \operatorname{ch} Y \sin X + i \operatorname{sh} Y \cos X$. On remarque alors que $W = \cos(iY) \sin X + \operatorname{sh}(iY) \cos X = \sin(X + iY) = \sin(Z)$. L'application $F(Z)$ est donc holomorphe. Les directions orthogonales dans le plan (X, Y) le restent donc dans le plan (U, V) , et donc dans le plan des coordonnées polaires (R, Θ) . Les lignes cotidales sont donc perpendiculaires aux lignes d'égale amplitude et convergent vers les points amphidromiques.

PC13 : Ondes équatoriales

Cette PC s'intéresse aux ondes équatoriales dans l'approximation du β -plan équatorial. Dans le cadre du modèle de Saint-Venant, on calcule l'ensemble des ondes équatoriales. On montre ensuite que seules les ondes de Rossby subsistent lorsque l'on passe du modèle de Saint-Venant au modèle quasi-géostrophique. Les autres ondes sont "filtrées" par cette approximation, comme le sont les ondes sonores dans l'approximation incompressible ou l'approximation de Boussinesq.

PC13.1 Modèle de Saint-Venant sur un β -plan équatorial

- 1) Écrire les équations du modèle de Saint-Venant dans le cas où le paramètre de Coriolis $f = \beta y$ est celui d'un " β -plan équatorial" et où le fond est horizontal ($h_{\text{inf}} = 0$). On notera (u, v) les composantes de la vitesse horizontale et $h(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre. Linéariser ensuite ces équations autour de l'état de base $(u, v, h) = (0, 0, h_r)$ où h_r est une hauteur constante. On notera $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ les perturbations autour de cet état de base.

Les équations de Saint-Venant de l'approximation du β -plan équatorial s'écrivent $\frac{Dv}{Dt} - \beta y v = -g \frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{Dv}{Dt} + \beta y u = -g \frac{\partial h}{\partial y}$ et $\frac{Dh}{Dt} - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$. On en déduit les équations linéarisées qui s'écrivent

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \beta y \tilde{v} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \beta y \tilde{u} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0.$$

- 2) Justifier la recherche de solutions sous la forme $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{h}(y)]e^{i(kx - \omega t)}$, et écrire le système linéaire d'équations différentielles ordinaires que doivent satisfaire les fonction \hat{u} , \hat{v} et \hat{h} . Eliminer \hat{u} et \hat{h} pour n'obtenir qu'une équation différentielle ordinaire pour \hat{v} . On notera $c^2 = g h_r$

Le système est invariant par translation en x et t mais pas en y . Les solutions de base ont donc la forme recherchée. Le système s'écrit alors $-i\omega \hat{u} - \beta y \hat{v} = -ik g \hat{h}$, $-i\omega \hat{v} + \beta y \hat{u} = -g \frac{d\hat{h}}{dy}$ et $-i\omega \hat{h} + h_r ik \hat{u} + h_r \frac{d\hat{v}}{dy} = 0$. L'élimination de \hat{u} s'écrit $\hat{u} = \frac{1}{\omega}(i\beta y \hat{v} + k g \hat{h})$, ce qui entraîne

$$(\omega^2 - \beta^2 y^2)\hat{v} = -i\beta y k g \hat{h} - i\omega \frac{dg\hat{h}}{dy} \quad \text{et} \quad (\omega^2 - k^2 c^2) g \hat{h} = -i c^2 \omega \frac{d\hat{v}}{dy} + i c^2 k \beta y \hat{v}.$$

L'élimination de \hat{h} entraîne alors la relation $\omega^2 \left\{ \frac{d^2 \hat{v}}{dy^2} - \left[\left(\frac{k\beta}{\omega} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{\beta^2 y^2}{c^2} \right] \hat{v} \right\} = 0$.

