

AÉRODYNAMIQUE COMPRESSIBLE
ET FLUIDES HÉTÉROGÈNES
Petites classes et éléments de cours

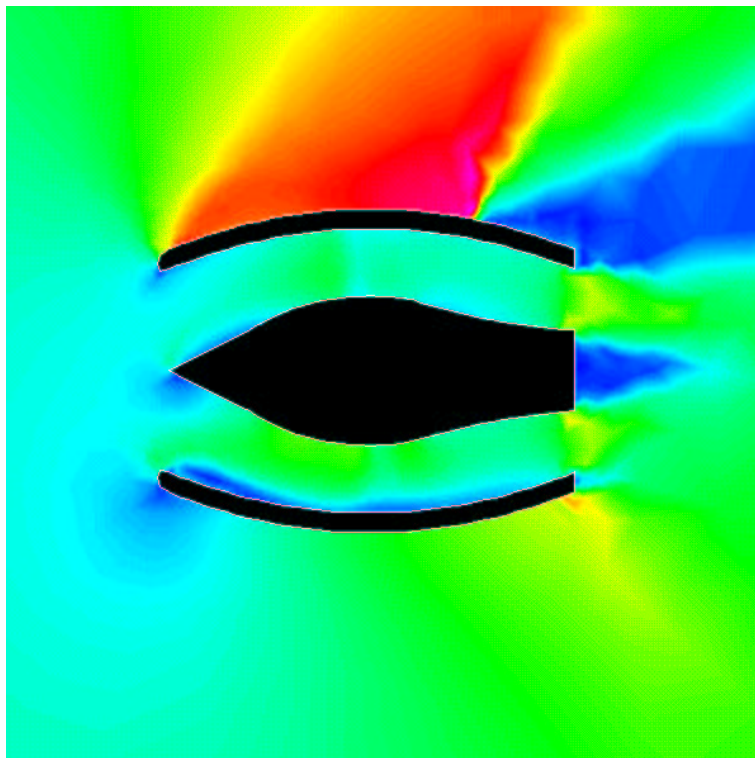


Photo : <http://www.enseeiht.fr/travaux/>

Olivier THUAL, INPT et X/Mécanique

31 juillet 2004

Table des matières

1	Ondes sonores dans une tuyère	9
1	Moteur de fusée et hypothèses simplificatrices	12
2	Approximation unidimensionnelle	14
3	Ondes sonores	16
2	Régimes continus de la tuyère de Laval	17
1	Modèle quasi-1D	20
2	Écoulement permanent	20
3	Vitesse du son pour un gaz parfait polytropique	22
4	Détermination des régimes continus	22
3	Onde de détente dans un canal hydraulique	27
1	Équations en eaux peu profondes	31
2	Frontière d'un écoulement uniforme	32
3	Onde simple de détente centrée	33
4	Calcul des trajectoires	34
4	Choc droit pour un gaz parfait polytropique	37
1	Équations de saut pour le choc droit	40
2	Choc droit pour un gaz parfait polytropique	42

3	Droite de Rayleigh et courbe d'Hugoniot	44
4	Grandeurs génératrices	47
5	Choc rectiligne et tube à choc	49
1	Choc rectiligne	52
2	Tube à choc	53
3	Limite des grands écarts de pressions	56
6	Régime discontinu de la tuyère de Laval	57
1	Classification des régimes	61
2	Régimes continus	63
3	Régimes discontinus	64
4	Choc oblique en sortie de tuyère	66
7	Détentes et chocs infinitésimaux	69
1	Choc droit infinitésimal	73
2	Choc oblique infinitésimal	74
3	Onde de détente infinitésimale	75
4	Détente le long d'une paroi convexe	78
8	Détente de Prandtl-Meyer et coudes supersoniques	81
1	Détente de Prandtl-Meyer	84
2	Coudes supersoniques	87
9	Écoulements permanents de perturbation	93
1	Écoulement incompressible	97
2	Écoulement subsonique	100
3	Écoulement supersonique	102

10	Écoulements transsoniques	105
1	Existence d'une ligne sonique	107
2	Écoulement transsonique au voisinage du col	109
11	Émission du son par une sphère	113
1	Sphère pulsant avec une vitesse radiale quelconque	115
2	Pulsation harmonique de la sphère	118
12	Propagation du son dans un milieu réactif	123
1	Ondes émises par un piston	126
13	Combustion d'une goutte immobile	133
1	Équations de Shvab-Zeldovich	135
2	Vaporisation de la goutte	136

Avant-Propos

Ce document regroupe les énoncés et corrigés d’une série de petites classes qui ont été construites dans le cadre de l’enseignement intitulé “Aérodynamique compressible” de la deuxième année de l’Ecole Polytechnique et de l’enseignement intitulé “Aérodynamique compressible et Fluides Hétérogènes” de la troisième années. Les éléments de cours utiles pour la résolution des exercices sont rassemblés au début de chaque petite classe.

Les exercices présentés dans ce recueil sont très classiques et ont été choisis pour leurs qualités pédagogiques dans l’assimilation des notions de base de l’aérodynamique compressible. Ils ont été construits à partir des ouvrages classiques de la littérature et des énoncés de petites classes de plusieurs enseignants qui sont intervenus à l’Ecole Polytechnique ou à l’ENSTA (Antoine SELLIER, Pierre BRANCHER, Frédéric DIAS, ...). Néanmoins, certaines parties, comme par exemple les “coudes supersoniques”, peuvent être considérées comme des contributions originales.

La particularité de ces petites classes repose sur le fait que la taille des exercices a été calibrée pour des séances de deux heures à l’attention d’élèves ingénieurs ou de Licence n’ayant que des notions sommaires de mécanique des fluides. Chaque petite classe peut être traitée indépendamment des autres et les éléments de cours indiqués dans leur introduction sont en principe suffisants pour leur résolution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. SELLIER, “Introduction aux écoulements compressibles et aux fluides hétérogènes”, *Les Éditions de l’École Polytechnique*, (2001).
- [2] A. SELLIER, “Aérodynamique compressible”, *Polycopié de l’École Polytechnique*, (2004).

PCM 1

Ondes sonores dans une tuyère

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Ondes sonores dans une tuyère
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc1 (2004)
Mois de création :	avril 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	ondes sonores, approximation 1D bilans globaux de la mécanique des fluides

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” applique les lois de bilan de la mécanique des fluides au cas des écoulements 1D. L'exemple de l'écoulement continu dans la tuyère d'une fusée permet d'illustrer l'intérêt applicatif de cette modélisation.

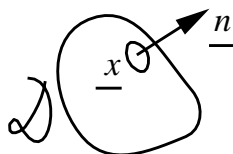
NOTATIONS

$A \cdot B$	Produit contracté des tenseurs A et B
\underline{a}	Vecteur quelconque
$\underline{\underline{A}}$	Vecteur Flux rentrant
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'ordre 2
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
$a_i b_i$	Sommation avec la convention d'Einstein := $\underline{a} \cdot \underline{b}$
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$	Produit contracté de $\underline{\underline{A}}$ et \underline{b}
$A_{ij} b_j = C_i$	Sommation avec la convention d'Einstein : $\underline{C} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$	Produit contracté de tenseurs d'ordre 2
$A_{ik} B_{kj} = C_{ij}$	Sommation avec la convention d'Einstein : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$
$c(\rho, s)$	Vitesse du son (m s^{-1})
$\text{div } \underline{\underline{A}}$	Divergence de $\underline{\underline{A}}$: $= A_{i,i}$
$\text{div } \underline{\underline{A}} = \underline{C}$	Divergence de $\underline{\underline{A}}$ de composante $C_i = A_{ij,j}$
\mathcal{D}	Domaine quelconque
$\partial\mathcal{D}$	Frontière de \mathcal{D}
da	Élément d'intégration surfacique (m^2)
$d\Omega$	Élément d'intégration volumique (m^3)
e	Énergie interne spécifique (J kg^{-1})
$\mathcal{E}(\rho, s)$	Loi d'état de l'énergie interne (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
\underline{F}	Densité volumique des forces extérieurs (N m^{-3})
$F(\underline{x}, t)$	Champ quelconque
$\underline{\underline{I}}$	Identité : $I_{ij} = \delta_{ij}$
\underline{n}	Vecteur unitaire normal sortant (m)
p	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
P_F	Production volumique de F
\underline{q}	Vecteur flux de chaleur (W m^{-3})
r_c	Production volumique de chaleur (W m^{-3})
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
t	Temps (s)
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$\frac{\delta}{\delta t}$	Opérateur dérivée pour un domaine fixe (s^{-1})
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes (Pa)
$\underline{\underline{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses (Pa)

ÉLÉMENTS DE COURS

Équations de bilan

On considère un domaine fixe \mathcal{D} et un champ $F(\underline{x}, t)$ continu ou discontinu. On note \underline{n} la normale sortante de sa frontière $\partial\mathcal{D}$ au point \underline{x} . On note $\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F(\underline{x}, t) d\Omega$ la dérivée de l'intégrale par rapport au temps, l'opérateur $\frac{\delta}{\delta t}$ indiquant que le domaine est fixe.



Les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent alors s'exprimer en considérant un domaine fixe quelconque. On note ρ la masse volumique, \underline{U} le champ de vitesse, $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes, \underline{F} la densité massique des forces extérieures, e l'énergie interne massique, r_c le chauffage volumique et \underline{q} le flux de chaleur.

F	\underline{A}	P_F
ρ	$\underline{0}$	0
$\rho \underline{U}$	$\underline{\sigma}$	\underline{F}
$\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right)$	$(-\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{U})$	$(r_c + \underline{F} \cdot \underline{U})$

Table 1.1: Lois de bilan

Tableau récapitulatif (voir tableau ??) :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} F d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} F \underline{U} \cdot \underline{n} da = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{A} \cdot \underline{n} da + \int_{\mathcal{D}} P_F d\Omega . \quad (1.1)$$

Bilan global de masse :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da = 0 \quad (1.2)$$

Bilan global de quantité de mouvement :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \underline{U} \underline{U} \cdot \underline{n} da = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} da + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{F} d\Omega \quad (1.3)$$

Bilan global d'énergie :

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \underline{U} \cdot \underline{n} da =$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (-\underline{q} + \underline{\sigma} \cdot \underline{U}) \cdot \underline{n} \, da + \int_{\mathcal{D}} (r_c + \rho \underline{F} \cdot \underline{U}) \, d\Omega . \quad (1.4)$$

Fluides newtoniens

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes s'écrit $\underline{\sigma} = -p \underline{I} + \underline{\tau}$, où p est la pression et $\underline{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses. On fait l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, si bien que la pression du tenseur des contraintes est aussi celle des lois thermodynamiques. On suppose que le fluide est divariant et décrit par les lois d'état :

$$p = \mathcal{P}(\rho, s) \quad \text{et} \quad e = \mathcal{E}(\rho, s) \quad (1.5)$$

où s est l'entropique volumique. Ces deux lois sont liées par la relation de Gibbs qui s'écrit

$$de = T \, ds - p \, d\left(\frac{1}{\rho}\right) = T \, ds + \frac{p}{\rho^2} \, d(\rho) \quad (1.6)$$

c'est-à dire $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}\right)_s (\rho, s) = \frac{\mathcal{P}(\rho, s)}{\rho^2}$. La relation de Gibbs permet de définir la température $T(\rho, s) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s}\right)_\rho$. On définit $c(\rho, s)$ par la relation

$$c^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s (\rho, s) \quad (1.7)$$

que l'on suppose donc positif. On montre que $c(\rho, s)$ est la vitesse du son.

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Moteur de fusée et hypothèses simplificatrices

On considère un système mécanique composé d'un fuselage entourant une chambre de combustion attenante à une tuyère cylindrique qui débouche sur le fluide atmosphérique. On veut déterminer l'écoulement dans la tuyère en fonction des paramètres thermodynamiques de la chambre de combustion et de la forme de la tuyère.

À titre d'exemple, les ordres de grandeurs pour le moteur HM7 du troisième étage de la fusée Ariane 4 sont donnés ci-après. Pression et température dans la chambre de combustion : $p_0 = 30.5 \cdot 10^5$ Pa et $T_0 = 3\,230$ K. Constante $\gamma = C_p/C_v$ du gaz éjecté : $\gamma = 1.25$. Chaleur volumique dégagée par les réactions chimiques : $r_c = 714 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$. Section minimale et section de sortie de la tuyère : $A_c = 1.12 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ et $A_s = 0.709 \text{ m}^2$. Pression atmosphérique : p_a petit devant p_0 .



On suppose que le gaz, supposé divariant, obéit aux équations d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, s)$. Ces deux lois sont liées par la relation de Gibbs $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$. On note $c^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s(\rho, s)$ que l'on suppose donc positif.

- 1) On choisit de modéliser l'écoulement de la tuyère avec les hypothèses $\underline{F} = \underline{0}$, $r_c = 0$, $\underline{q} = \underline{0}$ et $\underline{\tau} = \underline{0}$. À quoi correspondent ces hypothèses ?

On néglige la viscosité ($\underline{\tau} = \underline{0}$) et la diffusivité ($\underline{q} = \underline{0}$) : le fluide est parfait. On néglige la gravité ($\underline{F} = \underline{0}$) dans la mesure où les vitesses sont grandes. On suppose que les réactions chimiques ne sont plus actives dans la tuyère ($r_c = 0$).

- 2) On rappelle la formule de la divergence $\int_{\partial \mathcal{D}} \underline{Q} \cdot \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{Q} d\Omega$ pour un champ de vecteurs $\underline{Q}(\underline{x})$ dérivable. En déduire la formule $\int_{\partial \mathcal{D}} \underline{A} \cdot \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}} \text{div } \underline{A} d\Omega$ pour un champ de tenseurs d'ordre deux $\underline{A}(\underline{x})$ puis la formule $\int_{\partial \mathcal{D}} q \underline{n} da = \int_{\mathcal{D}} \text{grad } q d\Omega$ pour un champ scalaire $q(\underline{x})$ en posant $\underline{A} = q \underline{I}$.

La formule de la divergence s'écrit $\int_{\partial \mathcal{D}} Q_i n_i da = \int_{\mathcal{D}} Q_{i,i} d\Omega$ pour un vecteur \underline{Q} de composantes Q_i , en adoptant la convention de sommation des indices répétées et la notation $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x_i}$. On en déduit $\int_{\partial \mathcal{D}} A_{ij} n_j da = \int_{\mathcal{D}} A_{i,j} d\Omega$ et un tenseur de composantes A_{ij} puis, en posant $A_{ij} = q \delta_{ij}$, la relation $\int_{\partial \mathcal{D}} q n_i da = \int_{\mathcal{D}} q_{,i} d\Omega$.

- 3) On écrit la forme intégrale des équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sur le sous-domaine \mathcal{D} fixe sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da &= F_{\text{Masse}} \\ \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{U} d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \underline{U} \underline{U} \cdot \underline{n} da &= F_{\text{Qdmt}} \\ \frac{\delta}{\delta t} \int_{\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) d\Omega + \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \underline{U} \cdot \underline{n} da &= F_{\text{Energie}} . \end{aligned}$$

Donner l'expression de F_{Masse} , F_{Qdmvt} et F_{Energie} . Exprimer F_{Qdmvt} sous la forme d'une intégrale de volume.

On a $F_{\text{Masse}} = 0$. En appliquant les hypothèses $\underline{F} = \underline{0}$ et $\underline{\tau} = \underline{0}$ puis la formule de la divergence, on a $F_{\text{Qdmvt}} = - \int_{\partial\mathcal{D}} p \underline{n} da = - \int_{\mathcal{D}} \text{grad } p d\Omega$. En appliquant les hypothèses $r_c = 0$ et $\underline{q} = \underline{0}$ on a $F_{\text{Energie}} = - \int_{\partial\mathcal{D}} p \underline{U} \cdot \underline{n} da$.

2 Approximation unidimensionnelle

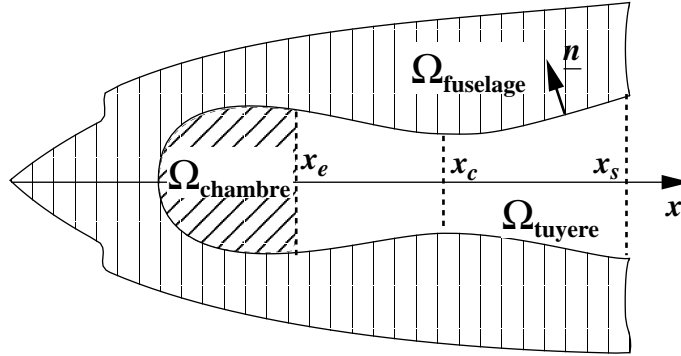
On considère que la tuyère cylindrique $\Omega_{\text{tuyère}}$ est comprise entre les plans $x = x_e$ et $x = x_s$. On suppose que sa section $A(x)$ d'aire $A(x)$ est lentement variable en x . À toute grandeur $G(x, y, z)$ on associe sa moyenne $\bar{G}(x)$ définie par

$$\bar{G}(x) = \frac{1}{A(x)} \int_{A(x)} G(x, y, z) dy dz .$$

On définit alors l'écart à la moyenne $\tilde{G}(x, y, z)$ par la relation $G(x, y, z) = \bar{G}(x) + \tilde{G}(x, y, z)$.

On suppose que la section de la tuyère est lentement variable avec x ce que l'on traduit par $\tilde{G}/\bar{G} = O(\epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$. Ces hypothèses "quasi-1D" entraînent la relation $\overline{GH} = \bar{G} \bar{H} [1 + O(\epsilon^2)]$ pour deux champs G et H quelconques. On peut montrer aussi que l'on a $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} \sim \frac{\partial \bar{G}}{\partial x}$.

On suppose de plus que $\bar{V} \ll \bar{U}$ et $\bar{W} \ll \bar{U}$ en notant $\underline{U} = U \underline{e}_x + V \underline{e}_y + W \underline{e}_z$. Enfin, on suppose que les équations d'état $\bar{p} = \mathcal{P}(\bar{p}, \bar{s})$ et $\bar{e} = \mathcal{E}(\bar{p}, \bar{s})$ sont satisfaites.



On considère le sous-domaine \mathcal{D} de $\Omega_{\text{tuyère}}$ compris entre les plans $x = x_1$ et $x = x_2$. On note $S = \partial\mathcal{D} - A(x_1) \cup A(x_2)$ la surface de $\partial\mathcal{D}$ propre à la tuyère et \underline{n} la normale à la frontière $\partial\mathcal{D}$. On suppose que tous les champs sont continus dans la tuyère et on cherche à établir les bilans locaux dans le cadre de cette approximation unidimensionnelle.

- 4) En utilisant la condition aux limites cinématique $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ sur S et en dérivant par rapport à x_2 le bilan de masse écrit pour le domaine \mathcal{D} , montrer que l'on obtient, à l'ordre dominant de l'approximation quasi-1D, l'expression : $A \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{U} A) = 0$.

Le bilan de masse sur le domaine \mathcal{D} s'écrit

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{x_1}^{x_2} \int_{A(x)} \rho da dx = - \int_{\partial \mathcal{D}} \rho \underline{U} \cdot \underline{n} da = \left[- \int_{A(x)} \rho U da \right]_{x_1}^{x_2},$$

en utilisant $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ sur S . D'où $\int_{x_1}^{x_2} A(x) \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}(x, t) dx = -A(x_2) \bar{\rho} \bar{U}(x_2, t) + A(x_1) \bar{\rho} \bar{U}(x_1, t)$. En dérivant par rapport à x_2 avec x_1 fixé et en utilisant $\frac{\rho}{\bar{\rho}} \sim \bar{\rho} \bar{U}$ on obtient $A \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{U} A) = 0$.

- 5) Montrer de même que la projection sur \underline{e}_x du bilan de quantité de mouvement conduit à $\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$.

Le bilan de quantité de mouvement sur le domaine \mathcal{D} projeté sur \underline{e}_x s'écrit $\frac{\delta}{\delta t} \int_{x_1}^{x_2} \int_{A(x)} \rho U da dx + \left[\int_{A(x)} \rho U^2 da \right]_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{A(x)} \frac{\partial p}{\partial x} da dx$ en utilisant la condition $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ sur Σ . D'où $\int_{x_1}^{x_2} A \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{U}) dx + \left[A \bar{\rho} \bar{U}^2 \right]_{x_1}^{x_2} = - \int_{x_1}^{x_2} A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dx$.