PC13.2 Spectre discret d'ondes équatoriales

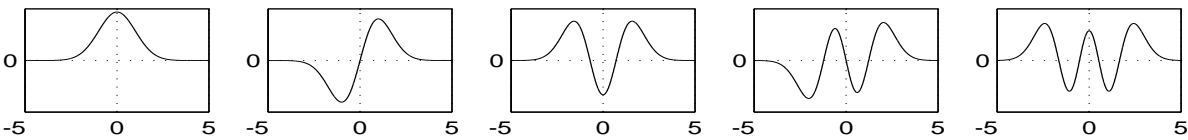


Figure : Tracé des premières fonctions propres normalisées $H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}} / (2^n n! \pi^{1/2})^{1/2}$.

- 3) On considère l'opérateur $\mathcal{H}_a = -\frac{d^2}{dy^2} + V_a(y)$ avec $V_a(y) = a^2 y^2$. Trouver l'ensemble des valeurs propres λ_n et des fonctions propres $\psi_n(y)$ cet opérateur dans $L^2(\mathbb{R})$. On supposera connu le fait que les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dY^2} + Y^2$ sont les entiers impairs $\Lambda_n = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$

\mathbb{N} et que les fonctions propres s'écrivent $\Psi_n(Y) = H_n(Y)e^{-\frac{Y^2}{2}}$ où $H_n(Y) = (-1)^n e^{Y^2} \frac{d^n}{dY^n} (e^{-Y^2})$ sont les polynômes d'Hermite $H_0(Y) = 1, H_1(Y) = 2Y, H_2(Y) = 4Y^2 - 2$, etc. Formuler l'analogie avec la mécanique quantique.

On sait que $\mathcal{H}\Psi_n(Y) = \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n(Y) = (2n + 1) \Psi_n(Y)$. En posant $Y = \sqrt{a} y$ et $\psi_n(y) = \Psi_n(\sqrt{a} y)$ on peut écrire

$$\mathcal{H}_a \psi_n(y) = \left(-\frac{d^2}{dy^2} + a^2 y^2\right) \psi_n(y) = a \left(-\frac{d^2}{dY^2} + Y^2\right) \Psi_n(\sqrt{a} y) = a \Lambda_n \Psi_n(\sqrt{a} y) = a \Lambda_n \psi_n(y).$$

On en déduit donc que $\lambda_n = a(2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\psi_n(y) = H_n(\sqrt{a} y)e^{-\frac{a y^2}{2}}$. On peut voir \mathcal{H}_a comme le Hamiltonien de l'équation de Schrodinger associée au potentiel harmonique $V_a(y) = a^2 y^2$. Les valeurs propres $\lambda_n = a(2n + 1)$ sont alors les niveaux d'énergie associés à ce potentiel, et les fonctions propres $\psi_n(y)$ sont les densités de probabilité de la particule piégée dans le potentiel pour ces différents états quantiques.

- 4) En déduire qu'il n'existe de solution $\hat{v}(y)$ bornée pour y grand que pour $\hat{v} = 0$ ou bien pour $\hat{v}(y)$ non nul lorsque l'une des relations de dispersion $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec $n \in \mathbb{N}$ est satisfaite. Indiquer l'expression de ces profils $\hat{v}(y)$ et calculer leur échelle caractéristique $L = \sqrt{c/\beta}$ du "mode barotrope" en prenant $h_r = 4$ km pour l'océan et $h_r = 10$ km pour l'atmosphère. Comparer avec le cas $h_r = 100$ m pour l'océan et $h_r = 400$ m pour l'atmosphère obtenu en s'intéressant au "premier mode barocline" (hauteurs équivalentes).