En utilisant $\bar{\rho} \bar{U} \sim \bar{\rho} \bar{U}$ et $\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ et en dérivant par rapport à x_2 , on obtient $A \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{\rho} \bar{U}^2) = -A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$. Comme $A \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{U} A) = 0$, on a finalement $\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$.

- 6) Montrer enfin que $\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} \right) = - \bar{\rho} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A)$.

Le bilan d'énergie sur le domaine \mathcal{D} s'écrit $\frac{\delta}{\delta t} \int_{x_1}^{x_2} \int_{A(x)} \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) da dx + \left[A \overline{\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) U} \right]_{x_1}^{x_2} = - \left[\overline{p U} \right]_{x_1}^{x_2}$ en utilisant la condition $\underline{U} \cdot \underline{n} = 0$ sur Σ . En utilisant les hypothèses $\bar{V} \ll \bar{U}$ et $\bar{W} \ll \bar{U}$ et en dérivant par rapport à x_2 , on en déduit $A \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{\rho} \left(\bar{e} + \frac{1}{2} \bar{U}^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[A \bar{\rho} \left(\bar{e} + \frac{1}{2} \bar{U}^2 \right) \bar{U} \right] = - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \bar{U} A)$. En utilisant $A \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{U} A) = 0$ et $\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$, on obtient finalement $\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{e}}{\partial x} \right) = - \bar{\rho} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A)$.

- 7) En notant $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x}$, le modèle décrivant l'écoulement s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} &= - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{U} A), & \bar{\rho} \frac{d \bar{U}}{dt} &= - \underline{\text{grad}} \bar{p} \\ \bar{\rho} \frac{d \bar{e}}{dt} &= - \bar{\rho} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A), & \bar{p} &= \mathcal{P}(\bar{\rho}, \bar{s}) \quad \text{et} \quad \bar{e} = \mathcal{E}(\bar{\rho}, \bar{s}). \end{aligned}$$

En utilisant la relation Gibbs, montrer qu'il peut s'écrire aussi sous la

forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A), & \bar{\rho} \frac{d\bar{U}}{dt} &= -\text{grad } \bar{p} \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{s}}{dt} &= 0 & \text{et} & \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{c}^2 \frac{d\bar{\rho}}{dt} \end{aligned}$$

d'où la variable $\bar{e} = \mathcal{E}(\bar{\rho}, \bar{s})$ est éliminée, ou bien encore sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A), & \bar{\rho} \frac{d\bar{U}}{dt} &= -\text{grad } \bar{p}, \\ \bar{\rho} \frac{d\bar{H}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} & \text{et} & \frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{c}^2 \frac{d\bar{\rho}}{dt} \end{aligned}$$

où $\bar{H} = \bar{e} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} \bar{U}^2$ est l'enthalpie totale moyennée.

L'équation de bilan de masse s'écrit bien $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\bar{\rho} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A)$. La relation de Gibbs entraîne que $\bar{\rho} \bar{T} \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{\rho} \frac{d\bar{e}}{dt} - (\bar{p}/\bar{\rho}) \frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\bar{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A) + \bar{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A) = 0$. Comme $p = \mathcal{P}(\rho, s)$, on a $\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}\right)_\rho \frac{ds}{dt}$. Comme $\frac{d\bar{s}}{dt} = 0$, on a $\frac{d\bar{s}}{dt} = (\bar{c})^2 \frac{d\bar{\rho}}{dt}$. En utilisant les équations de conservation de la masse et de l'énergie, l'équation de l'enthalpie totale s'écrit $\bar{\rho} \frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{\rho} \frac{d}{dt} \left(\bar{e} + \frac{1}{2} \bar{U}^2\right) + \bar{\rho} \frac{d}{dt} \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = -\bar{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \bar{U} A) - \bar{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{U} A) + \frac{d\bar{p}}{dt} = -\bar{U} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}$.

3 Ondes sonores

On pose $(\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{s}, \bar{U}) = (p_0 + p_1, \rho_0 + \rho_1, s_0 + s_1, u)$ où $(p_0, \rho_0, s_0, 0)$ est une solution stationnaire et homogène des équations et $[p_1(x, t), \rho_1(x, t), s_1(x, t), u(x, t)]$ une perturbation supposée petite. On note $c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s(p_0, s_0)$.

- 8) Écrire le système d'équations de bilan linéarisées autour de l'état de base pour les variables considérées.

En négligeant les termes non-linéaires dans les équations de bilan, on obtient le système $A \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (A u) = 0$, $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$, $\frac{\partial s_1}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial p_1}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$

- 9) Éliminer s_1 , ρ_1 et p_1 pour obtenir une équation pour u . Interpréter alors la vitesse c_0 dans le cas où $A(x)$ est une constante.

L'entropie s_1 reste constante en temps. L'élimination de p_1 et ρ_1 conduit à l'équation $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A u) \right]$. Pour A constant, on reconnaît l'équation des ondes. La vitesse c_0 est la vitesse de propagation des ondes sonores dans une tuyère cylindrique.

PCM 2

Régimes continus de la tuyère de Laval

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Régimes continus de la tuyère de Laval
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc2 (2004)
Mois de création :	avril 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	tuyère de Laval, approximation 1D relation d'Hugoniot, lois de Saint-Venant

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” explicite l’approximation quasi-1D de l’écoulement dans une tuyère de section lentement variable et applique cette approximation au cas de l’écoulement stationnaire dans la tuyère de Laval.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
$c(\rho, s)$	Vitesse du son (m s^{-1})
$\text{div } \underline{A}$	Divergence de \underline{A}
da	Élément d'intégration surfacique (m^2)
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\mathcal{E}(\rho, s)$	Loi d'état de l'énergie interne (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
$\overline{G}(\underline{x}, t)$	Moyenne de $G(\underline{x}, t)$ sur la section $A(x)$
h	Enthalpie spécifique (J kg^{-1})
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
$p(\underline{x}, t)$	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
\underline{q}	Vecteur flux
s	Entropie spécifique ($\text{J } ^\circ\text{K kg}^{-1}$)
t	Temps (s)
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
$U(\underline{x}, t)$	Composante $\underline{U} \cdot \underline{e}_x$ (m s^{-1})
$\overline{U}(\underline{x}, t)$	Moyenne de U (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})

ÉLÉMENTS DE COURS

Bilans locaux 3D

Les bilans locaux décrivant le mouvement d'un fluide parfait en l'absence de forçages externes s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la masse : } & \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\text{div } \underline{U} \\ \text{Conservation de la quantité de mouvement : } & \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\text{grad } p \\ \text{Bilan d'énergie interne : } & \rho \frac{de}{dt} = -p \text{ div } \underline{U} \end{aligned}$$

où la dérivée particulaire est notée $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad}$. Un gaz divariant est décrit par les lois d'états

$$e = \mathcal{E}(\rho, s) \quad \text{et} \quad p = \mathcal{P}(\rho, s), \quad (2.1)$$

ces deux lois étant liées pas la relation de Gibbs

$$de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.2)$$

qui entraîne la relation $\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$. En combinant cette relation avec la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement ou le bilan d'énergie interne, on obtient l'équivalence des trois relations

$$\begin{aligned} \text{Bilan d'énergie interne : } \rho \frac{de}{dt} &= -p \operatorname{div} \underline{U} \\ \text{Bilan d'entropie : } \frac{ds}{dt} &= 0 \\ \text{Bilan d'enthalpie totale : } \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

où $h = e + \frac{p}{\rho}$ est l'enthalpie spécifique et $H = h + \frac{1}{2}\underline{U}^2$ l'enthalpie totale spécifique. En définissant $c^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s(\rho, s)$, la relation de Gibbs et le bilan d'entropie entraînent la relation

$$\frac{dp}{dt} = c^2(\rho, s) \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.3)$$

Bilans locaux quasi-1D

L'approximation quasi-1D s'applique à un fluide s'écoulant dans une tuyère de section $A(x)$ lentement variable avec x . Les bilans locaux concernent alors les quantités moyennées $\overline{G}(x) = \frac{1}{A(x)} \int_{A(x)} G(x, y, z) da$ et s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{Conservation de la masse : } \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{d\overline{\rho}}{dt} &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A \overline{U}) \\ \text{Conservation de la quantité de mouvement : } \rho \frac{d\overline{U}}{dt} &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \\ \text{Bilan d'énergie interne : } \overline{\rho} \frac{d\overline{e}}{dt} &= -\overline{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A \overline{U}) \end{aligned}$$

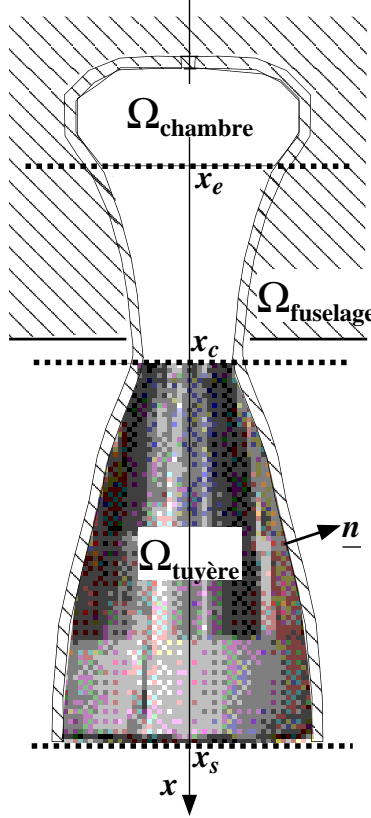
où la notation $\frac{d}{dt}$ désigne maintenant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial}{\partial x}$. On montre que le bilan d'énergie interne peut être remplacé par le bilan d'entropie $\frac{d\overline{s}}{dt} = 0$ ou le bilan d'entropie totale $\frac{d\overline{H}}{dt} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t}$ avec $\overline{H} = \overline{e} + \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}} + \frac{1}{2}\overline{U}^2$. Il faut ensuite compléter ce jeu d'équation par la relation

$$\frac{d\overline{p}}{dt} = c^2(\overline{\rho}, \overline{s}) \frac{d\overline{\rho}}{dt}. \quad (2.4)$$

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Modèle quasi-1D

On considère un système mécanique composé d'un fuselage entourant une chambre de combustion attenante à une tuyère cylindrique de section $A(x)$ qui débouche sur le fluide atmosphérique.



Dans la chambre de combustion le fluide est caractérisé par les constantes (p_0, T_0) considérés comme grandeurs génératrices. A l'extérieur de la tuyère, le fluide est caractérisé par le couple (p_a, T_a) . A priori, l'écoulement de la tuyère dépend des quatre paramètres (p_0, T_0, p_a, T_a) et de sa géométrie $A(x)$.

Nous voulons étudier les différents régimes de l'écoulement obtenus en faisant diminuer la pression atmosphérique p_a à partir de la valeur p_0 .

On choisit de modéliser l'écoulement de la tuyère avec les hypothèses $\underline{F} = \underline{0}$, $r_c = 0$, $\underline{q} = \underline{0}$ et $\underline{\tau} = \underline{0}$. On suppose que le gaz, supposé divariant, obéit aux équations d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ et $e = \mathcal{E}(\rho, s)$. Dans le cadre de l'approximation quasi-1D, les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \bar{U} A) = 0, \quad \bar{p} \frac{d\bar{U}}{dt} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = c^2 \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\text{avec } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad c^2(\bar{p}, \bar{s}) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right)_s.$$

L'équation pour l'enthalpie totale $\bar{H} = \bar{e} + \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{1}{2} \bar{U}^2$ peut être remplacée par l'équation $\frac{d\bar{s}}{dt} = 0$ ou l'équation $\bar{p} \frac{d\bar{e}}{dt} = -\bar{p} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A \bar{U})$.

2 Écoulement permanent

On suppose que l'écoulement a atteint un régime permanent. Les grandeurs \bar{G} ne dépendent donc pas du temps. Les équations locales de bilan permettent d'écrire des relations entre les dérivées $\frac{d\bar{G}}{dx}$. Pour simplifier l'écriture, on choisit

de remplacer \bar{G} par G et $\frac{d\bar{G}}{dx}$ par dG dans les équations. On remplacera aussi \bar{U} par u . On suppose que $u > 0$.

- 1) Montrer que les équations de bilan locaux de l'approximation quasi-1D entraînent : $\rho u A = \text{cste} =: \dot{m}$, $dp + \rho u du = 0$, $H = \text{cste}$ et $s = \text{cste}$ avec $H = h + \frac{1}{2}u^2$ et $h = e + p/\rho$.

En régime permanent, les équations de bilan de l'approximation quasi-1D s'écrivent $\frac{d}{dx}(\bar{\rho}\bar{U}A) = 0$, $\bar{\rho}\bar{U}\frac{d\bar{U}}{dx} = -\frac{d\bar{p}}{dx}$, $\bar{\rho}\bar{U}\frac{d\bar{H}}{dx} = 0$ et $\bar{U}\frac{d\bar{s}}{dx} = 0$. On déduit, en utilisant les nouvelles notations, les quatre équations de bilan de la masse $\rho u A = \text{cste} =: \dot{m}$, de bilan de quantité de mouvement $dp + \rho u du = 0$, de bilan d'enthalpie totale $H = \text{cste}$ et de bilan d'entropie $s = \text{cste}$.

- 2) Montrer que la loi de conservation de la masse entraîne $d\rho/\rho + du/u + dA/A = 0$.

La dérivée logarithmique de l'équation de bilan de masse conduit à $d\dot{m}/\dot{m} = d\rho/\rho + du/u + dA/A = 0$.

- 3) L'équation d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ permet de définir la vitesse du son c par $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$. En déduire que les trois inconnues du , dp et $d\rho$ s'obtiennent à partir d'un système de trois équations que l'on écrira. En définissant le nombre de Mach local $M(x) = u(x)/c(x)$, montrer que l'on en tire la relation d'Hugoniot $dA/A + (1 - M^2)du/u = 0$.

En prenant la dérivée particulière de l'équation d'état $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ on obtient $\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{ds}{dt}$. Comme l'écoulement est permanent et $ds = 0$, on a $dp = c^2 d\rho$. On obtient alors le système de trois équations $d\dot{m}/\dot{m} = d\rho/\rho + du/u + dA/A = 0$, $dp + \rho u du = 0$ et $dp = c^2 d\rho$. En éliminant dp et $d\rho$, il reste $(1 - u^2/c^2)du/u + dA/A = (1 - M^2)du/u + dA/A = 0$.

- 4) En déduire la forme que l'on doit donner à la tuyère si l'on veut que l'écoulement devienne supersonique et que le nombre de Mach continue d'augmenter au-delà du point sonique. On note x_c la position du col de la tuyère.

Si $M(x_e) < 1$, on a $du > 0$ lorsque $dA < 0$ (accélération dans le convergent).
Si $M(x_e) > 1$, on a $du > 0$ lorsque $dA > 0$ (accélération dans le divergent).
Pour constamment accélérer le fluide, il faut que $\frac{dA}{dx} < 0$ jusqu'au point x_c où $M(x_c) = 1$. Au-delà de ce point, il faut que $\frac{dA}{dx} > 0$ pour continuer à faire croître $M(x)$. Ceci explique la forme habituelle d'une tuyère.

3 Vitesse du son pour un gaz parfait polytropique

On considère maintenant le cas usuel du gaz parfait polytropique défini par $p = \rho r T$, $de = C_v dT$, $C_p = \gamma C_v$ et $C_p - C_v = r$ où C_p , C_v et γ sont des constantes. Pour ce rappel de cours sur les gaz parfait polytropique, les notations comme de , ds ou $d\rho$ désignent des éléments différentiels obtenus en différenciant les lois d'état.

5) Montrer que $e = C_v T$, $h = C_p T$, $C_v = r/(\gamma - 1)$ et $C_p = \gamma r/(\gamma - 1)$.

Comme C_v est constant, $de = C_v dT$ s'intègre en $e = C_v T$. On a alors $h = e + p/\rho = C_v T + rT = C_p T$. Comme $C_p - C_v = (\gamma - 1)C_v = r$, on a $C_v = r/(\gamma - 1)$. D'où $C_p - C_v = C_p(1 - 1/\gamma) = r$ et donc $C_p = \gamma r/(\gamma - 1)$.

6) On note $\tau = 1/\rho$. À partir de la relation de Gibbs $de = T ds - p d\tau$ qui permet de définir l'entropie s , montrer que $s = C_v \text{Ln}(p \rho^{-\gamma}) + s_{\text{ref}}$ où s_{ref} est une valeur de référence.

La relation de Gibbs s'écrit $de = C_v T = T ds - \rho r T(-1/\rho^2) d\rho$ et entraîne $ds = C_v dT/T - r d\rho/\rho$. La dérivée logarithmique de $p = \rho r T$ s'écrivant $dp/p = d\rho/\rho + dT/T$, on a $ds = C_v dp/p - (r + C_v)d\rho/\rho = C_v dp/p - C_p d\rho/\rho$. En intégrant, on obtient $s = C_v \text{Ln}(p \rho^{-\gamma}) + s_{\text{ref}}$.

7) En déduire que la vitesse du son est donnée par $c^2 = \gamma r T$ et que $p = B(s)\rho^\gamma$ en exprimant la fonction $B(s)$.

La relation $ds = C_v dp/p - C_p d\rho/\rho$ entraîne que $c^2 = (C_p/C_v)(p/\rho) = \gamma r T$. On déduit de l'expression de s que $p = \rho^\gamma \exp\left[\frac{s-s_{\text{ref}}}{C_v}\right] =: B(s)\rho^\gamma$. On retrouve alors que $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma B(s)\rho^{\gamma-1} = \gamma p/\rho = \gamma r T$.

4 Détermination des régimes continus

On suppose que le fluide est un gaz parfait polytropique. On suppose que les grandeurs génératrices (p_0, ρ_0, T_0) de l'écoulement permanent quasi-1D isentropique de la tuyère correspondent à un point (réel ou fictif) où $u_0 = 0$. Dans tout ce qui suit, on suppose que ces grandeurs sont fixées, ce qui revient à fixer deux paramètres (le troisième s'en déduit par la loi d'état).

8) Montrer que la loi de conservation de l'enthalpie totale H entraîne que $c^2/(\gamma - 1) + u^2/2 = c_0^2/(\gamma - 1)$.

Pour un gaz parfait polytropique, l'enthalpie totale s'écrit $H = e + p/\rho + \frac{1}{2}u^2 = C_v T + r T + \frac{1}{2}u^2 = C_p T + \frac{1}{2}u^2 = \frac{C_p}{\gamma r} c^2 + \frac{1}{2}u^2 = \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2}$. La loi de conservation $H = \text{cste} =: H_0$ s'écrit donc $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{c_0^2}{\gamma-1}$ avec $c_0^2 = \gamma r T_0$.

9) En déduire les lois de Saint-Venant

$$\frac{T}{T_0} = f(M)^{-1}, \quad \frac{p}{p_0} = f(M)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = f(M)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (2.5)$$

avec $f(M) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$. Montrer que ces trois fonctions de M sont décroissantes.

En utilisant la notation $M = u/c$, la loi de conservation de l'enthalpie totale $1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2} = \frac{c_0^2}{c^2}$ entraîne $c^2/c_0^2 = [1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2]^{-1}$ ce qui s'écrit aussi $T/T_0 = f^{-1}(M)$. L'équation de bilan de l'entropie $s = s_0$ entraîne $p\rho^{-\gamma} = p_0\rho_0^{-\gamma}$ d'où $\frac{p}{p_0} \left(\frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}\right)^{-\gamma} = 1$ d'où $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-\gamma}$ d'où $p/p_0 = f(M)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$. On en déduit $\left(\frac{p}{\rho_0}\right)^{-\gamma} = \frac{p_0}{p}$ d'où $\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = f(M)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Comme $f(M)$ est un fonction croissante de M , les trois fonctions T/T_0 , p/p_0 et ρ/ρ_0 de M sont décroissantes.

10) En déduire que M est solution de l'équation implicite

$$g[M(x)] = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{rT_0}{\gamma}} \frac{1}{A(x)} \quad \text{avec} \quad g(M) = M f(M)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \quad (2.6)$$

La loi de conservation de la masse $\rho u A = \dot{m}$ entraîne

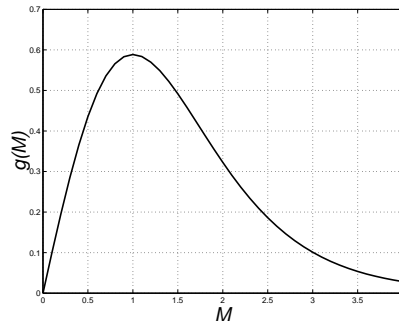
$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{c} \frac{c}{c_0} c_0 A = f(M)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \rho_0 M f(M)^{-\frac{1}{2}} c_0 A = \dot{m}. \quad (2.7)$$

D'où $AM f(M)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = A g(M) = \frac{\dot{m}}{\rho_0 c_0} = \frac{\dot{m}}{\rho_0 c_0^2} c_0 = \frac{\dot{m}}{\gamma r T_0 \rho_0} c_0 = \frac{\dot{m}}{p_0} \frac{c_0}{\gamma} = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{rT_0}{\gamma}}$.

11) Tracer l'allure de $g(M)$. On note $\Gamma(\gamma) = g(1) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$. Pour $\gamma = 1.25$ on a $\Gamma(\gamma) = .59$

La dérivée de la fonction $g(M)$ s'obtient en calculant $\frac{g'(M)}{g(M)} = \frac{1}{M} - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{(\gamma-1)M}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 - \frac{\gamma+1}{2}M^2}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)} = \frac{1-M^2}{M(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)}$.

D'où $g'(M) = (1 - M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$. On en déduit l'allure de la fonction $g(M)$ qui est maximale pour $M = 1$.

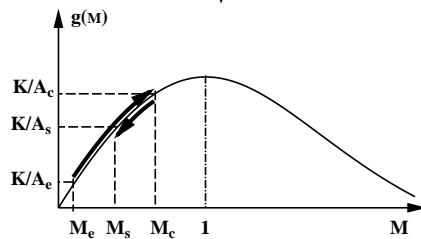


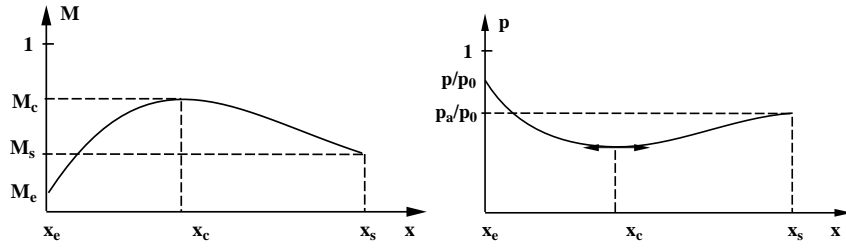
- 12) On garde fixées les grandeurs génératrices p_0 , T_0 et donc ρ_0 . En supposant le débit massique \dot{m} et que l'écoulement est partout subsonique, donner l'allure des solutions $M(x)$, $p(x)$, $\rho(x)$ et $T(x)$. En imposant que la pression de sortie p_s soit égale à la pression atmosphérique p_a , montrer que \dot{m} est une fonction de (p_0, T_0, p_a) , solution du système de deux équations aux deux inconnues (\dot{m}, M_s) suivant :

$$\frac{p_a}{p_0} = f(M_s)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{et} \quad \dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{r T_0}} g(M_s) A_s .$$

En déduire que tant que l'écoulement reste subsonique, le débit massique $\dot{m}(p_0, T_0, p_a)$ augmente la pression atmosphérique p_a diminue. Préciser la valeur de $M(x_e)$ à l'entrée de la tuyère.

La solution $M(x)$ de l'équation $g[M(x)] = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{r T_0}{\gamma}} / A(x)$ peut s'obtenir graphiquement. Si $\frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{r T_0}{\gamma}} / A_c \leq 1$, l'écoulement reste subsonique le long de toute la tuyère. On peut alors tracer l'allure de $M(x)$ qui est maximale en x_c . Les allures des fonctions $p(x)/p_0$, $\rho(x)/\rho_0$ et $T(x)/T_0$ s'en déduisent. Elles sont semblables et minimales en x_c . La solution $p(x)/p_0$ permet de déduire la pression de sortie $p_s = p(x_s) = p_a$ qui doit être égale à la pression atmosphérique. L'application des lois de Saint-Venant entraîne $p_s/p_0 = f(M_s)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$ où $M_s = M(x_s)$ est le nombre de Mach de sortie solution de $g(M_s) = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{r T_0}{\gamma}} / A_s$. Pour $p_a = p_0$, on a $\dot{m} = 0$. Lorsque la pression atmosphérique p_a diminue, le débit massique $\dot{m}(p_a)$ augmente. Notons que la valeur de $M(x_e) = M_e$ s'obtient par la relation $g(M_e) = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{r T_0}{\gamma}} / A_e$.



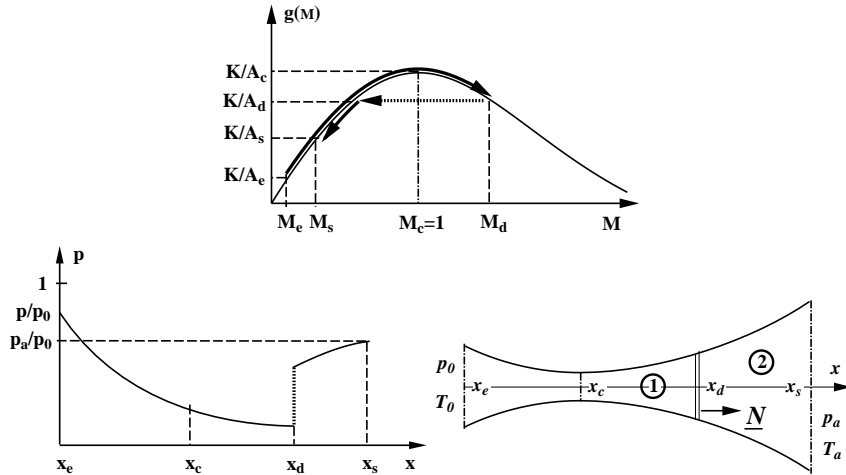


- 13) Montrer que l'écoulement devient supersonique lorsque p_a passe en dessous d'un seuil $p_a = p_I$. Montrer que pour ce régime, le débit $\dot{m}(p_0, T_0)$ n'est plus contrôlé par p_a et vaut $\dot{m} = \rho_0 c_0 \Gamma(\gamma) A(x_c)$.

Lorsque p_a descend jusqu'à une valeur critique $p_a = p_I$ telle que $K/A_c = g(1)$, l'écoulement est supersonique en aval du col et la solution $M(x)$ de l'équation $g[M(x)] = K/A(x)$ doit être choisie sur la branche $M > 1$ pour $x > x_c$. Lorsque $p_a < p_I$, le débit massique ne dépend plus de p_a et reste "bloqué" à la valeur donnée par l'équation $\frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{rT_0}{\gamma}} = g(1) A_c$. En notant $g(1) = \Gamma(\gamma) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$, la valeur du débit massique est $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} \Gamma(\gamma) A_c =$

- 14) La condition à la limite $p = p_a$ à la sortie de la tuyère peut-elle être satisfaite pour $p_a < p_I$? Indiquer alors le phénomène physique qui permet de connecter le profil $p(x)$ à la pression atmosphérique.

Comme \dot{m} n'est plus contrôlé par la pression atmosphérique p_a , la solution $p(x)/p_0 = f[(M(x)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ avec $M(x)$ solution de $g[M(x)] = K/A(x)$ ne vérifie pas (sauf cas exceptionnel) $p(x_s) = p_a$. La solution physique est obtenue en admettant l'existence d'un choc dans la tuyère ou à l'extérieur de la tuyère.



PCM 3

Onde de détente dans un canal hydraulique

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Onde de détente dans un canal hydraulique
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc3 (2004)
Mois de création :	avril 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	caractéristiques, invariants de Riemman onde simple, équations de Saint-Venant

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” applique la méthode des caractéristiques au cas des équations en eaux peu profondes (équations de Saint-Venant). Le cas de l’onde simple de détente centrée est abordé.

NOTATIONS

$a_{,t} = \frac{\partial a}{\partial t}$	Dérivée partielle de a par rapport au temps
$a_{,x} = \frac{\partial a}{\partial x}$	Dérivée partielle de a par rapport à l'espace
\mathcal{C}	Courbe caractéristique du plan (x, t)
\mathcal{C}_+	Courbe caractéristique du plan (x, t)
\mathcal{C}_-	Courbe caractéristique du plan (x, t)
\mathcal{C}_\pm	Courbes \mathcal{C}_+ ou \mathcal{C}_-
$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$	Dérivée partielle de a le long de \mathcal{L}
$(da)_{\mathcal{L}}$	Notation abrégée de $\left(\frac{da}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ en multipliant par dt
dt	Notation abrégée à multiplier par $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$ (s)
$J_+(u, v)$	Invariant de Riemann sur les \mathcal{C}_+
$J_-(u, v)$	Invariant de Riemann sur les \mathcal{C}_-
\mathcal{L}	Courbe du plan (x, t)
t	Temps (s)
(u, v)	Solution du système d'EDP
x	Coordonnée spatiale (m)
$\dot{x}(t)$	Dérivée de $x(t)$ (m s ⁻¹)
$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}}$	Inverse de la pente de la courbe \mathcal{L} (m s ⁻¹)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport au temps (s ⁻¹)
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à l'espace (m ⁻¹)
$\lambda(x, t)$	Inverse de la pente de \mathcal{L} en (x, t) (m s ⁻¹)
$\lambda_+(x, t)$	Inverse de la pente de \mathcal{C}_+ en (x, t) (m s ⁻¹)
$\lambda_-(x, t)$	Inverse de la pente de \mathcal{C}_- en (x, t) (m s ⁻¹)

ÉLÉMENTS DE COURS

Système hyperbolique et caractéristiques

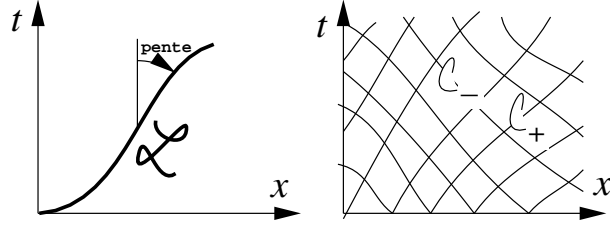
On considère un système d'équations aux dérivées partielles s'écrivant sous la forme :

$$\begin{cases} A_1 u_{,t} + B_1 u_{,x} + C_1 v_{,t} + D_1 v_{,x} = E_1 \\ A_2 u_{,t} + B_2 u_{,x} + C_2 v_{,t} + D_2 v_{,x} = E_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $(A_1, B_1, C_1, D_1, E_1)$ et $(A_2, B_2, C_2, D_2, E_2)$ sont des fonctions de (x, t) . Ce système fait apparaître les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ que l'on peut respectivement interpréter comme la dérivée le long des droites $x = cste$ ou des droites $t = cste$. On cherche à obtenir un système faisant intervenir les dérivées selon un réseau de courbes autres que le maillage cartésien du plan (x, t) . Étant

donnée une courbe \mathcal{L} définie par la trajectoire $x(t)$, on note $\lambda(x, t)$ l'inverse de sa pente en x dans le plan (x, t) et l'on écrit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{L}} =: \dot{x}(t) = \lambda[x(t), t]. \quad (3.2)$$



La dérivée du champ $a(x, t)$ le long de la courbe \mathcal{L} est alors définie par la relation

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{\mathcal{L}} = \frac{\partial a}{\partial t} + \lambda(x, t) \frac{\partial a}{\partial x} = a_{,t} + \lambda a_{,x}. \quad (3.3)$$

Pour transformer le système (??) en un système faisant intervenir des dérivées selon des courbes autres que les axes, on écrit le système des quatre relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,t} \\ u_{,x} \\ v_{,t} \\ v_{,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{L}} \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Les deux premières équations ne sont celle du système (??) et les deux dernières ne font que reprendre la définition de la dérivée le long d'une courbe \mathcal{L} appliquée à u puis à v .

Pour un couple (x, t) donné, on cherche alors la ou les valeurs de λ pour lesquelles la matrice 4×4 de ce système n'est pas inversible. Il suffit d'annuler son déterminant qui est un polynôme de degré 2 en λ . On note $\lambda_+(x, t)$ et $\lambda_-(x, t)$ les deux racines réelles lorsqu'elles existent. On dit que le système (??) est "hyperbolique" dans le domaine du plan (x, t) pour lequel il existe deux racines réelles (parabolique pour une racine double et elliptique sinon). Dans ce domaine, on peut définir deux familles de courbes notées \mathcal{C}_+ et \mathcal{C}_- , appelées "courbes caractéristiques", et définies par leurs trajectoires respectives

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} = \lambda_+(x, t) \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} = \lambda_-(x, t). \quad (3.5)$$

Relations de compatibilités et invariants de Riemann

S'il existe une solution $[u(x, t), v(x, t)]$ au système (??) dans le domaine où il est hyperbolique, le système (??) obtenu en choisissant $\mathcal{L} = \mathcal{C}_+$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{C}_-$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda_+(x, t)$ ou $\lambda = \lambda_-(x, t)$, doit obligatoirement avoir des solutions. Son second membre appartient donc à l'espace vectoriel engendré par les quatre colonnes de la matrice 4×4 . Si les trois dernières colonnes engendrent cet espace, cette appartenance s'écrit en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} E_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ E_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & \lambda & 0 & 0 \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}} & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3.6)$$

où \mathcal{C} désigne une courbe \mathcal{C}_+ ou \mathcal{C}_- . On peut choisir de substituer n'importe quelle autre colonne par le second membre, sauf dans le cas particulier où deux colonnes sont proportionnelles. Le cas où la matrice 4×4 n'est pas de rang 3 n'est pas considéré ici. Les deux relations de compatibilité ainsi obtenues pour les deux familles de courbes caractéristique sont des relations de la forme

$$\begin{cases} \mathcal{U}_+(x, t) \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} + \mathcal{V}_+(x, t) \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}_+} = \mathcal{W}_+(x, t) \\ \mathcal{U}_-(x, t) \left(\frac{du}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} + \mathcal{V}_-(x, t) \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mathcal{C}_-} = \mathcal{W}_-(x, t) \end{cases}, \quad (3.7)$$

où $\mathcal{U}_{\pm}(x, t)$, $\mathcal{V}_{\pm}(x, t)$ et $\mathcal{W}_{\pm}(x, t)$ sont des fonctions de (x, t) s'exprimant à partir des coefficients du système (??) ainsi que des solutions $u(x, t)$ et $v(x, t)$. Ce nouveau système, faisant intervenir uniquement des dérivées le long des deux familles de courbes caractéristiques, est équivalent au système initial (??). Par simplicité, on peut le noter

$$\mathcal{U}_{\pm} (du)_{\mathcal{C}_{\pm}} + \mathcal{V}_{\pm} (dv)_{\mathcal{C}_{\pm}} = \mathcal{W}_{\pm} dt .$$

Contrairement au système initial, qui mélangeait les dérivées le long des deux familles de droites parallèles aux axes du plan (x, t) , le nouveau système découple les dérivations selon les deux familles de courbes transverses que forment les caractéristiques. Ce découplage permet de construire des algorithmes de résolution numérique plus précis, et, dans certains cas favorables, de trouver des solutions analytiques. C'est le cas lorsque l'on peut intégrer le système (??) pour le mettre sous la forme $(dJ_{\pm})_{\mathcal{C}_{\pm}} = 0$ où $J_+(u, v)$ et $J_-(u, v)$ sont des fonctions de (u, v) appelées "invariants de Riemann". Ces fonctions sont en effet respectivement constantes sur les courbes caractéristiques \mathcal{C}_+ ou \mathcal{C}_- .

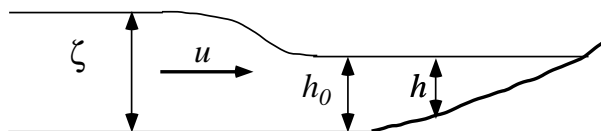
ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Équations en eaux peu profondes

On considère les équations en eaux peu profondes (Saint-Venant) écrites sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - h) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \zeta) = 0. \quad (3.8)$$

Ce modèle décrit un écoulement à surface libre dans un canal 1D dont la profondeur $h(x)$ est petite devant les échelles caractéristiques horizontales. Le champ $u(x, t)$ représente la vitesse horizontale du fluide moyennée sur la verticale. Le champ $\zeta(x, t)$ est la profondeur de la couche fluide lors du mouvement.



Dans un premier temps, on considère le cas particulier du fond plat $h(x) = h_0$.

- 1) En appliquant effectuant une combinaison linéaire judicieuse des deux équations, montrer que l'on a les relations $du_{C_{\pm}} \pm \sqrt{g/\zeta} d\zeta_{C_{\pm}} = 0$ le long des caractéristiques C_{\pm} définies par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{C_{\pm}} = u[x(t), t] \pm \sqrt{g\zeta[x(t), t]}$.

Pour $h = h_0$, on peut écrire

$$\begin{cases} u_t + u u_x + g \zeta_x = 0 \\ \zeta_t + u \zeta_x + \zeta u_x = 0. \end{cases}$$

En multipliant respectivement par 1 et $\pm \sqrt{\frac{g}{\zeta}}$ ces deux équations, on obtient

$$\left[u_t + (u \pm \sqrt{g\zeta}) u_x \right] \pm \sqrt{\frac{g}{\zeta}} \left[\zeta_t + (u \pm \sqrt{g\zeta}) \zeta_x \right] = 0.$$

D'où les relations $du_{C_{\pm}} \pm \sqrt{\frac{g}{\zeta}} d\zeta_{C_{\pm}} = 0$.

- 2) Montrer que les quantités $J_{\pm}(u, \zeta) = u \pm 2\sqrt{g\zeta}$ (appelées invariants de Riemann) sont invariantes le long des courbes caractéristiques.

En intégrant le long des caractéristiques $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{C_{\pm}} = u \pm \sqrt{g\zeta}$ on obtient $d(J_{\pm})_{C_{\pm}}$ avec $J_{\pm} = u \pm 2\sqrt{g\zeta}$.

- 3) Retrouver ces résultats en appliquant la méthode matricielle de détermination des caractéristiques et des relations de compatibilité associées.

Pour $h = h_0$, on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + u u_x + g \zeta_x = 0 \\ + \zeta u_x + \zeta_t + u \zeta_x = 0 \\ u_t + \lambda u_x = \left(\frac{du}{dt}\right)_C =: u' \\ + \zeta_t + \lambda \zeta_x = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_C =: \zeta' \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & u & 0 & g \\ 0 & \zeta & 1 & u \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array} \right| = 0.$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\left| \begin{array}{ccc} \zeta & 1 & u \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \right| - u \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & u \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \right| - \frac{1}{\rho} \left| \begin{array}{ccc} 0 & \zeta & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 0$$

d'où $\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{g\zeta}$.

La relation de compatibilité s'obtient en écrivant

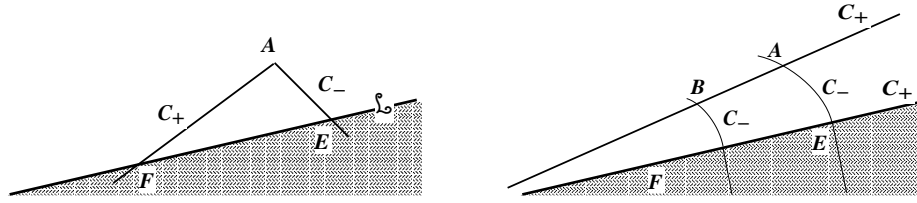
$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 1 & u \\ 1 & u' & 0 & 0 \\ 0 & \zeta' & 1 & \lambda \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & u \\ u' & 0 & 0 \\ \zeta' & 1 & \lambda \end{array} \right| - \frac{1}{\rho} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & u' & 0 \\ 0 & \zeta' & 1 \end{array} \right| = -u'(\lambda - u) - g\zeta' = 0.$$

D'où les relations de compatibilité $du_{C_{\pm}} (\pm\sqrt{g\zeta}) + gd\zeta_{C_{\pm}} = 0$, ce qui s'écrit encore $du_{C_{\pm}} \pm \sqrt{\frac{g}{\zeta}} d\zeta_{C_{\pm}} = 0$. On en déduit $d(u \pm \sqrt{g\zeta})_{C_{\pm}} = 0$, d'où $J_{\pm}(u, \zeta) = u \pm 2\sqrt{g\zeta}$.