Il suffit de remarquer que l'équation pour \hat{v} s'écrit $\mathcal{H}_a \hat{v} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega}\right) \hat{v}$ avec $a = \frac{\beta}{c}$. Les solutions sont alors $\hat{v} = 0$ ou $\hat{v} = A\psi_n\left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y\right) = AH_n\left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y\right) e^{-\frac{\beta y^2}{2c}}$ avec A arbitraire pour les valeurs de (ω, k) vérifiant $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ avec n entier. L'application numérique conduit à $\Omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 2\Omega/a \sim 2 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ où $a \sim 6000$ km est le rayon de la terre. Dans le cas barotrope, on a $c \sim 200$ m/s pour l'océan et $c \sim 300$ m/s pour l'atmosphère, ce qui conduit à $L \sim 3000$ km pour l'océan et $L \sim 3500$ km pour l'atmosphère. Dans le cas barocline, on a $c \sim 30$ m/s pour l'océan et $c \sim 60$ m/s pour l'atmosphère, ce qui conduit à $L \sim 1000$ km pour l'océan et $L \sim 1500$ km pour l'atmosphère.

PC13.3 Ondes de Kelvin équatoriales ($n = -1$)

- 5) On s'intéresse tout d'abord à la solution $\hat{v} = 0$. Dans ce cas, montrer qu'il existe des solutions non triviales pour $\hat{h}(y)$ et $\hat{u}(y)$ si et seulement si (ω, k) vérifient la relation $\omega = kc$. Donner alors l'expression des ondes de Kelvin équatoriales.

Pour le cas de l'onde de Kelvin équatoriale $\hat{v} = 0$, on a $\hat{u} = \frac{1}{\omega} k g \hat{h}$, $0 = -i\beta y k g \hat{h} - i\omega \frac{d(g\hat{h})}{dy}$ et $(\omega^2 - k^2 c^2) g \hat{h} = 0$. On en déduit que $\frac{d(g\hat{h})}{dy} + \frac{\beta y k}{\omega} g \hat{h} = 0$ et donc $g\hat{h}(y) = g\hat{h}(0) e^{-\frac{\beta k y^2}{2\omega}}$. On doit aussi satisfaire $\omega^2 = k^2 c^2$. La solution $\omega = -kc$ n'est pas admissible car elle conduit à une fonction $\hat{h}(y)$ non bornée. La relation de dispersion de l'onde de Kelvin est donc $\omega = kc$, comme pour une onde dans un canal sans rotation. L'expression de ces ondes est donc $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = \left(\frac{a}{c}, 0, 1\right) h_0 e^{-\frac{\beta y^2}{2c}} e^{i(kx - \omega t)}$.

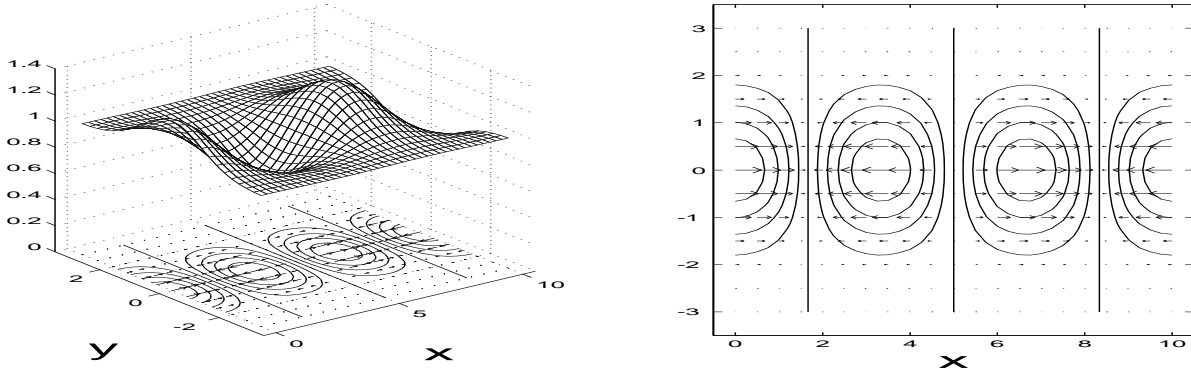


Figure : Onde de Kelvin équatoriale : $\hat{v} = 0$ et $\omega = kc$.