2 Frontière d'un écoulement uniforme

On suppose considère un système hyperbolique admettant des caractéristiques C_+ et C_- et des invariants de Riemann $J_+(u, v)$ et $J_-(u, v)$ où (u, v) est la solution.

On appelle "onde simple", l'ensemble des points du plan (x, t) qui sont connectés à une région d'écoulement uniforme par au moins une courbe caractéristique. On veut montrer que la frontière entre un écoulement uniforme et l'onde simple qui lui est adjacente est obligatoirement une courbe caractéristique. Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde.



- 4) On suppose que la frontière \mathcal{L} n'est pas une courbe caractéristique. Montrer qu'il existe alors un voisinage de \mathcal{L} dont les points A sont connectés à la région d'écoulement uniforme à la fois par une C_+ et une C_- . On note E et F les points d'intersection respectifs avec \mathcal{L} de la C_+ et de la C_- issues de A . En supposant qu'il existe des invariants de Riemann, en déduire que les grandeurs physiques en A sont les mêmes que celles de l'écoulement uniforme. Conclure que \mathcal{L} ne peut pas être distincte d'une courbe caractéristique.

Si un tel voisinage n'existait pas, la courbe \mathcal{L} serait une C_+ ou une C_- , ce qui est contraire à l'hypothèse. Soit A un point de ce voisinage. La C_+ et la C_- issues de A coupent \mathcal{L} en deux points que l'on note respectivement E et F . En utilisant les invariants de Riemann et en notant u_0 et v_0 les variables de l'écoulement uniforme, on peut écrire $J_+(u_A, v_A) = J_+(u_E, v_E) = J_+(u_0, v_0)$ et $J_-(u_A, v_A) = J_-(u_F, v_F) = J_-(u_0, v_0)$. On en déduit alors que $u_A = u_0$ et $v_A = v_0$, ce qui signifie que A appartient à l'écoulement uniforme. Si \mathcal{L} est la frontière entre une onde simple et un écoulement uniforme, cette courbe doit donc être confondue avec une caractéristique.

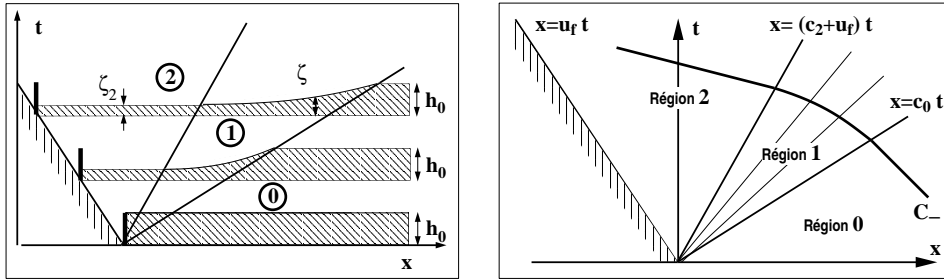
- 5) On suppose que \mathcal{L} , qui doit être une courbe caractéristique, est ici une C_+ . Montrer que toutes les C_+ de l'onde simple adjacente sont des droites le long desquelles la solution (u, v) est invariante.

Soit deux points A et B appartenant à une même C_+ de l'onde simple. On peut donc écrire $J_+(u_A, v_A) = J_+(u_B, v_B)$. Par définition de l'onde simple les points A et B sont connectés à la région uniforme par deux C_- qui coupent \mathcal{L} respectivement en E et en F . On peut alors écrire $J_-(u_A, v_A) = J_-(u_B, v_B)$ dans la mesure où $J_-(u_A, v_A) = J_-(u_E, v_E)$ et $J_-(u_B, v_B) = J_-(u_F, v_F)$ et où $u_E = u_0 = u_F$ et $v_E = v_0 = v_F$ dans la région uniforme. On a donc $u_A = u_B$ et $v_A = v_B$ le long d'une C_+ de l'onde simple. Comme la pente est constante, ces C_+ sont des droites.

3 Onde simple de détente centrée

Dans un canal de direction \underline{e}_x , une écluse située en $x = 0$ à $t = 0$ est dotée brutalement de la vitesse uniforme $u_f < 0$ et "tire" ainsi un fluide situé à sa droite, initialement au repos et de profondeur $\zeta_0 = h_0$. On utilise la modélisation de l'onde simple de détente centrée (région 1) séparant une région d'écoulement uniforme de vitesse $u_f < 0$ adjacente à l'écluse mobile (région 2) de la région

d'écoulement uniforme à vitesse nulle (région 0).



- 6) Montrer que la région 1 est délimitée par les deux droites d'équations $x = c_0 t$ et $x = (c_2 + u_f) t$, avec $c_0 = \sqrt{gh_0}$ et $c_2 = \sqrt{g\zeta_2}$.

La région 1 est une onde simple car adjacente à un écoulement uniforme. Les C_+ sont donc des droites d'équation $x = (u + c)t$. Les droites $x = c_0 t$ et $x = (c_2 + u_f)t$ délimitent donc la région 1.

- 7) En reliant les régions 2 et 0 par des courbes caractéristiques, montrer que $\zeta_2 = \frac{1}{g} \left(c_0 + \frac{u_f}{2} \right)^2$.

Le long d'une C_- , l'expression de l'invariant de Riemann J_- conduit à l'égalité $J_- = u_f - 2\sqrt{g\zeta_2} = -2\sqrt{g\zeta_0}$ ce qui entraîne $\sqrt{g\zeta_2} = c_0 + \frac{1}{2}u_f$ et donc $\zeta_2 = \frac{1}{g} \left(c_0 + \frac{1}{2}u_f \right)^2$.

- 8) Montrer que dans la région 1 correspondant à l'onde centrée, on a $u(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right)$ et $\sqrt{g\zeta(x, t)} = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{t} + 2c_0 \right)$.

Dans l'onde centrée on a

$$\begin{cases} x &= [u(x, t) + c(x, t)]t & \text{équation d'une } C_+ \\ u(x, t) - 2c(x, t) &= -2c_0 & \text{invariance de } J_- \end{cases}$$

On en déduit $u(x, t) = \frac{2}{3} \frac{x}{t} - \frac{2}{3}c_0$ et $c(x, t) = \frac{1}{3} \frac{x}{t} + \frac{2}{3}c_0$ avec $c = \sqrt{g\zeta}$.

4 Calcul des trajectoires

On cherche à déterminer les trajectoires des particules fluides pour les deux problèmes d'onde de détente ci-dessus.

- 9) Montrer que l'équation des trajectoires dans la région de l'onde simple revient à résoudre l'équation $\dot{x} = ax/t + b$ avec $(a, b) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}c_0 \right)$.

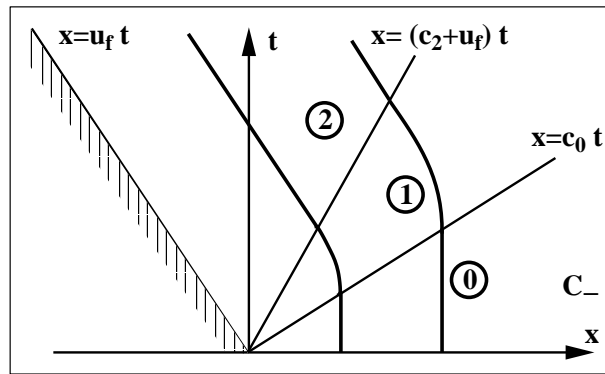
Les trajectoires $\underline{x}(t)$ des particules fluides sont les solutions de l'équation $\dot{x}(t) = u[x(t), t]$. Comme $u(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right)$, on doit résoudre $\dot{x} = ax/t + b$ avec $(a, b) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}c_0 \right)$.

- 10) Montrer que la solution de l'équation $\dot{x} = ax/t + b$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ s'écrit $x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a-1} t_0 \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^a - \frac{b}{a-1} t$.

On utilise ici la méthode de variation de la constante. La solution de l'équation homogène $\dot{x} - ax/t = 0$ est $x = K t^a$. Une solution particulière $x_p(t) = K(t) t^a$ est obtenue en résolvant $\dot{K} t^a = b$ ce qui conduit à $K(t) = -\frac{b}{a-1} t^{-a+1}$ et donc $x_p(t) = -\frac{b}{a-1} t$. La solution générale s'écrit donc $x(t) = K t^a - \frac{b}{a-1} t$ où K est maintenant une constante dépendant de la condition initiale.

- 11) Représenter schématiquement les trajectoires et les caractéristiques dans un plan (x, t) .

Dans les régions 0 et 2, les trajectoires sont des droites correspondant respectivement aux vitesses $u_0 = 0$ et $u_2 = u_f$. Les courbes $x(t) = \left(x_0 + 2c_0 t_0 \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 2c_0 t$ de la région 1 connectent ces deux types de droites.



- 12) Calculer l'équation des courbes caractéristiques C_- dans la région de l'onde simple.

L'équation d'une C_- dans l'onde simple s'obtient en résolvant $\dot{x} = u - c = \frac{1}{3}x/t - \frac{4}{3}c_0$. Les C_- passant par (x_0, t_0) admettent donc pour équation $x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a-1} t_0 \right) \left(\frac{t}{t_0} \right)^a - \frac{b}{a-1} t$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{4}{3}$.

PCM 4

Choc droit pour un gaz parfait polytropique

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Choc droit pour un gaz parfait polytropique
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpca (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	choc droit, relations d'Hugoniot droite de Rayleigh

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” indique comment établir les relations de saut du choc droit dans le cas d’un gaz parfait polytropique.

NOTATIONS

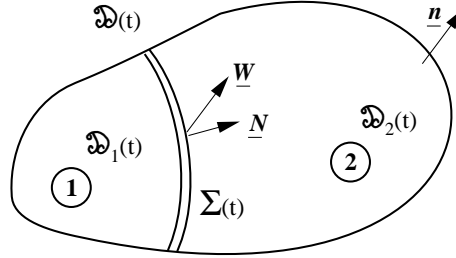
\underline{a} Vecteur quelconque

\underline{A}	Vecteur Flux rentrant
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'ordre 2
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{b}}$	Produit contracté de $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{b}}$
b_1	Valeur de b en amont du choc
b_2	Valeur de b en aval du choc
$[[b]] = b_2 - b_1$	Saut de b au travers du choc
$\text{div } \underline{A}$	Divergence de $\underline{A} : = A_i, i$
$\text{div } \underline{\underline{A}} = \underline{C}$	Divergence de $\underline{\underline{A}}$ de composante $C_i = A_{ij}, j$
\mathcal{D}	Domaine quelconque
$\partial\mathcal{D}$	Frontière de \mathcal{D}
da	Élément d'intégration surfacique (m^2)
$d\Omega$	Élément d'intégration volumique (m^3)
e	Énergie interne spécifique (J kg^{-1})
$\mathcal{E}(\rho, s)$	Loi d'état de l'énergie interne (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
\underline{F}	Densité volumique des forces extérieurs (N m^{-3})
$F(\underline{x}, t)$	Champ quelconque
h	Enthalpie spécifique (J kg^{-1})
\underline{n}	Vecteur unitaire normal sortant (m)
\underline{N}	Normal au choc
p	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
P_F	Production volumique de F
\underline{q}	Vecteur flux de chaleur (W m^{-3})
r_c	Production volumique de chaleur (W m^{-3})
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
t	Temps (s)
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
$\underline{W} = W \underline{N}$	Vitesse de la surface de discontinuité (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$\frac{\delta}{\delta t}$	Opérateur dérivée pour un domaine fixe (s^{-1})
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
$\underline{\sigma}$	Tenseur des contraintes (Pa)
$\Sigma(t)$	Surface de discontinuité
$\underline{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses (Pa)

ÉLÉMENTS DE COURS

Équations de saut dans le cas général

On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ animé du mouvement $\underline{U}(\underline{x}, t)$. On note \underline{n} le champ de vecteurs normaux à la surface $\partial\mathcal{D}(t)$. Ce domaine est traversé par une surface $\Sigma(t)$ qui sépare le domaine $\mathcal{D}(t)$ en deux sous-domaines $\mathcal{D}_1(t)$ et $\mathcal{D}_2(t)$ et dont la vitesse propre est $\underline{W}(\underline{x}, t)$. On note \underline{N} la normale à $\Sigma(t)$ orientée par convention de 1 vers 2.



On suppose que $F(\underline{x}, t)$, $\underline{A}(\underline{x}, t)$ et $\underline{U}(\underline{x}, t)$ sont des fonctions continuellement différentiables dans le complémentaire de la surface $\Sigma(t)$ où des discontinuités peuvent être observées. On note $\llbracket G \rrbracket(\underline{x}, t) = G_2(\underline{x}, t) - G_1(\underline{x}, t)$ le saut (éventuellement nul) de la grandeur G à travers la surface de discontinuité $\Sigma(t)$. On montre que si l'équation de bilan

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} F(\underline{x}, t) d\Omega - \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{A}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} da = \iiint_{\mathcal{D}(t)} P_F d\Omega \quad (4.1)$$

est vraie pour tous les domaines $\mathcal{D}(t)$ on peut alors écrire le “duo bilan local / relation de saut”

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} (F \underline{U} - \underline{A}) &= P_F \quad \text{en dehors de } \Sigma \\ \llbracket F (\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A} \rrbracket \cdot \underline{N} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans le cas d'une grandeur vectorielle on passe de l'équation

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{G} d\Omega = \iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \underline{A} \cdot \underline{n} da + \iiint_{\mathcal{D}(t)} \underline{P}_G d\Omega \quad (4.3)$$

au duo bilan local / relations de sauts

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{G} + \operatorname{div} (\underline{G} \otimes \underline{U} - \underline{A}) = \underline{P}_G \quad \text{en dehors de } \Sigma(t)$$

$$\left[\underline{G}(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{A} \right] \cdot \underline{N} = \underline{0} \quad \text{sur } \Sigma(t). \quad (4.4)$$

Il suffit en effet d'écrire le duo bilan local / relation de saut valide pour le scalaire F pour chacune des composantes de \underline{G} et de revenir à une notation intrinsèque.

Lois de conservation de la mécanique

On peut maintenant écrire les duos bilan local / relations de sauts pour la loi de conservation de la masse $(F, \underline{A}, P_F) = (\rho, \underline{0}, 0)$, pour la loi de conservation de la quantité de mouvement $(\underline{G}, \underline{A}, \underline{P}_G) = (\rho \underline{U}, \underline{\sigma}, \rho \underline{F})$ et pour la loi de conservation de l'énergie totale

$$(F, \underline{A}, P_F) = \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right), \underline{\sigma} \cdot \underline{U} - \underline{q}, \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c \right]. \quad (4.5)$$

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement entraînent respectivement les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{U}) &= 0, & \left[\rho(\underline{U} - \underline{W}) \right] \cdot \underline{N} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}) + \text{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U} - \underline{\sigma}) &= \rho \underline{F}, & \left[\rho \underline{U}(\underline{U} - \underline{W}) - \underline{\sigma} \right] \cdot \underline{N} &= 0. \end{aligned}$$

La loi de conservation de l'énergie totale entraîne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \underline{U} - \underline{\sigma} \cdot \underline{U} + \underline{q} \right] &= \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c \\ \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) (\underline{U} - \underline{W}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{U} + \underline{q} \right] \cdot \underline{N} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

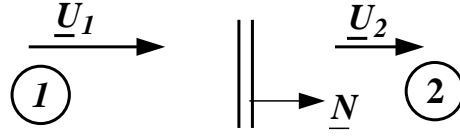
Le duo inégalité locale / inégalité de saut traduisant le second principe à l'aide du triplet $(F, \underline{A}, P_F) = (\rho s, -\underline{q}/T, r_c/T)$ conduit à la la formulation globale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \text{div} \left(\frac{1}{T} \underline{q} \right) \geq \frac{r_c}{T} \quad \left[\rho s(\underline{U} - \underline{W}) - \frac{1}{T} \underline{q} \right] \cdot \underline{N} \geq 0. \quad (4.7)$$

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Équations de saut pour le choc droit

- 1) Écrire les trois relations de saut pour les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans le cas particulier $\underline{\tau} = \underline{0}$, $\underline{F} = \underline{0}$, $\underline{q} = \underline{0}$ et $r_c = 0$.



Dans le cas particulier $\underline{\tau} = \underline{0}$, $\underline{F} = \underline{0}$, $\underline{g} = \underline{0}$ et $r_c = 0$ les relations de saut s'écrivent $\llbracket \rho(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} = 0$ pour la loi de conservation de la masse, $\llbracket \rho \underline{U}(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} + \llbracket p \rrbracket \underline{N} = 0$ pour la loi de conservation de quantité de mouvement et $\llbracket \rho (e + \frac{1}{2} \underline{U}^2) (\underline{U} - \underline{W}) - p \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{N} = 0$ pour la loi de conservation de l'énergie totale.

- 2) On considère maintenant le cas du choc droit $\underline{U} = U \underline{e}_x$ et on note $v_1 = (\underline{U}_1 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ et $v_2 = (\underline{U}_2 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$. Montrer que les trois relations de saut entraînent les trois relations $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$ et $h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$ avec $h = e + p/\rho$.

Dans le cas du choc droit, on obtient $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 =: m$ pour la loi de conservation de la masse. En utilisant $U_1 = v_1 + W$ et $U_2 = v_2 + W$, la loi de conservation de la quantité de mouvement $\rho_1 U_1 v_1 + p_1 = \rho_2 U_2 v_2 + p_2$ devient $\rho_1 v_1^2 + \rho_1 v_1 W + p_1 = \rho_2 v_2^2 + \rho_2 v_2 W + p_2$. En utilisant la loi de conservation de la masse, cette relation devient $\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$. La loi de conservation de l'énergie $\rho_1 (e_1 + \frac{1}{2} U_1^2) v_1 + p_1 U_1 = \rho_2 (e_2 + \frac{1}{2} U_2^2) v_2 + p_2 U_2$ s'écrit,

$$\begin{aligned} & \rho_1 v_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + v_1 W + \frac{1}{2} W^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + p_1 W \\ &= \rho_2 v_2 \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + v_2 W + \frac{1}{2} W^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) + p_2 W, \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en utilisant la conservation de la masse,

$$m \left(e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + W(p_1 + \rho_1 v_1^2) = m \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) + W(p_2 + \rho_2 v_2^2).$$

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, cette relation devient $e_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2}$.

- 3) À partir du second principe, montrer que $s_2 \geq s_1$ dans le cas du choc droit en orientant la normale \underline{N} (choix des milieux 1 et 2) de telle sorte que $m = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 > 0$.

Dans le cas particulier $\underline{g} = \underline{0}$ et $r_c = 0$, la relation de saut est $\llbracket \rho s(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} \geq 0$. Pour le choc droit, cette inégalité s'écrit $\rho_2 v_2 s_2 \geq \rho_1 v_1 s_1$ ou encore $m(s_2 - s_1) \geq 0$ en utilisant la conservation de la masse. Si on suppose $m > 0$, le second principe entraîne donc $s_2 \geq s_1$.

2 Choc droit pour un gaz parfait polytropique

Nous sommes donc en présence des 3 équations de bilan $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ (masse), $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$ (quantité de mouvement) et $h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$ (énergie totale) auxquelles nous devons ajouter les 4 lois d'état $p_1 = p(\rho_1, s_1)$ et $h_1 = h(\rho_1, s_1)$ pour le milieu 1 et $p_2 = p(\rho_2, s_2)$ et $h_2 = h(\rho_2, s_2)$ pour le milieu 2. Ces 7 équations relient entre elles les 10 quantités que sont $(\rho_1, s_1, p_1, h_1, v_1)$ pour le milieu 1 et $(\rho_2, s_2, p_2, h_2, v_2)$ pour le milieu 2. Il y a donc 3 degrés de liberté pour l'étude du choc droit. L'inégalité $s_2 \geq s_1$ est une contrainte supplémentaire dont il faut tenir compte. La donnée de U_1 ou bien de U_2 permet de fixer la vitesse du choc W une fois v_1 ou bien v_2 connu. Nous allons résoudre ce système à trois degrés de liberté pour le cas du gaz parfait polytropique.

- 4) On considère un gaz parfait polytropique : $p = \rho r T$, $C_v = r/(\gamma-1)$, $C_p = \gamma r/(\gamma-1)$, $e = C_v T$, $h = C_p T$, $c^2 = \gamma r T$, $p = B(s)\rho^\gamma$, $s = C_v \text{Ln}(p\rho^{-\gamma}) + s_{\text{ref}}$, etc. On note $M_1 = v_1/c_1$ et $M_2 = v_2/c_2$ les nombres de Mach relatifs. Exprimer les 3 relations de saut en ne faisant apparaître que les 6 variables (ρ_1, c_1, M_1) et (ρ_2, c_2, M_2) . Constater qu'il reste toujours 3 degrés de liberté.