PC13.4 Ondes mixtes Rossby-gravité ($n = 0$)

- 6) On s'intéresse au cas où $\hat{v}(y)$ est l'une des solutions non nulles. Parmi toutes ces solutions, on cherche celles pour lesquelles $\hat{h}(y)$ est borné pour y grand. Montrer que $\hat{h}(y)$ est solution de l'équation $\frac{d(\hat{g}\hat{h})}{dy} + \frac{\beta k y}{\omega} \hat{g}\hat{h} = \frac{i}{\omega} (\omega^2 - \beta^2 y^2) A \psi_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right)$. On admettra qu'il n'y a pas de solution bornée non triviale dans le cas $n = 0$ et $\omega = -kc$. Montrer que $\hat{h}(y)$ est borné dans les autres cas et indiquer son expression en fonction de $\hat{v}(y)$.

Les solutions non nulles sont les fonctions $\hat{v}(y) = A \psi_n \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right)$ avec n entier et A non nul. Le profil $\hat{h}(y)$ découle du profil $\hat{v}(y)$ par la relation $\frac{d(\hat{g}\hat{h})}{dy} + \frac{\beta k y}{\omega} \hat{g}\hat{h} = \frac{i}{\omega} (\omega^2 - \beta^2 y^2) \hat{v}$, d'où le résultat annoncé. Si $\omega^2 - k^2 c^2 \neq 0$, on peut écrire $\hat{g}\hat{h} = i \left(\frac{c^2 k \beta y \hat{v} - c^2 \omega \frac{d\hat{v}}{dy}}{\omega^2 - k^2 c^2} \right)$, ce qui prouve que $\hat{h}(y)$ est borné. Si $\omega^2 = k^2 c^2$ le profil $\hat{v}(y)$ doit satisfaire l'équation $\frac{d\hat{v}}{dy} - \frac{k\beta y}{\omega} \hat{v} = 0$ ce qui conduit à $\hat{v}(y) = \hat{v}(0) e^{\frac{k\beta y^2}{2\omega}}$. Pour $\omega = kc$, on doit avoir $\hat{v}(0) = 0$ pour que $\hat{v}(y)$ soit borné et l'on retrouve les ondes de Kelvin équatoriales déjà étudiées. Pour $\omega = -kc$, on retrouve $\hat{v}(y) = \hat{v}(0) \psi_0 \left(\sqrt{\frac{\beta}{c}} y \right)$ qui est borné mais il n'existe pas de solution $\hat{h}(y)$ bornée, comme il a été admis.

- 7) On s'intéresse au cas $n = 0$. Dans ce cas, montrer qu'il existe des solutions non triviales si et seulement si (ω, k) vérifient la relation $\omega^2 - kc\omega - \beta c = 0$. Montrer que l'on peut se restreindre au cas $\omega > 0$ sans perte de généralité et tracer alors la relation de dispersion des ondes mixtes Rossby-gravité dans le demi-plan (k, ω) .

La relation $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n+1)$ s'écrit $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} - \frac{\beta}{c} = \left(\frac{\omega}{c} - k - \frac{\beta}{\omega} \right) \left(\frac{\omega}{c} + k \right) = 0$ dans le cas $n = 0$. Le cas $\omega = -kc$ est exclu car il conduit à une solution $\hat{h}(y)$ non bornée. Les cas $\omega < 0$ se ramènent aux cas $\omega > 0$ en remarquant que la symétrie $\omega \rightarrow -\omega, k \rightarrow -k, \hat{u} \rightarrow \hat{u}^*, \hat{v} \rightarrow \hat{v}^*$ et $\hat{h} \rightarrow \hat{h}^*$ conduit à la même solution réelle.