Les trois relations de saut $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$ et $h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$ s'écrivent

$$\rho_1 M_1 c_1 = \rho_2 M_2 c_2, \quad \rho_1 \frac{c_1^2}{\gamma} + \rho_1 M_1^2 c_1^2 = \rho_2 \frac{c_2^2}{\gamma} + \rho_2 M_2^2 c_2^2,$$

$$\text{et} \quad C_p T_1 + \frac{1}{2}M_1^2 c_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2}M_2^2 c_2^2,$$

en encore, en ne gardant que les 6 variables (ρ_1, c_1, M_1) et (ρ_2, c_2, M_2) pour les 3 relations,

$$\rho_1 M_1 c_1 = \rho_2 M_2 c_2, \quad \rho_1 c_1^2(1 + \gamma M_1^2) = \rho_2 c_2^2(1 + \gamma M_2^2),$$

$$\text{et} \quad c_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right) = c_2^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right).$$

- 5) Éliminer les variables ρ et c pour établir la relation $f(M_1^2) = f(M_2^2)$ avec

$$f(X) = X \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}X\right) (1 + \gamma X)^{-2}. \quad (4.8)$$

Le quotient de la deuxième équation par la première permet d'écrire $\frac{c_1}{c_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{1+\gamma M_2^2}{1+\gamma M_1^2}$. La troisième équation s'écrit $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}$. On en déduit donc $\frac{M_1^2(1+\gamma M_2^2)^2}{M_2^2(1+\gamma M_1^2)^2} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}$ ou encore $f(M_1^2) = f(M_2^2)$ avec $f(X) = \frac{X(1+\frac{\gamma-1}{2}X)}{(1+\gamma X)^2}$. La première relation conduisant à $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_2 c_2}{M_1 c_1}$, on peut exprimer, par exemple, (ρ_2, c_2, M_2) en fonction de (ρ_1, c_1, M_1) à condition d'inverser l'équation implicite $f(M_2^2) = f_1$ avec $f_1 = f(M_1^2)$.

- 6) M_1 étant connu, résoudre l'équation $f(M_2^2) = f(M_1^2)$ en remarquant que $M = M_1$ est une solution particulière. En déduire que

$$M_2^2 [M_1^2, \gamma] = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} = 1 - \frac{(\gamma + 1)(M_1^2 - 1)}{1 + \gamma(2M_1^2 - 1)}. \quad (4.9)$$

L'équation $f(X) = f_1$ s'écrit $X(1 + \frac{\gamma-1}{2}X) = (1 + 2\gamma X + \gamma^2 X^2)f_1$ ou encore $X^2(\gamma^2 f_1 - \frac{\gamma-1}{2}) + X(2\gamma f_1 - 1) + f_1 = 0$. Comme $X_1 = M_1^2$ est solution, le produit des racines $X_1 X_2 = \frac{f_1}{\gamma^2 f_1 - \frac{\gamma-1}{2}}$ conduit à $X_2 = \frac{1}{X_1} \frac{f(X_1)}{\gamma^2 f(X_1) - \frac{\gamma-1}{2}}$. D'où

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{X_1} \frac{X_1(1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1)}{\gamma^2 X_1(1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1) - \frac{\gamma-1}{2}(1 + \gamma X_1)^2} \\ &= \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1}{\gamma^2 X_1(1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1) - \frac{\gamma-1}{2}(1 + \gamma X_1)^2} \\ &= \frac{X_1^2 \gamma^2 (\frac{\gamma-1}{2} - \frac{\gamma-1}{2}) + X_1 \gamma [\gamma - (\gamma - 1)] - \frac{\gamma-1}{2}}{2 + (\gamma - 1)X_1} = \frac{(2\gamma X_1 + 1 - \gamma) - (\gamma + 1)X_1 + 1 + \gamma}{2\gamma X_1 + 1 - \gamma} \\ &= \frac{2\gamma X_1 + 1 - \gamma}{(\gamma + 1)(X_1 - 1)} \\ &= 1 - \frac{(\gamma + 1)(X_1 - 1)}{2\gamma X_1 + 1 - \gamma} \end{aligned} \quad (4.10)$$

D'où $M_2^2 = 1 - \frac{(\gamma+1)(M_1^2-1)}{1+\gamma(2M_1^2-1)} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2+1-\gamma}$.

- 7) En déduire les relations de choc

$$\begin{aligned} T_2/T_1 &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)M_1^2} \\ p_2/p_1 &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \quad \text{et} \quad \rho_2/\rho_1 = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)X_1}{2 + (\gamma - 1)X_2} = \frac{[2 + (\gamma - 1)X_1]}{\left[2 + (\gamma - 1)\frac{2+(\gamma-1)X_1}{2\gamma X_1+1-\gamma}\right]} \\ &= \frac{[2 + (\gamma - 1)X_1][2\gamma X_1 + 1 - \gamma]}{4\gamma X_1 + 2(1 - \gamma) + 2(\gamma - 1) + (\gamma - 1)^2 X_1} \\ &= \frac{4\gamma X_1 + 2(1 - \gamma) + 2\gamma(\gamma - 1)X_1^2 - (\gamma - 1)^2 X_1}{(\gamma + 1)^2 X_1} \\ &= 1 + \frac{2\gamma(\gamma - 1)X_1^2 + [4\gamma - (\gamma - 1)^2 - (\gamma + 1)^2]X_1 + 2(1 - \gamma)}{(\gamma + 1)^2 X_1} \\ &= 1 + (\gamma - 1) \frac{[2\gamma X_1^2 - 2(\gamma - 1)X_1 - 2]}{(\gamma + 1)^2 X_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)(X_1 - 1)(\gamma X_1 + 1)}{(\gamma + 1)^2 X_1}. \end{aligned}$$

Comme $p = \rho r T = \rho c^2 / \gamma$, on a $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_1 c_1^2} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2}$ d'après la question 6. On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{(1 + \gamma X_1)}{1 + \gamma \frac{2+(\gamma-1)X_1}{2\gamma X_1+1-\gamma}} \\ &= \frac{(1 + \gamma X_1)(2\gamma X_1 + 1 - \gamma)}{2\gamma X_1 + 1 - \gamma + 2\gamma + \gamma(\gamma - 1)X_1} = \frac{(1 + \gamma X_1)(2\gamma X_1 + 1 - \gamma)}{X_1(\gamma^2 + \gamma) + (\gamma + 1)} \\ &= \frac{(1 + \gamma X_1)(2\gamma X_1 + 1 - \gamma)}{(1 + \gamma X_1)(\gamma + 1)} = 1 + \frac{2\gamma X_1 - 2\gamma}{\gamma + 1} = 1 + \frac{2\gamma(X_1 - 1)}{\gamma + 1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{p_2 c_1^2}{p_1 c_2^2}$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(2\gamma X_1 + 1 - \gamma)}{\gamma + 1} \frac{(\gamma + 1)^2 X_1}{(2\gamma X_1 + 1 - \gamma)[2 + (\gamma - 1)X_1]} \\ &= \frac{(\gamma + 1)X_1}{2 + (\gamma - 1)X_1} = 1 + \frac{2(X_1 - 1)}{2 + (\gamma - 1)X_1}. \end{aligned}$$

3 Droite de Rayleigh et courbe d'Hugoniot

Dans tout ce qui suit, on note $\tau = 1/\rho$.

- 8) Pour cette première question, on se place dans le cas d'un gaz quelconque tel que la loi d'état $p = p(\tau, s)$ vérifie les relations de Weyl $\frac{\partial p}{\partial \tau} < 0$, $\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} > 0$ et $\frac{\partial p}{\partial s} > 0$. On suppose que le couple (τ_1, p_1) est connu. Montrer que les trois relations de saut entraînent que le couple (τ_2, p_2) est à l'intersection de la droite de Rayleigh $p_2 - p_1 = -m^2(\tau_2 - \tau_1)$ et de la courbe d'Hugoniot $h_2(\tau_2, p_2) - h_1(\tau_1, p_1) = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_2 + \tau_1)$.

Les trois relations de saut $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 =: m$, $p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$ et $h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$ entraînent $p_2 - p_1 = \rho_1^2 v_1^2 \tau_1 - \rho_2^2 v_2^2 \tau_2 = -m(\tau_2 - \tau_1)$ en utilisant les deux premières relations et $h_2 - h_1 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{2}(\rho_1^2 v_1^2 \tau_1^2 - \rho_2^2 v_2^2 \tau_2^2) = \frac{1}{2}m^2(\tau_1^2 - \tau_2^2) = -\frac{1}{2}m^2(\tau_2 - \tau_1)(\tau_1 + \tau_2)$ en utilisant les deux dernières relations, ce qui conduit à $h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\tau_1 + \tau_2)$ en utilisant l'expression de la droite de Rayleigh.

- 9) Dans le cas du gaz parfait polytropique, montrer que $h(\tau, p) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \tau p$ et que l'équation de la courbe d'Hugoniot conduit à la relation $\mathcal{P} = \mathcal{H}(\mathcal{T})$ avec $\mathcal{P} = p_2/p_1$ et $\mathcal{T} = \tau_2/\tau_1 = \rho_1/\rho_2$ où la fonction \mathcal{H} est définie par $\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \frac{(1-\gamma)\mathcal{T} + (1+\gamma)}{(1+\gamma)\mathcal{T} + (1-\gamma)}$. Montrer que $\mathcal{H}'(1) = -\gamma$.

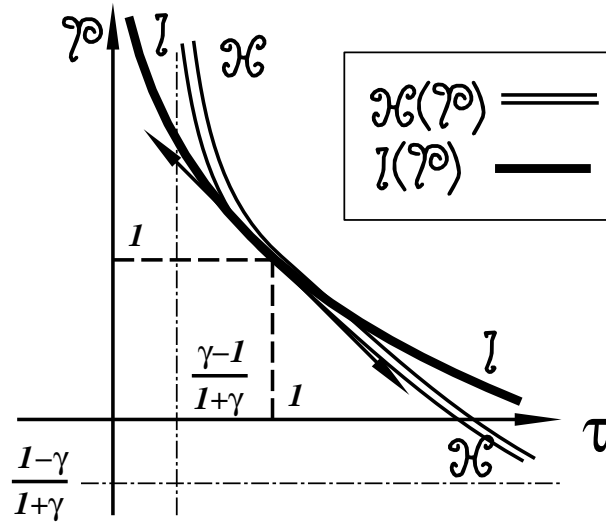
Pour un gaz parfait polytropique, on a $h = C_p T = \frac{\gamma r}{\gamma-1} T = \frac{\gamma}{\gamma-1} p \tau$ car $p \tau = r T$. L'équation de la courbe d'Hugoniot s'écrit alors $h_2 - h_1 = \frac{\gamma}{\gamma-1} (p_2 \tau_2 - p_1 \tau_1) = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (\tau_1 + \tau_2)$. En divisant par $p_1 \tau_1$, on obtient finalement $\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2 \tau_2}{p_1 \tau_1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)$ soit encore $\frac{\gamma}{\gamma-1} (\mathcal{P} \mathcal{T} - 1) = \frac{1}{2} (\mathcal{P} - 1) (1 + \mathcal{T})$. D'où $\mathcal{P} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \right) \mathcal{T} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{2} \mathcal{T} + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2} \right)$ et donc $\mathcal{P} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{T} - 1 \right) = -\mathcal{T} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. On en déduit finalement $\mathcal{P} = \mathcal{H}(\mathcal{T})$ ce qui s'écrit aussi $\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1-\gamma)\tau_2 + (1+\gamma)\tau_1}{(1+\gamma)\tau_2 + (1-\gamma)\tau_1}$. La dérivée de la fonction \mathcal{H} s'écrit

$$\mathcal{H}' = \begin{vmatrix} 1-\gamma & 1+\gamma \\ 1+\gamma & 1-\gamma \end{vmatrix} / [(1+\gamma)\tau + (1-\gamma)]^2 = \frac{(1-\gamma)^2 - (1+\gamma)^2}{[(1+\gamma)\tau + (1-\gamma)]^2} = \frac{-4\gamma}{[(1+\gamma)\tau + (1-\gamma)]^2}.$$

On a, en particulier, $\mathcal{H}'(1) = -\gamma$.

- 10) Montrer que l'ensemble des couples (τ_2, p_2) qui ont la même entropie que le couple (τ_1, p_1) vérifient $\mathcal{P} = \mathcal{I}(\mathcal{T})$ où la fonction \mathcal{I} est la courbe isentropique définie par $\mathcal{I}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}^{-\gamma}$. Montrer que $\mathcal{I}'(1) = -\gamma$. Tracer l'allure des courbes $\mathcal{H}(\mathcal{T})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{T})$.

Si s_0 est l'entropie commune des couples (p_2, τ_2) et (p_1, τ_1) , on a $p_2 = B(s_0) \rho_2^\gamma$ et $p_1 = B(s_0) \rho_1^\gamma$ d'où $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^\gamma$ ce qui s'écrit $\mathcal{P} = \mathcal{T}^{-\gamma} =: \mathcal{I}(\mathcal{T})$. La dérivée de la fonction \mathcal{I} est $\mathcal{I}'(\mathcal{T}) = -\gamma \mathcal{T}^{-\gamma-1}$ et l'on a, en particulier, $\mathcal{I}'(1) = -\gamma$. Pour le tracé des courbes, on remarque que $\mathcal{H}(1) = \mathcal{I}(1) = 1$ et $\mathcal{H}'(1) = \mathcal{I}'(1) = -\gamma$. Les asymptotes horizontales sont $\mathcal{H}(+\infty) = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} < \mathcal{I}(+\infty) = 0$. Les asymptotes verticales sont données par $\mathcal{I}(0) = +\infty$ et $\mathcal{H}\left(\frac{\gamma-1}{1+\gamma}\right) = +\infty$. Notons que $0 < \frac{\gamma-1}{1+\gamma}$.



- 11) En étudiant la variation de $\mathcal{G}(T) = \text{Ln} [\mathcal{H}(T)/\mathcal{I}(T)]$ lorsque $\mathcal{H}(T) > 0$, déterminer la position de la courbe d'Hugoniot $\mathcal{H}(T)$ par rapport à la courbe d'isentrope $\mathcal{I}(T)$.

La dérivée de la fonction $\mathcal{G}(T) = \text{Ln} \left[\frac{(1-\gamma)T + (1+\gamma)}{(1+\gamma)T + (1-\gamma)} T^\gamma \right]$ est

$$\mathcal{G}'(T) = \frac{1-\gamma}{(1-\gamma)T + (1+\gamma)} - \frac{(1+\gamma)}{(1+\gamma)T + (1-\gamma)} + \frac{\gamma}{T} = \frac{\text{Num}}{\text{Denom}} \quad (4.11)$$

avec $\text{Denom} = [(1-\gamma)T + (1+\gamma)][(1+\gamma)T + (1-\gamma)]T$ et $\text{Num} = (1-\gamma^2)T^2 + (1-\gamma)^2T - (1-\gamma)^2T^2 - (1+\gamma)^2T + \gamma[(1-\gamma^2)T^2 + (1+\gamma)^2T + (1-\gamma)^2T + (1-\gamma^2)] = -4\gamma T + \gamma[(1-\gamma^2)(T^2 + 1) + 2(1+\gamma^2)T] = \gamma[(1-\gamma^2)(T^2 + 1) + 2(\gamma^2 - 1)T] = -\gamma(\gamma^2 - 1)(T^2 + 1 - 2T) = -\gamma(\gamma^2 - 1)(T - 1)^2 \leq 0$. Le signe de Denom est égal au signe de \mathcal{H} , donc positif sur le domaine de définition de \mathcal{G} . On en déduit que \mathcal{G} est une fonction décroissante. Comme $\mathcal{G}(1) = 0$ on a $\mathcal{H}(T) > \mathcal{I}(T)$ pour $T < 1$ et $\mathcal{H}(T) < \mathcal{I}(T)$ pour $T > 1$. Ceci est vrai aussi pour $\mathcal{H}(T) \leq 0$ car $\mathcal{I}(T)$ est toujours positif.

- 12) Montrer que $s_2 - s_1 = C_v \mathcal{G}(\tau_2/\tau_1)$. En déduire que l'inégalité $s_2 > s_1$ entraîne les relations $\rho_1 < \rho_2$, $M_1 > 1 > M_2$, $p_1 < p_2$ et $T_1 < T_2$.

Comme $s = C_v \text{Ln} (p \rho^{-\gamma})$, on peut écrire $\frac{s_2 - s_1}{C_v} = \text{Ln} \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^\gamma \right] = \text{Ln} \frac{\mathcal{H}(T)}{\mathcal{I}(T)} = \mathcal{G}(T)$. La contrainte $s_2 > s_1$ impose $\mathcal{G}(T) > 0$ et donc $T < 1$. On a donc $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$. Comme $\frac{p_2}{p_1}$ est une fonction croissante de M_1 , on a finalement $\rho_2 > \rho_1$, $p_1 < p_2$, $M_1 > 1 > M_2$ et $T_1 < T_2$ dans un choc droit tel que $m > 0$.

4 Grandeurs génératrices

On définit les grandeurs génératrices (p_0, ρ_0, T_0) , associées à domaine 1D ou quasi-1D sans discontinuités dans lequel les quantités s et $h + \frac{1}{2}U^2$ sont conservées, à l'aide des relations $s = s_0$ et $h_0 = h^2 + \frac{1}{2}U^2$ ainsi que les lois d'état du gaz permettant d'en déduire p_0 et ρ_0 . Ces grandeurs correspondent donc à un point réel ou fictif de vitesse nulle dans ce domaine. On rappelle que pour un gaz parfait polytropique cette définition entraîne le résultat $p/p_0 = (1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ où $M = U/c$ est le nombre de Mach.

- 13) Montrer que si p_{01} et p_{02} désignent respectivement les pressions génératrice en amont et en aval du choc, leur rapport $\pi = p_{02}/p_{01}$ vérifie

$$\pi [M_1^2, \gamma] = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right] \left\{ \frac{[2 + (\gamma-1)M_1^2] [2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]}{(\gamma+1)^2 M_1^2} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

On a $\pi = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} = (1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2)^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right] (1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$,
ce qui entraîne $\pi = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \right] E^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ avec

$$\begin{aligned} E &= \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1)}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{2+(\gamma-1)X_1}{2\gamma X_1 + 1 - \gamma} \right]} = \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2}X_1) (2\gamma X_1 + 1 - \gamma)}{2\gamma X_1 + 1 - \gamma + \gamma - 1 + \frac{(\gamma-1)^2}{2}X_1} \\ &= \frac{[2 + (\gamma-1)X_1][2\gamma X_1 + 1 - \gamma]}{X_1[(\gamma-1)^2 + 4\gamma]} \\ &= \frac{[2 + (\gamma-1)X_1][2\gamma X_1 + 1 - \gamma]}{X_1(\gamma+1)^2}. \end{aligned}$$

- 14) Montrer que dans le cas particulier $W = 0$, le température génératrice $T_{01} = T_{02}$ reste inchangée dans un choc droit.

On a $h_{01} = h_1 + \frac{1}{2}U_1^2$ et $h_{02} = h_2 + \frac{1}{2}U_2^2$ par définition des grandeurs génératrices et $h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2$ par application de la relation de saut pour l'énergie totale. Comme $v_1 = U_1 + W$ et $v_2 = U_2 + W$, on a $h_{02} - h_{01} = W(U_1 - U_2)$. Dans le cas d'un gaz parfait polytropique, cette relation s'écrit $C_p(T_{02} - T_{01}) = W(U_1 - U_2)$. Dans le cas particulier $W = 0$, on a $T_{02} = T_{01}$.

PCM 5

Choc rectiligne et tube à choc

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Choc rectiligne et tube à choc
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc4 (2004)
Mois de création :	mai 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	choc droit, relations de saut choc centré, tube à choc

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” applique les relations de saut du choc droit pour un gaz parfait polytropique. Le cas limite du choc rectiligne est considéré.

NOTATIONS

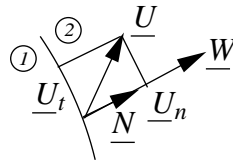
b_1	Valeur de b en amont du choc
b_2	Valeur de b en aval du choc
$[[b]] = b_2 - b_1$	Saut de b au travers du choc

$c = \sqrt{\gamma r T}$	Vitesse du son d'un gaz parfait (m s^{-1})
C_v	Capacité calorifique à volume constant ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
$C_p = C_v + r$	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
e	Énergie interne spécifique (J kg^{-1})
\mathcal{M}	Masse molaire du gaz (kg)
m	Débit volumique à travers le choc ($\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$)
M_1, M_2	Nombres de Mach dans le repère du choc ($\text{}$)
\underline{N}	Normal au choc
p	Champ de pression (Pa)
$r = R/\mathcal{M}$	Constante R divisée par la masse molaire ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_{ref}	Entropie de référence ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
T	Température ($^\circ\text{K}$)
\underline{U}	Champ de vitesse (m s^{-1})
v_1, v_2	Vitesse $v_i = (\underline{U}_i - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ (m s^{-1})
$\underline{W} = W \underline{N}$	Vitesse de la surface de discontinuité (m s^{-1})
$\gamma = C_p/C_v$	Notation pour C_p/C_v
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})

ÉLÉMENTS DE COURS

Relations de saut

On considère une surface de discontinuité dont la normale \underline{N} est orientée de la région 1 vers la région 2. On note $\underline{W} = W \underline{N}$ la vitesse de propagation de cette surface, $(\underline{U}_1, \rho_1, p_1, \dots)$ et $(\underline{U}_2, \rho_2, p_2, \dots)$ les champs situés respectivement dans la région 1 et la région 2. On note $[[b]] = b_2 - b_1$ le saut du champ b à travers la surface de discontinuité.



Pour un fluide parfait, les relations de saut issues des bilans globaux s'écrivent comme suit.

Bilan de masse :

$$[[\rho(\underline{U} - \underline{W})]] \cdot \underline{N} = 0. \quad (5.1)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\llbracket \rho (\underline{U} - \underline{W}) \underline{U} \cdot \underline{N} - p \underline{N} \rrbracket = \underline{0}. \quad (5.2)$$

Bilan d'énergie :

$$\llbracket \rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) (\underline{U} - \underline{W}) + p \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{N} = 0 \quad (5.3)$$

Second principe de la thermodynamique :

$$\llbracket \rho s(\underline{U} - \underline{W}) \rrbracket \cdot \underline{N} \geq 0 \quad (5.4)$$

On note alors $v_1 = (\underline{U}_1 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ et $v_2 = (\underline{U}_2 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$. La relation de saut du bilan de masse s'écrit alors $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. On note m cette valeur commune.

Dans le cas où $m \neq 0$, c'est-à-dire lorsque le fluide traverse la surface de discontinuité, on suppose que $m > 0$, quitte à changer l'orientation de \underline{N} si ce n'est pas le cas initialement. Les relations de saut s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 =: m > 0 \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad \text{et} \quad \underline{U}_{1t} = \underline{U}_{2t} \\ e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 &= e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 \\ s_2 &> s_1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

où \underline{U}_{1t} et \underline{U}_{2t} sont les projections tangentielles de la vitesse.

Cas du gaz parfait polytropique

Pour un gaz parfait polytropique, de lois d'états $p = \rho r T$, $e = C_v T$ et $s = s_{ref} + C_v \ln(p \rho^{-\gamma})$ avec $\gamma = C_p / C_v$ et $C_p = C_v + r$, les relations de saut entraînent :

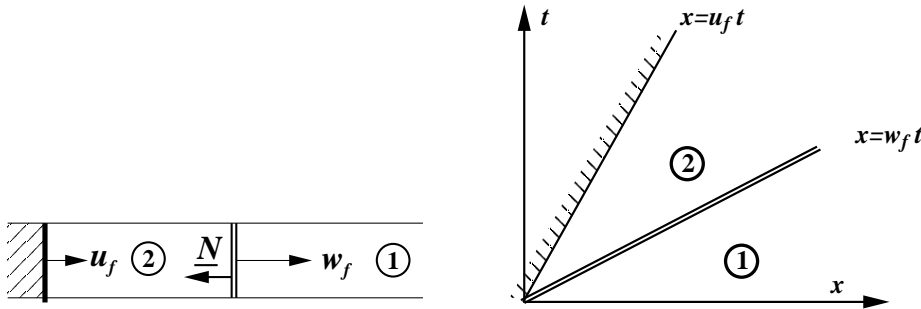
$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \\ M_1 &> 1 > M_2. \end{aligned}$$

Dans le cas 1D homoentropique (s homogène), les deux variables (u, c) suffisent à décrire l'écoulement. Les invariants de Riemann pour un gaz parfait polytropique de vitesse s'écrivent $J_{\pm}(u, c) = u \pm \frac{2c}{\gamma-1}$ le long des caractéristiques C_{\pm} d'équations $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{C_{\pm}} = u \pm c$ où u est la vitesse des particules et $c = \sqrt{\gamma r T}$ la vitesse du son.

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Choc rectiligne

Dans un tube d'axe \underline{e}_x , un piston est doté brutalement de la vitesse uniforme $u_f > 0$ et pousse ainsi un fluide situé à sa droite. On suppose que l'écoulement est unidimensionnel. On note $\underline{U} = u \underline{e}_x$ afin de réserver la notation U pour exprimer $\underline{U} = U \underline{N}$ dans les relations de saut, la normale \underline{N} étant orientée de telle sorte que $m > 0$. On utilise la modélisation simplifiée du choc rectiligne pour laquelle le choc se propage à la vitesse constante w_f en étant positionné sur le piston à $t = 0$. La région 1, initialement au repos, est caractérisée par la donnée de c_1 et p_1 . On suppose que l'écoulement est uniforme dans la région 2 située entre le piston et le choc. On veut calculer la vitesse du choc w_f et les caractéristiques c_2 et p_2 du fluide dans la région 2.



- 1) En notant $W = -w_f$ montrer que $v_1 = -W$, $v_2 = -u_f - W$ et $m > 0$.
En notant $M_1 = w_f/c_1$, en déduire que $M_2 < 1 < M_1$ et $s_2 > s_1$.

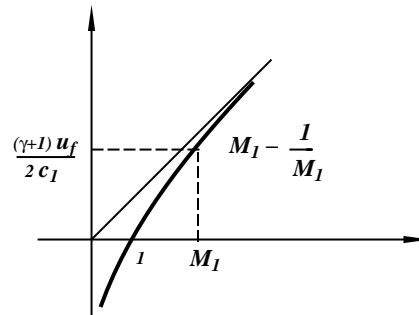
Le choix des régions 1 et 2 entraîne la convention $\underline{N} = -\underline{e}_x$. On a donc $w_f = -W$, $u_1 = -U_1 = 0$ et $u_2 = -U_2 = u_f$. Comme $w_f > 0$ et $m = \rho_1 v_1 = -\rho_1 W = \rho_1 w_f$, on a $m > 0$, ce qui valide le choix des régions 1 et 2 de l'énoncé. On en déduit $M_1 > 1 > M_2$ et $s_2 > s_1$.

- 2) En utilisant l'équation de saut du bilan de masse, montrer que l'on peut écrire $u_f = w_f(1 - \rho_1/\rho_2)$.

La relation de saut $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ entraîne $\rho_1(-W) = \rho_2(-u_f - W)$ d'où $\rho_1 w_f = \rho_2(-u_f + w_f)$ et $\rho_2 u_f = \rho_2 w_f - \rho_1 w_f$. On a finalement $u_f = w_f \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$.

- 3) En utilisant l'expression de ρ_2/ρ_1 en fonction de M_1^2 , en déduire que M_1 est solution de l'équation $M_1 - 1/M_1 = \frac{(\gamma+1)u_f}{2c_1}$. Résoudre graphiquement cette équation et discuter la valeur de w_f en fonction de u_f et c_1 .

Comme $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2-1)}{2+(\gamma-1)M_1^2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$, on a $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}$. On en déduit $1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 - 2 - (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} = \frac{2(M_1^2-1)}{(\gamma+1)M_1^2} = \frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)$. On doit donc résoudre (graphiquement ou racines d'un polynôme du second degré) l'équation implicite $M_1 - \frac{1}{M_1} = \frac{(\gamma+1)u_f}{2c_1}$. Le nombre de Mach M_1 croît lorsque c_1 (ou T_1) décroît ou u_f croît. Pour M_1 grand, la vitesse $w_f = M_1 c_1 \sim (\gamma+1)u_f$ ne dépend plus de c_1 .

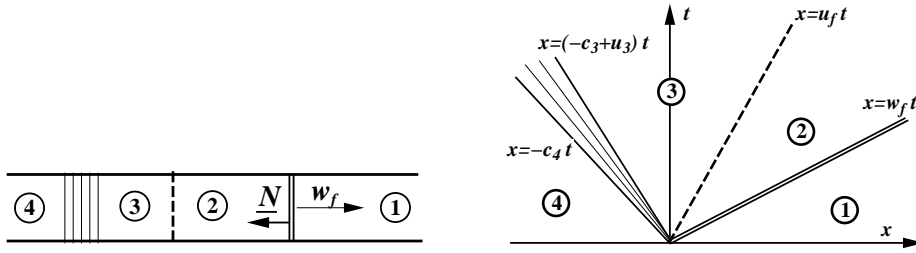


- 4) Exprimer c_2 et p_2 en fonction de c_1 et p_1 en supposant $M_1(u_f, c_1)$ déterminé par la résolution graphique précédente.

On a $\frac{c_2^2}{c_1^2} = 1 + \frac{2(\gamma-1)(M_1^2-1)(\gamma M_1^2+1)}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$ et $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)$.

2 Tube à choc

On considère le problème classique du tube à choc : une membrane sépare deux fluides distincts caractérisés par les données $(u_4 = 0, p_4, T_4, \gamma_4)$ à gauche et $(u_1 = 0, p_1, T_1, \gamma_1)$ à droite. À l'instant $t = 0$, on met en contact les deux fluides en cassant la membrane. On suppose que le fluide de gauche pousse le fluide de droite vers la droite.



On expose tout d'abord la modélisation qui permettra de déterminer les solutions (u, p, c, s) dans chacune des régions du plan (x, t) :

- * *Région 1* : donnée de $u_1 = 0$, p_1 et c_1 dont on déduit s_1 . L'écoulement est uniforme.
- * *Région 2* : écoulement uniforme séparé de la région 1 par un choc droit rectiligne.
- * *Région 3* : écoulement uniforme avec continuité de $u_2 = u_3 =: u_f$ et $p_3 = p_2$ à l'interface des deux fluides.
- * *Région OS* : onde simple centrée de détente formée de droites C_- et comprise entre les droites $x = (-c_3 + u_3)t$ et $x = -c_4 t$. L'écoulement est homoentropique.
- * *Région 4* : donnée de $u_4 = 0$, p_4 et c_4 dont on déduit s_4 .

5) *Choc droit entre les régions 1 et 2*. La normale $\underline{N} = -\underline{e}_x$ est orientée de la région 1 vers la région 2. On note $\underline{U} = u\underline{e}_x = U\underline{N}$ ce qui entraîne $u_1 = -U_1 = 0$ et $u_2 = -U_2 =: u_f$. La vitesse du choc $\underline{W} = w_f\underline{e}_x = W\underline{N}$ est telle que $w_f = -W > 0$. Montrer que les notations du cours se traduisent ici par $v_1 = -W = w_f$, $v_2 = U_2 - W = -u_f + w_f$ et $M_1 = w_f/c_1 > 0$. En déduire que $M_1 > 1 > M_2$ et $s_2 > s_1$.

| Comme $m = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 > 0$, on a $s_2 > s_1$ et $M_2 < 1 < M_1$.

6) *Région 2*. On cherche à démontrer la relation $u_2 = \frac{2c_1}{\gamma_1+1} \frac{M_1^2-1}{M_1}$ où $M_1 = w_f/c_1$ est le nombre de Mach relatif. Montrer que la relation de saut $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ entraîne $u_f = w_f(1 - \rho_1/\rho_2)$. Utiliser la relation $\rho_2/\rho_1 = 1 + \frac{2(M_1^2-1)}{2+(\gamma_1-1)M_1^2}$ pour en déduire que $u_f = u_2 = \frac{2c_1}{(\gamma_1+1)}(M_1 - 1/M_1)$. Montrer que c_2 est déterminé par la relation $c_2^2/c_1^2 = 1 + \frac{2(\gamma_1-1)(M_1^2-1)(\gamma_1 M_1^2+1)}{(\gamma_1+1)^2 M_1^2}$.

La conservation de la masse entraîne $(\rho_1 v_1 =) \rho_1 w_f = \rho_2(-u_f + w_f)(= \rho_1 v_2)$. D'où $u_f = w_f(1 - \rho_1/\rho_2)$. En notant $w_f = M_1 c_1$, $X_1 = M_1^2$ et $X_2 = M_2^2$, on en déduit $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma_1 - 1)M_1^2} = \frac{2 + (\gamma_1 - 1)X_1 + 2X_1 - 2}{2 + (\gamma_1 - 1)X_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)X_1}{2 + (\gamma_1 - 1)X_1}$, d'où $\rho_1/\rho_2 = \frac{2 + (\gamma_1 - 1)X_1}{(\gamma_1 + 1)X_1}$ et $1 - \rho_1/\rho_2 = \frac{(\gamma_1 + 1)X_1 - 2 - (\gamma_1 - 1)X_2}{(\gamma_1 + 1)X_1} = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \frac{X_1 - 1}{X_1} = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^2}$. On obtient finalement

$$u_2 = u_f = M_1 c_1 \frac{2}{\gamma_1 + 1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right) = \frac{2c_1}{\gamma_1 + 1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right).$$

La vitesse c_2 est obtenue à partir de l'expression

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma_1 - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma_1 M_1^2 + 1)}{(\gamma_1 + 1)^2 M_1^2}.$$

- 7) *Région OS.* Rappeler le résultat permettant d'établir que $s_3 = s_4$. En écrivant la valeur de l'invariant de Riemann J_+ d'une caractéristique C_+ reliant les régions 3 et 4, montrer que $c_3 = c_4 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} u_3$. Montrer que les droites $x = -c_4 t$ et $x = \left(-c_4 + \frac{\gamma_4 + 1}{2} u_3 \right) t$ délimitent une onde simple comprise entre les régions 3 et 4. En utilisant le fait que l'écoulement est homoentropique pour le fluide de gauche, montrer que $p_3/p_4 = \left(\frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{c_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$.

Les particules fluides qui ne traversent pas de chocs conservent leur entropie. Dans les régions 3 et 4 ainsi que dans l'onde simple les séparant, l'écoulement est donc homoentropique et on a $J_+ = u + \frac{2c}{\gamma_4 - 1} = \frac{2c_4}{\gamma_4 - 1} = u_3 + \frac{2c_3}{\gamma_4 - 1}$. On en déduit $c_3 = c_4 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} u_3$ et $-c_3 + u_3 = -c_4 + \frac{\gamma_4 + 1}{2} u_3$. L'onde simple est comprise entre les droites $x = c_4 t$ et $x = \left(-c_4 + \frac{\gamma_4 + 1}{2} u_3 \right) t$. Comme $s_3 = s_4$, on a $\frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{c_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$.

- 8) Rassembler les résultats précédents et utiliser la relation de saut $p_2/p_1 = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)$ pour établir la relation suivante et conclure :

$$\frac{p_4}{p_1} = \left[1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}(M_1^2 - 1) \right] \left[1 - \frac{c_1}{c_4} \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1} \right]^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}. \quad (5.6)$$

Comme $p_2 = p_3$, on a

$$\begin{aligned} \frac{p_4}{p_1} &= \frac{p_4}{p_3} \frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{c_4}\right)^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} \left[1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1} (M_1^2 - 1)\right] \\ &= \left[1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1} (M_1^2 - 1)\right] \left[1 - \frac{c_1}{c_4} \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}\right]^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}. \end{aligned}$$

3 Limite des grands écarts de pressions

9) Dans la limite $p_4/p_1 \rightarrow \infty$, montrer que l'on a

$$M_1 - \frac{1}{M_1} = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \left(\frac{\gamma_4 r_4 T_4}{\gamma_1 r_1 T_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Si $\frac{p_4}{p_1} \rightarrow \infty$, alors $1 - \frac{c_1}{c_4} \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1}\right) = 0$, ce qui entraîne $M_1 - \frac{1}{M_1} = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \frac{c_4}{c_1}$. Comme $c_4 = \sqrt{\gamma_4 r_4 T_4}$ et $c_1 = \sqrt{\gamma_1 r_1 T_1}$, on a $M_1 - \frac{1}{M_1} = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \sqrt{\frac{\gamma_4 r_4 T_4}{\gamma_1 r_1 T_1}}$.

10) Montrer que $M_1 = 27.3$ pour le tube à choc mettant en présence de l'hydrogène (masse molaire $\mathcal{M}_4 = 2\text{g}$, $\gamma_4 = 1.4$) et de l'argon (masse molaire $\mathcal{M}_1 = 40\text{g}$, $\gamma_1 = 1.66$) à la même température $T_1 = T_4 = 300\text{ K}$.

En utilisant $r = R/\mathcal{M}$, l'application numérique conduit à

$$M_1 - \frac{1}{M_1} = \frac{2.66}{0.4} \sqrt{\frac{1.4}{1.66} \frac{40}{2}} = 27.31 =: \alpha.$$

On en déduit l'équation du second degré $M_1^2 - \alpha M_1 - 1 = 0$ de discriminant $\Delta = \alpha^2 + 4$ qui conduit aux solutions $M_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} = \alpha \frac{1 + (1 + \frac{4}{\alpha^2})^{\frac{1}{2}}}{2} = 27.33 \sim \alpha$.

11) En rappelant la relation $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma_1 - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma_1 M_1^2 + 1)}{(\gamma_1 + 1)^2 M_1^2}$ montrer que l'application numérique conduit à la très grande valeur $T_2/T_1 = 231.7$.

On calcule $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2 \times 0.66 [(27.33)^2 - 1] [1.66 (27.33)^2 + 1]}{(2.66)^2 (27.33)^2} \sim 232$.

PCM 6

Régime discontinus de la tuyère de Laval

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Régime discontinus de la tuyère de Laval
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc5 (2004)
Mois de création :	mai 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	tuyère de Laval, approximation 1D choc droit, choc oblique

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” applique les relations de saut du choc droit à l’écoulement de la tuyère de Laval dans le cadre de l’approximation quasi-1D. Les relations de saut du choc oblique sont abordées et l’exemple du choc oblique en sortie de tuyère est considéré.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
b_1	Valeur de b en amont du choc
b_2	Valeur de b en aval du choc
$[[b]] = b_2 - b_1$	Saut de b au travers du choc
$c = \sqrt{\gamma r T}$	Vitesse du son d'un gaz parfait (m s^{-1})
C_v	Capacité calorifique à volume constant ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
$C_p = C_v + r$	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
$f(M)$	Fonction de M
$g(M)$	Fonction de M
h	Enthalpie spécifique (J kg^{-1})
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
\mathcal{M}	Masse molaire du gaz (kg)
\dot{m}	Débit massique de la tuyère (kg s^{-1})
m	Débit de masse surfacique à travers le choc ($\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$)
$M(x)$	Nombre de Mach
M_1, M_2	Nombres de Mach dans le repère du choc
\underline{N}	Normale au choc
$p(x)$	Champ de pression (Pa)
p_0	Pressions d'arrêt dans la chambre de combustion (Pa)
p_{02}, p_{01}	Pressions d'arrêt ou génératrices (Pa)
\underline{q}	Vecteur flux
$r = R/\mathcal{M}$	Constante R divisée par la masse molaire ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
$s(x)$	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_{ref}	Entropie de référence ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
$T(x)$	Champ de température ($^\circ\text{K}$)
T_0	Température d'arrêt dans la chambre de combustion. ($^\circ\text{K}$)
T_{02}, T_{01}	Températures d'arrêt ou génératrices. ($^\circ\text{K}$)
t	Temps (s)
\underline{U}	Champ de vitesse (m s^{-1})
$U(x)$	Composante $\underline{U} \cdot \underline{e}_x$ (m s^{-1})
v_1, v_2	Vitesse $v_i = (\underline{U}_i - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ (m s^{-1})
$\underline{W} = W \underline{N}$	Vitesse de la surface de discontinuité (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$\gamma = C_p/C_v$	Notation pour C_p/C_v

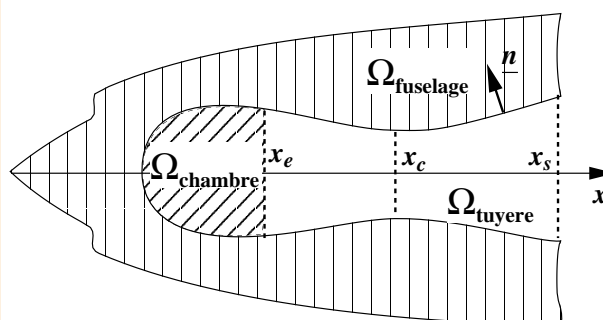
$\pi(M_1^2, \gamma)$	Rapport des pressions d'arrêt p_{02}/p_{01}
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
ρ_0	masse volumique d'arrêt. (kg m^{-3})

ÉLÉMENTS DE COURS

Relations pour les gaz parfaits

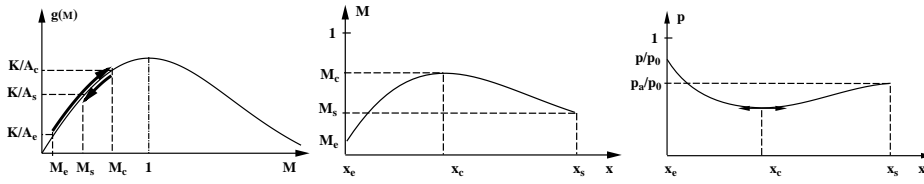
Pour un gaz parfait polytropique, de lois d'état $p = \rho r T$ et $e = C_v T$, la vitesse du son est $c = \sqrt{\gamma r T}$ avec $\gamma = C_p/C_v$ et $C_p = C_v + r$. L'entropie, définie par la relation de Gibbs $de = T ds - p d(1/\rho)$, vérifie la relation $s = s_{ref} + C_v \ln(p \rho^{-\gamma})$. L'enthalpie est $h = e + p/\rho = C_p T = c^2/(\gamma - 1)$ et l'enthalpie totale est $H = h + \frac{1}{2}U^2 = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}U^2$.