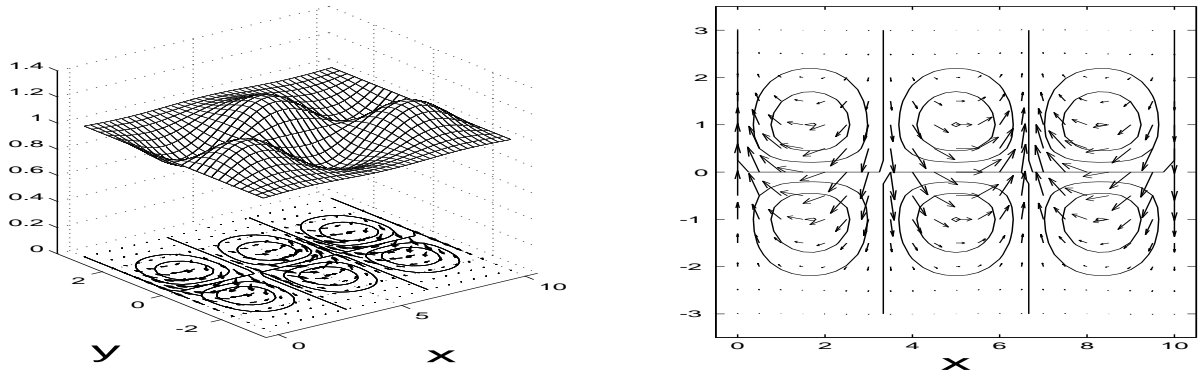
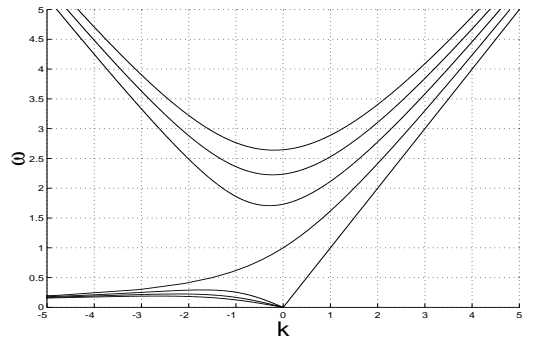


Figure : Onde mixte Rossby-gravité : $n = 0$.

PC13.5 Ondes d’inertie-gravité et ondes de Rossby ($n \geq 1$)

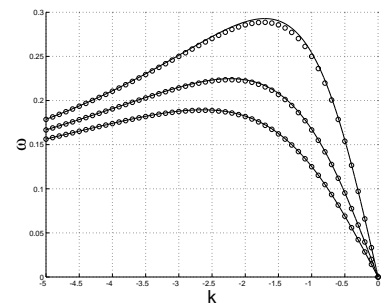
8) On s’intéresse maintenant aux cas $n \geq 1$. Exprimer alors k en fonction de ω et tracer les relations de dispersion des ondes d’inertie-gravité et de Rossby dans le demi-plan (k, ω) .

La relation de dispersion s’écrit $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ ou encore $k^2 + \frac{\beta}{\omega}k + \frac{(2n+1)\beta}{c} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré en k est $\Delta = \frac{\beta^2}{\omega^2} - 4\frac{(2n+1)\beta}{c} + 4\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\beta}{\omega} - 2\frac{\omega}{c}\right)^2 - 8n\frac{\beta}{c}$. Ce discriminant est positif pour $\left(\frac{\beta}{\omega} - 2\frac{\omega}{c}\right) > \sqrt{8n\frac{\beta}{c}}$ ou $\left(\frac{\beta}{\omega} - 2\frac{\omega}{c}\right) < -\sqrt{8n\frac{\beta}{c}}$ ce qui conduit à $\omega \leq \omega_n^+$ pour les ondes de Rossby et $\omega \leq \omega_n^-$ pour les ondes d’inertie gravité. La figure récapitule les relations de dispersion de tous les modes pour les ondes de Kelvin ($\omega = kc, n = -1$), l’onde mixte Rossby-gravité ($n = 0$), les ondes d’inertie gravité et les ondes de Rossby ($n = 1, 2, 3$).