Approximation quasi-1D pour une tuyère



Dans le cadre de l'approximation quasi-1D dans une tuyère de section lentement variable $A(x)$, le régime stationnaire de l'écoulement est décrit par les champs de température $T(x)$, de pression $p(x)$, de masse volumique $\rho(x)$ et de vitesse $u(x)$. Le nombre de Mach est alors $M(x) = u(x)/c(x)$ où c est la vitesse du son.

Dans une région où l'écoulement est homoentropique, on note T_0 , p_0 et ρ_0 les température, pression et masse volumique "d'arrêt" mesurés en des points réels ou fictifs (transformation adiabatique) où la vitesse est nulle. Ces valeurs représentent les caractéristiques du gaz dans la chambre de combustion.



Dans la région où l'écoulement est adiabatique, c'est-à-dire en amont d'un éventuel choc, les "lois de Saint-Venant" suivantes sont vérifiées

$$\frac{T}{T_0} = f(M)^{-1}, \quad \frac{p}{p_0} = f(M)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = f(M)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (6.1)$$

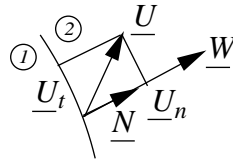
avec $f(M) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$. En exprimant que le débit $\dot{m} = \rho u A$ est constant, le nombre de Mach est solution de l'équation implicite

$$g(M) = \frac{\dot{m}}{\rho_0 c_0} \frac{1}{A} = \frac{\dot{m}}{p_0} \sqrt{\frac{r T_0}{\gamma}} \frac{1}{A} \quad (6.2)$$

avec $g(M) = M f(M)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$. On note $\Gamma(\gamma) = g(1)$.

Relations de saut

On considère une surface de discontinuité dont la normale \underline{N} est orientée de la région 1 vers la région 2. On note $\underline{W} = W \underline{N}$ la vitesse de propagation de cette surface, $(\underline{U}_1, \rho_1, p_1, \dots)$ et $(\underline{U}_2, \rho_2, p_2, \dots)$ les champs situés respectivement dans la région 1 et la région 2. On note $[[b]] = b_2 - b_1$ le saut du champ b à travers la surface de discontinuité.



On note alors $v_1 = (\underline{U}_1 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ et $v_2 = (\underline{U}_2 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$. La relation de saut du bilan de masse s'écrit alors $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. On note m cette valeur commune.

Dans le cas où $m = 0$, la seule relation est l'égalité des pressions $p_1 = p_2$.

Dans le cas où $m \neq 0$, c'est-à-dire lorsque le fluide traverse la surface de discontinuité, on suppose que $m > 0$, quitte à changer l'orientation de \underline{N} si ce n'est pas le cas initialement. Les relations de saut s'écrivent alors

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 =: m > 0$$

$$\begin{aligned}
p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad \text{et} \quad \llbracket \underline{U} - \underline{W} \rrbracket \wedge \underline{N} = \underline{0} \\
e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 &= e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 \\
s_2 &> s_1 .
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Pour un gaz parfait polytropique, les relations de saut entraînent :

$$\begin{aligned}
\frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \\
\frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \\
\frac{T_2}{T_1} &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \\
M_1 &> 1 > M_2 .
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un choc droit stationnaire ($W = 0$) on a $T_{01} = T_{02}$ et $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \pi [M_1^2, \gamma]$ avec

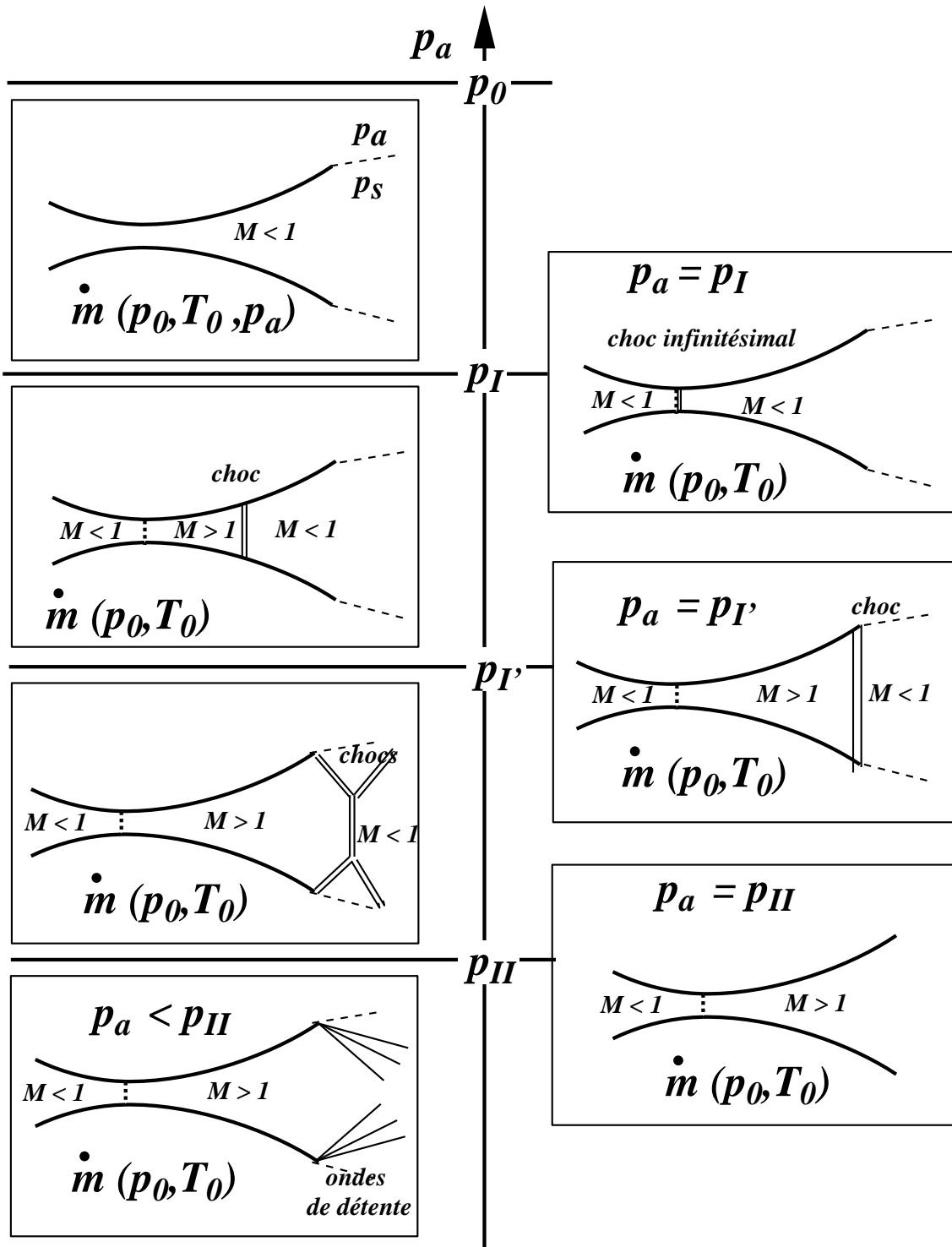
$$\pi(X_1, \gamma) = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(X_1 - 1) \right] \left\{ \frac{[2 + (\gamma - 1)X_1][2\gamma X_1 + 1 - \gamma]}{(\gamma + 1)^2 X_1} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} . \tag{6.4}$$

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Classification des régimes

Dans la chambre de combustion, le fluide est caractérisé par le couple (p_0, T_0) considérés comme grandeurs génératrices. A la sortie de la tuyère, l'atmosphère est caractérisé par le couple (p_a, T_a) . Nous voulons étudier les différents régimes de l'écoulement obtenus en faisant diminuer la pression atmosphérique p_a à partir de la valeur p_0 . On se place dans le cas d'un fluide parfait polytropique.

- 1) Commenter la succession des régimes obtenus en faisant diminuer p_a et représentés sur la figure ??.



- * Pour $p_I < p_a \leq p_0$ l'écoulement est subsonique. Le débit massique \dot{m} est une fonction $\dot{m}(p_0, T_0, p_a)$ de trois variables. Il augmente lorsque p_a diminue.
- * Pour $p_a \leq p_I$ le débit massique $\dot{m}(p_0, T_0) = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_c \Gamma(\gamma)$ reste bloqué sur sa valeur maximale et ne dépend plus que des variables (p_0, T_0) .
- * Pour $p'_I \leq p_a \leq p_I$, un choc droit est présent dans le divergent ($x_c \leq x_d \leq x_s$) de la tuyère (en $x_d \rightarrow x_c$ pour $p_a \rightarrow p_I$ et en $x_c \rightarrow x_s$ pour $p_a \rightarrow p'_I$).
- * Pour $p_a = p'_I$, le choc droit est juste à la sortie de la tuyère.
- * Pour $p_{II} < p_a \leq p'_I$, il n'est plus possible de satisfaire la condition $p_a = p_s$ et l'on a $p_s < p_a$. On observe la formation de chocs obliques accrochés à la sortie de la tuyère. L'écoulement n'est plus quasi-1D dans cette région.
- * Le cas $p_a = p_{II}$ correspond aux "cas exotique" pour lequel il n'y a aucun choc et où $p_s = p_a$.
- * Pour $p_a < p_{II}$, il est de nouveau impossible de satisfaire la condition $p_a = p_s$ et l'on a maintenant $p_s > p_a$. On observe la formation d'ondes de détente obliques accrochées à la sortie de la tuyère. L'écoulement n'est plus quasi-1D dans cette région.

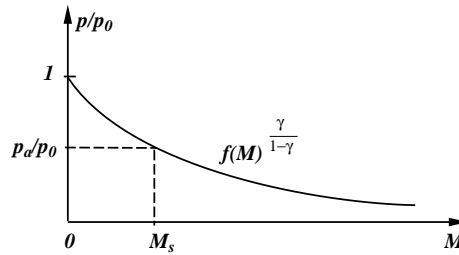
2 Régimes continus

- 2) Cas $p_a = p_0$. Il n'y a pas d'écoulement ($u = 0$). Si $T_a \neq T_0$, il faut supposer l'existence d'une discontinuité thermique quelque part. Généraliser cette conclusion à tous les régimes pour conclure que T_a n'est pas une grandeur pertinente pour la détermination de l'écoulement.

On suppose l'existence d'une surface de discontinuité à l'extérieur de la tuyère sans traversée de matière ($m = 0$). La pression est donc continue. Pour tous les régimes, une telle surface de discontinuité permet de se raccorder à la température T_a .

- 3) Cas $p_I < p_a \leq p_0$. On rappelle que $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A(x) g[M(x)]$ et $p/p_0 = f(M)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$. En imposant la continuité de la pression à la sortie de la tuyère, montrer que \dot{m} dépend de p_0, T_0 et p_a .

Pour le régime $p_a \in [p_I, p_0]$, on peut satisfaire $p_s = p_a$ en x_s . On a donc $\frac{p_a}{p_0} = f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ avec $M_s = M(x_s)$. Comme $f(M)$ est une fonction décroissante, il existe une seule solution $M_s \left(\frac{p_a}{p_0} \right)$. L'écoulement est sonique dans toute la tuyère et $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_s g \left[M_s \left(\frac{p_a}{p_0} \right) \right]$.



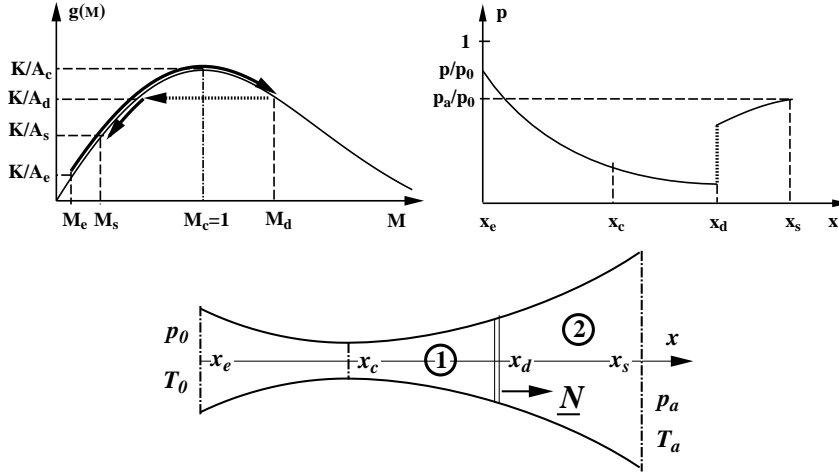
- 4) Cas $p_a = p_I$. En déduire que p_I est déterminé par la résolution du système de deux équations aux deux inconnues (M_s, p_I) :

$$p_I = p_0 f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad \text{et} \quad g(1) = \frac{A_s}{A_c} g(M_s) \quad (6.5)$$

avec $M_s \leq 1$. En déduire que p_I/p_0 ne dépend que du facteur géométrique A_c/A_s .

L'écoulement devient sonique si $M(x_c) = 1$. Au seuil $p_a = p_I$, on a donc $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_c g(1) = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_s g(M_s)$ et $\frac{p_I}{p_0} = \frac{p_a}{p_0} = f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$. La valeur de M_s lorsque p_a tend vers p_I^+ est donc obtenue en résolvant $A_c \Gamma(\gamma) = A_s g(M_s)$ avec $M_s \leq 1$. On en déduit $p_I = p_0 f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$. Donc $\frac{p_I}{p_0}$ est fonction de $\frac{A_c}{A_s}$ uniquement.

3 Régimes discontinus



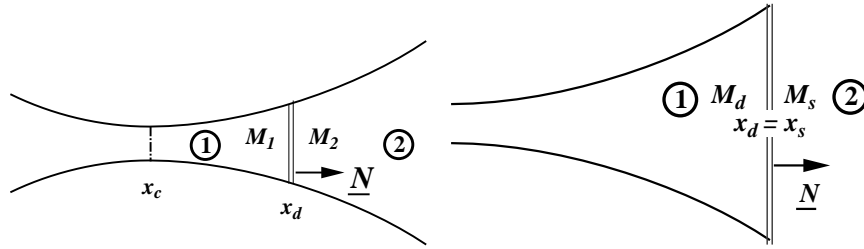
- 5) Cas $p'_I \leq p_a \leq p_I$. On rappelle que \dot{m} dépend de p_0, T_0 uniquement, à travers la relation $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_c \Gamma(\gamma)$. En appelant x_d la position du choc, montrer que les grandeurs génératrices en aval du choc sont $T_{02} = T_0$ et $p_{02} = \pi [M_1^2(x_d), \gamma] p_0$. Montrer que $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A(x) g[M_1(x)]$ pour $x > x_d$. En déduire que la section $A_d = A(x_d)$ est déterminée par la résolution du système de trois équations aux trois inconnues (M_d, M_s, A_d) :

$$\pi (M_d^2, \gamma) f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_a}{p_0}, \quad \pi (M_d^2, \gamma) g(M_s) = \frac{A_c}{A_s} \Gamma(\gamma)$$

$$\text{et} \quad g(M_d)A_d = A_c\Gamma(\gamma) \quad (6.6)$$

et que l'on a alors $M_d = M_1(x_d)$ et $M_s = M(x_s)$. Montrer alors que x_d est une fonction décroissante de p_a qui varie de x_c à x_s lorsque p_a varie de p_I à p'_I .

Comme $T_{01} = T_0$ et $p_{01} = p_0$, on a $T_{02} = T_0$ et $p_{02} = \pi[M_d^2, \gamma] p_0$ avec $M_d = M_1(x_d)$. De plus, $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_d g(M_d) = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_c g(1)$. Pour $x > x_d$, l'écoulement est encore homoentropique (choc droit) mais avec une entropie plus grande qu'en amont du choc. Les relations établies en amont sont encore valides à conditions de remplacer (p_0, T_0) par (p_{02}, T_{02}) dans les expressions. On a donc $\dot{m} = p_{02} \sqrt{\frac{\gamma}{rT_{02}}} A(x) g[M_1(x)]$ et $\frac{p_s}{p_{02}} = f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$. On peut aussi écrire $\dot{m} = p_{02} \sqrt{\frac{\gamma}{rT_{02}}} A_s g(M_s)$. Comme on doit avoir $p_s = p_a$ à la sortie de la tuyère, on obtient finalement le système $\pi(M_d^2, \gamma) f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_a}{p_0}$, $\pi(M_d^2, \gamma) A_s g(M_s) = A_c \Gamma(\gamma)$ et $g(M_d) A_s = A_c g(1)$. Les trois inconnues sont M_d , M_s et A_d . Si x_d croît, alors $A_d = A(x_d)$ croît et $g(M_d) = A_c \Gamma(\gamma) / A_d$ décroît. Comme $g(M)$ est décroissante pour $M > 1$ et que $M_d > 1$, on peut affirmer que M_d croît si x_d croît. Comme $\pi(M_d^2)$ est décroissante, $\pi(M_d^2)$ décroît lorsque x_d croît. Donc $g(M_s) = \frac{1}{\pi(M_d^2)} \frac{A_c}{A_s} \Gamma(\gamma)$ est une fonction croissante de x_d . Comme $g(M)$ est une fonction croissante pour $M < 1$ et que $M_s < 1$, on voit que M_s croît lorsque x_d croît. Comme $f(M)$ est une fonction décroissante et que $\frac{\gamma}{\gamma-1} > 0$, on voit que $f(M_s)$ et donc $f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ décroissent lorsque x_d croît. Comme $f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ et $\pi(M_d^2)$ décroissent lorsque x_d croît, le rapport $\frac{p_a}{p_0} = \pi(M_d^2) f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ décroît. En conclusion, x_d croît si p_a décroît. Pour $p_a = p_I$, on a $x_d = x_c$.



- 6) Cas $p_a = p'_I$. Ce cas correspond à $x_d = x_s$. Montrer que p'_I est déterminé par la résolution du système de trois équations aux trois inconnues (M_d , M_s , p'_I) :

$$\begin{aligned} \pi(M_d^2, \gamma) f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} &= \frac{p'_I}{p_0}, & \pi(M_d^2, \gamma) g(M_s) &= \frac{A_c}{A_s} \Gamma(\gamma) \\ \text{et} \quad g(M_d) A_s &= A_c \Gamma(\gamma). \end{aligned} \quad (6.7)$$

En déduire que p'_I/p_0 ne dépend que du facteur géométrique A_c/A_s .