9) Montrer que la relation de dispersion des ondes de Rossby (ω petit) peut être approximée par la relation $\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}$ avec $l^2 = (2n + 1)\frac{\beta}{c}$. En supposant que la distance moyennes entre les racines des polynômes d’Hermite décroît comme C/\sqrt{n} , où C est une constante, interpréter l comme un nombre d’onde. Comparer avec la relation de dispersion des ondes de Rossby du modèle quasi-géostrophique associé ($f_0 = 0, h_{inf} = 0$). Indiquer le sens de propagation des lignes de phase puis de l’énergie d’un paquet d’onde.

Pour les ondes de Rossby, on peut négliger $\frac{\omega^2}{c^2}$ devant les autres termes dans la relation de dispersion $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$, ce qui conduit à $-k^2 - \frac{k\beta}{\omega} = \frac{\beta}{c}(2n + 1)$ et donc $\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + (2n+1)\frac{\beta}{c}}$. La figure montre que cette approximation est correcte, même pour $n = 1$. La forme des fonctions $\psi_n(Y)$ ressemble à une sinusoïde au voisinage de $Y = 0$. On peut donc interpréter l comme le nombre d’onde de la fonction $\psi_n\left(\sqrt{\frac{\beta}{c}}y\right)$ si la distance moyenne entre les racines décroît comme C/\sqrt{n} . Cette relation de dispersion approchée est identique à la relation de dispersion des ondes de Rossby du modèle de Saint-Venant quasi-géostrophique.



Lorsque l est considéré comme un ensemble de valeurs discrètes (n petit), les lignes de phases sont parallèles à l'axe des y et se propagent vers l'ouest (x négatifs). La vitesse de groupe est alors positive (vers l'est) pour les paquets d'ondes courtes ($|k|$ moyen grand) et négative (vers l'ouest) pour les paquets d'ondes longues ($|k|$ moyen petit). Lorsque l est considéré comme un continuum de valeurs (n grand), les lignes de phase sont obliques et se déplacent vers le sud-ouest ou le nord-ouest. La vitesse de groupe décrit toutes les directions en fonction du vecteur d'onde (k, l) moyen du paquet d'onde considéré.

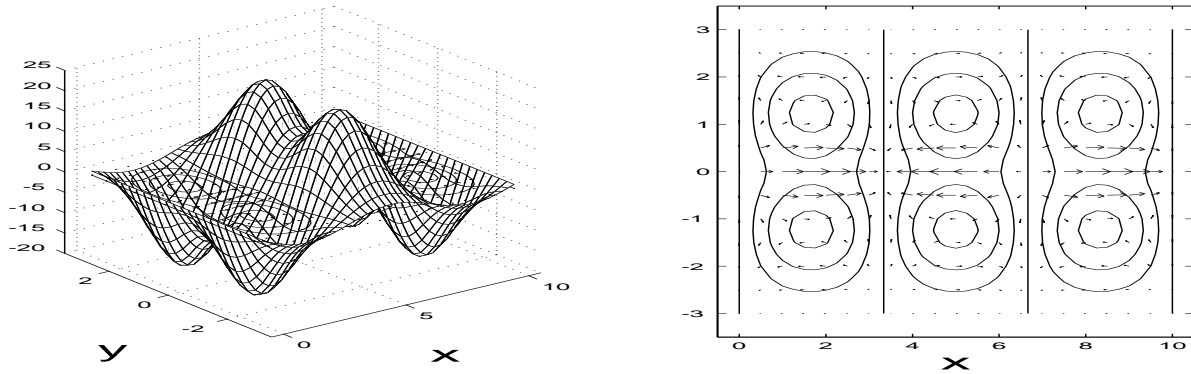


Figure : Onde de Rossby dans le cas $n = 1$. Représentation pour $k = -.5\sqrt{\frac{\beta}{c}}$.