La valeur $p_a = p'_I$ correspondant à $x_d = x_s$ est donnée par le système $\left| \begin{array}{l} \pi(M_d^2, \gamma) f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p'_I}{p_0}, \pi(M_d^2, \gamma) A_s g(M_s) = A_c \Gamma(\gamma) \text{ et } g(M_d) A_s = A_c g(1). \\ \text{Le rapport } p'_I/p_0 \text{ ne dépend que du facteur géométrique } A_c/A_s. \text{ Notons que,} \\ \text{dans ce cas, } M_s^2 = M_2^2(M_d^2, \gamma). \end{array} \right.$

7) Cas $p_a = p_{II}$. Montrer que p_{II} est déterminé par la résolution du système de deux équations aux deux inconnues (M_s, p_{II}) :

$$f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_{II}}{p_0} \quad \text{et} \quad g(M_s) A_s = A_c \Gamma(\gamma). \quad (6.8)$$

Pour $p_a < p'_I$, la pression de sortie est donnée par $\frac{p_s}{p_0} = f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ avec $\dot{m} = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_c g(1) = p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{rT_0}} A_s g(M_s)$. Le cas "exotique" où $p_s = p_a = p_{II}$ est solution du système $f(M_s)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \frac{p_{II}}{p_0}$ et $g(M_s) A_s = \Gamma(\gamma) A_c$.

4 Choc oblique en sortie de tuyère

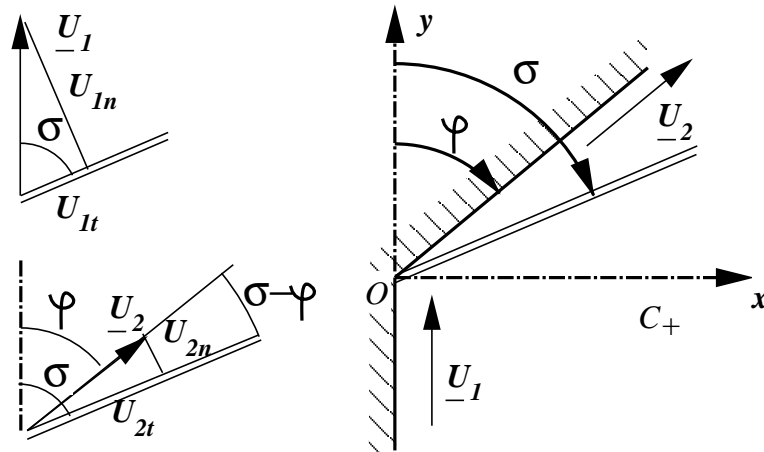
Dans tout ce qui suit, on considère l'écoulement plan permanent d'un gaz parfait polytropique avec des conditions amont homoentropiques (s_0) et homo-énergétiques (H_0).

8) Montrer que les hypothèses entraînent que c est une fonction univaluee du module $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ de la vitesse une fois la valeur de l'enthalpie totale H_0 précisée. Donner l'expression de $c(U)$. En déduire l'expression $M(U)$ du nombre de Mach.

Comme $H_0 = \frac{1}{2}U^2 + \frac{c^2}{\gamma-1}$, on peut écrire $c^2(U) = (\gamma-1)H_0 - \frac{\gamma-1}{2}U^2$. On en déduit $M(U) = U/c(U)$.

On suppose que l'écoulement $(u, v) = (0, v_1)$, avec $v_1 > 0$, est uniforme pour $x \geq 0$ et $y \leq 0$ la frontière $x = 0$ et $y \leq 0$ étant une paroi. On note $U_1 = v_1$ et $M_1 = M(U_1)$.

On suppose que cette paroi est une droite d'équation $y = Y(x) = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)x$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$ avec $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On modélise cette compression par un choc oblique centré. On cherche à déterminer le nombre de Mach M_3 de l'écoulement uniforme de la région 2 ainsi que l'angle σ que fait le choc d'équation $y = \text{tg}(\frac{\pi}{2} - \sigma)x$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$.



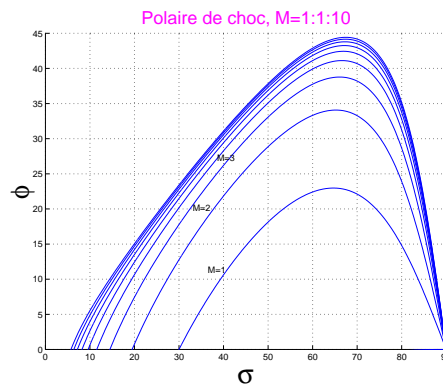
9) En notant $M_1 = U_1/c_1(U_1)$ et $M_2 = U_2/c_2(U_2)$, écrire les relations de saut.

Les relations de saut s'écrivent $m = \rho_1 U_{1n} = \rho_2 U_{2n}$ et $U_{1t} = U_{2t}$, ce qui entraîne $\rho_1 U_1 \sin \sigma = \rho_2 U_2 \sin(\sigma - \varphi)$ et $U_1 \cos \sigma = U_2 \cos(\sigma - \varphi)$. On remarque que les trois relations $\rho_1 U_{1n} = \rho_2 U_{2n}$, $p_1 + \rho_1 U_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 U_{2n}^2$ et $h_1 + \frac{1}{2}U_{1n}^2 = h_2 + \frac{1}{2}U_{2n}^2$ sont les mêmes que pour le choc droit à condition de considérer les nombres de Mach $M_{1n} = \frac{U_{1n}}{c_1}$ $M_{2n} = \frac{U_{2n}}{c_2}$.

10) Dédire de la continuité des vitesses tangentielles $U_{1t} = U_{2t}$ la relation

$$\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \varphi)} = 1 + \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad (6.9)$$

On a $\frac{U_{1n}}{U_{1t}} \frac{U_{2t}}{U_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ce qui entraîne $\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \varphi)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}$. L'ensemble des fonctions qui relient ϕ à σ est appelé "polaire de choc".



- 11) Déterminer l'angle σ dans le cas $\varphi = 20^\circ$ et $M_1 = 5$ à partir du graphe de la polaire de choc.

| Si $\varphi = 20^\circ$ et $M_1 = 5$ alors $\sigma \sim 30^\circ$.

- 12) En déduire le nombre de Mach M_2 .

| Comme $M_{1n} = M_1 \sin \sigma \sim 2.5$, on a $M_{2n}^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_{1n}^2}{2\gamma M_{1n}^2 + 1 - \gamma} \sim 0.25$. D'où $M_{2n} \sim 0.5$. On en déduit $M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\sigma-\varphi)} \sim 2.95 > 1$. L'écoulement est partout supersonique.

On considère le régime $p_{II} \leq p_a \leq p'_I$ de la tuyère de Laval pour lequel on observe la formation d'un choc oblique à la sortie.

- 13) Rappeler comment calculer la pression de sortie p_s et le nombre de Mach de sortie M_s en fonction des grandeurs d'arrêt (p_0, T_0) de la chambre de combustion. Indiquer comment calculer la vitesse U_s du gaz à la sortie.

| Pour $p_a < p'_I < p_I$, l'écoulement est sonique au col et supersonique dans le divergent. On a $H = H_0$ et $s = s_0$ dans toute la tuyère. Le Mach de sortie s'obtient donc en résolvant $\Gamma(\gamma)A_c = g(M_s)A_s$ et la pression de sortie en écrivant $p_s/p_0 = f(M_s)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. La vitesse de sortie U_s s'obtient en résolvant l'équation $M_s = U_s/c(U_s)$ où $c(U) = \sqrt{(\gamma-1)H_0 - \frac{\gamma-1}{2}U^2}$.

- 14) Indiquer pourquoi on est dans le cas $p_s < p_a$ et $M_s > 1$. Calculer l'angle σ que fait le choc oblique avec l'axe de la tuyère en fonction de p_a/p_s . Montrer que c'est un choc faible par un argument de continuité.

| Le régime $p_{II} < p_a \leq p'_I$ est justement défini par $p_s < p_a$. D'autre part, l'écoulement est supersonique et continu (sans choc) dans tout le divergent puisqu'il n'y a plus de choc dans la tuyère dès que $p_a < p'_I$. Les relations de saut pour le choc oblique entraînent $\frac{p_a}{p_s} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_s^2 \sin^2 \sigma - 1)$. On en déduit donc $\sin^2 \sigma = \frac{1}{M_s^2} \left[1 + \left(\frac{p_a}{p_s} - 1 \right) \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right]$. La fonction qui relie σ à p_a est continue. Or $\sigma = \pi/2$ pour $p_a = p'_I$. On est donc en présence d'un choc faible.

PCM 7

Détentes et chocs infinitésimaux

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Détentes et chocs infinitésimaux
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpcb (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	Chocs infinitésimaux, onde de détente fonction de Prandtl-Meyer

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” examine les cas des chocs droit ou oblique infinitésimaux ainsi que le cas de l’onde de détente infinitésimale, pour les écoulements plans permanents. On retrouve l’expression de la fonction de Prandtl-Meyer en considérant une succession d’ondes de détentes infinitésimales.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
c	Vitesse du son (m s^{-1})
C_v	Capacité calorifique à volume constant ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
$C_p = C_v + r$	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y$	Vecteurs de base (m)
$f(M)$	Fonction de Prandtl-Meyer
h	Enthalpie spécifique (J kg^{-1})
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
H_0	Enthalpie constante (J kg^{-1})
\mathcal{M}	Masse molaire du gaz (kg)
M	Nombre de Mach ()
M_1, M_2	Nombres de Mach dans le repère du choc
M_{1n}	Nombre de Mach normal ()
\underline{N}	Normale au choc
p	Champ de pression (Pa)
$r = R/\mathcal{M}$	Constante R divisée par la masse molaire ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_0	Entropie constante ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_{ref}	Entropie de référence ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
T	Température ($^\circ\text{K}$)
u	Composante de \underline{U} selon x (m s^{-1})
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
U_n	Vitesse normale (m s^{-1})
\underline{U}_t	Champ de vitesse tangentiel (m s^{-1})
U	Module du champ de vitesse (m s^{-1})
v_1, v_2	Vitesse $v_i = (\underline{U}_i - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ (m s^{-1})
$\underline{W} = W \underline{N}$	Vitesse de la surface de discontinuité (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y)$	Coordonnées spatiales (m)
$\alpha(M)$	Angle de Mach $\arcsin(1/M)$
β	Notation pour $\sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$
γ	Constante C_p/C_v
θ	Angle de \underline{U} avec \underline{e}_x
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})

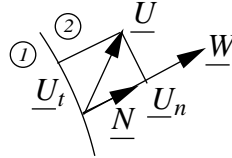
ÉLÉMENTS DE COURS

Relations pour les gaz parfaits

Pour un gaz parfait polytropique, de lois d'état $p = \rho r T$ et $e = C_v T$, la vitesse du son est $c = \sqrt{\gamma r T}$ avec $\gamma = C_p/C_v$ et $C_p = C_v + r$. L'entropie, définie par la relation de Gibbs $de = T ds - p d(1/\rho)$, vérifie la relation $s = s_{ref} + C_v \ln(p \rho^{-\gamma})$. L'enthalpie est $h = e + p/\rho = C_p T = c^2/(\gamma - 1)$ et l'enthalpie totale est $H = h + \frac{1}{2}U^2 = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}U^2$.

Relations de saut et choc

On considère une surface de discontinuité dont la normale \underline{N} est orientée de la région 1 vers la région 2. On note $\underline{W} = W \underline{N}$ la vitesse de propagation de cette surface, $(\underline{U}_1, \rho_1, p_1, \dots)$ et $(\underline{U}_2, \rho_2, p_2, \dots)$ les champs situés respectivement dans la région 1 et la région 2. On note $[[b]] = b_2 - b_1$ le saut du champ b à travers la surface de discontinuité.



On note alors $v_1 = (\underline{U}_1 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$ et $v_2 = (\underline{U}_2 - \underline{W}) \cdot \underline{N}$. La relation de saut du bilan de masse s'écrit alors $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. On note m cette valeur commune. Dans le cas où $m = 0$, la seule relation est l'égalité des pressions $p_1 = p_2$. Dans le cas où $m \neq 0$, c'est-à-dire lorsque le fluide traverse la surface de discontinuité, on suppose que $m > 0$, quitte à changer l'orientation de \underline{N} si ce n'est pas le cas initialement. Les relations de saut s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 =: m > 0 \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad \text{et} \quad [[\underline{U} - \underline{W}]] \wedge \underline{N} = \underline{0} \\ e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 &= e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 \\ s_2 &> s_1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

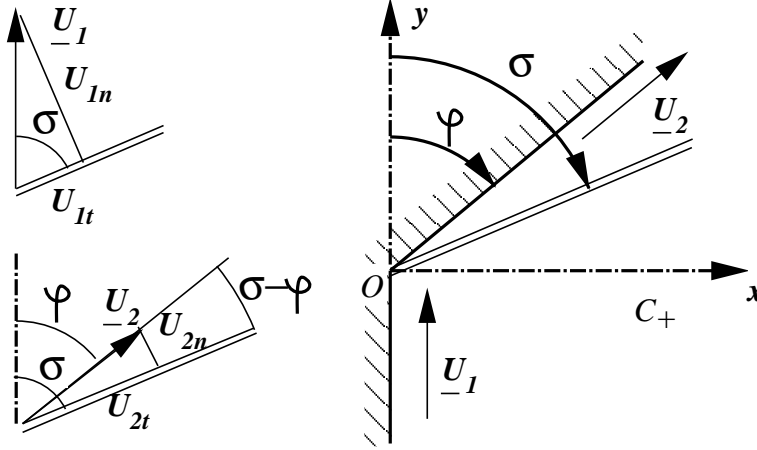
Pour un gaz parfait polytropique, les relations de saut entraînent :

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1) \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= 1 + \frac{2(\gamma - 1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \end{aligned}$$

$$M_1 > 1 > M_2 .$$

Choc oblique stationnaire

On considère un choc oblique stationnaire.



En notant $U_{1n} = \underline{U}_1 \cdot \underline{N} = U_1 \cos \sigma$, $U_{2n} = U_2 \cos(\sigma - \varphi)$, $U_{1t} = U_1 \sin \sigma$ et $U_{2t} = U_2 \sin(\sigma - \varphi)$ les relations de saut s'écrivent $m = \rho_1 U_{1n} = \rho_2 U_{2n}$ et $U_{1t} = U_{2t}$, ce qui entraîne $\rho_1 U_1 \sin \sigma = \rho_2 U_2 \sin(\sigma - \varphi)$ et $U_1 \cos \sigma = U_2 \cos(\sigma - \varphi)$. On remarque que les trois relations $\rho_1 U_{1n} = \rho_2 U_{2n}$, $p_1 + \rho_1 U_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 U_{2n}^2$ et $h_1 + \frac{1}{2} U_{1n}^2 = h_2 + \frac{1}{2} U_{2n}^2$ sont les mêmes que pour le choc droit à condition de considérer les nombres de Mach $M_{1n} = \frac{U_{1n}}{c_1}$ et $M_{2n} = \frac{U_{2n}}{c_2}$.

La relation $U_{1t} = U_{2t}$ entraîne

$$\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg}(\sigma - \varphi)} = 1 + \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} . \quad (7.2)$$

Caractéristiques d'un écoulement plan permanent

On considère un écoulement plan permanent, homoénergétique ($H = H_0$) et homoentropique ($s = s_0$). On note θ l'angle que fait le vecteur vitesse $\underline{U} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$ avec l'axe \underline{e}_x . L'écoulement est alors entièrement décrit par les variables (θ, M) .

Dans le cas d'un écoulement plan permanent supersonique ($M > 1$) les courbes caractéristique C_+ et C_- font respectivement un angle $+\alpha(M)$ et $-\alpha(M)$ avec le vecteur vitesse $\underline{U} = (u, v)$, l'angle de Mach $\alpha(M)$ étant défini

par la relation

$$\alpha(M) = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) .$$

Les caractéristiques sont donc définies par les équations

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_{\pm}} = \operatorname{tg} \{ \theta(x, y) \pm \alpha[M(x, y)] \}$$

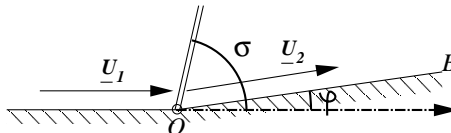
ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

Dans tout ce qui suit, on considère l'écoulement plan permanent d'un gaz parfait polytropique avec des conditions amont homoentropiques (s_0) et homo-énergétiques (H_0).

1 Choc droit infinitésimal

On considère tout d'abord un choc droit ($\varphi = 0$) stationnaire ($W = 0$) dont le nombre de Mach amont est très proche de 1 (choc infinitésimal). On définit alors le petit paramètre $\mu \ll 1$ par la relation $M_1^2 = 1 + \mu$.

$M_1 = 1 + \mu/2$	$M_2 = 1 - \mu/2 + O(\mu^2)$
-------------------	------------------------------



- 1) Montrer que $p_2/p_1 = 1 + 2\frac{\gamma}{\gamma+1}\mu$, $\rho_2/\rho_1 = 1 + 2\frac{1}{\gamma+1}\mu + O(\mu^2)$, $T_2/T_1 = 1 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mu + O(\mu^2)$ et $M_2^2 = 1 - \mu + O(\mu^2)$.

Les relations du choc droit s'écrivent $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M^2 - 1) = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\mu$ pour la pression, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} = 1 + \frac{2}{\gamma+1}\mu + O(\mu^2)$ pour la densité et $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)(M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)}{(\gamma+1)^2 M_1^2} = 1 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mu + O(\mu^2)$ pour la température. L'expression du nombre de Mach dans le milieu 2 est $M_2^2 = 1 - \frac{(\gamma+1)(M_1^2 - 1)}{1 + \gamma(2M_1^2 - 1)} = 1 - \mu + O(\mu^2)$.

2 Choc oblique infinitésimal

On considère maintenant un choc oblique stationnaire tel que le changement abrupt de direction en $O' = O$ est $\varphi \ll 1$. On suppose que $M_1 > 1$ est quelconque, pas forcément proche de 1.

- 2) Montrer que l'angle σ que fait le choc avec la paroi située avant le changement de direction vérifie $\sigma = \alpha(M_1) + O(\varphi)$ avec $\alpha(M_1) = \text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right)$.

Pour le choc oblique la relation entre les angles s'écrit

$$\frac{\text{tg } \sigma}{\text{tg}(\sigma - \varphi)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \sigma} \right)^{-1} = 1 + \frac{2(M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma}$$
. Si $\varphi \ll 1$, on a $\frac{\text{tg}(\sigma - \varphi)}{\text{tg } \sigma} = 1 + O(\varphi)$ et donc $M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = O(\varphi)$. D'où $\sigma = \arcsin \frac{1}{M_1} + O(\varphi) = \alpha(M_1) + O(\varphi)$.

- 3) En déduire que $M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{\gamma + 1}{2} \varphi + O(\varphi^2)$.

On effectue le développement limité $\frac{\text{tg}(\sigma - \varphi)}{\text{tg } \sigma} = \frac{\text{tg } \sigma - (1 + \text{tg}^2 \sigma) \varphi}{\text{tg } \sigma} + O(\varphi^2) = 1 - \frac{1 + \text{tg}^2 \alpha(M_1)}{\text{tg } \alpha(M_1)} \varphi + O(\varphi^2) = 1 - \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi + O(\varphi^2)$. On en déduit $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\text{tg } \sigma}{\text{tg}(\sigma - \varphi)} = 1 + \frac{2}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) + O(\varphi^2)$, ce qui entraîne $\mu = M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \frac{\gamma + 1}{2} \varphi + O(\varphi^2)$.

- 4) En déduire que $p_2/p_1 = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \gamma \varphi + O(\varphi^2)$, $\rho_2/\rho_1 = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi + O(\varphi^2)$, $T_2/T_1 = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} (\gamma - 1) \varphi + O(\varphi^2)$.

On en déduit donc $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \mu = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \gamma \varphi + O(\varphi^2)$ pour la pression, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{2}{\gamma + 1} \mu + O(\mu^2) = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \varphi + O(\varphi^2)$ pour la densité et $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \mu = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} (\gamma - 1) \varphi + O(\varphi^2)$.

Pour calculer le développement limité de $s_2 - s_1$, on choisit de poser $p_2 = p_1(1 + \epsilon)$ avec $\epsilon = O(\varphi)$.

- 5) Montrer que $M_1^2 \sin^2 \sigma = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \epsilon$.

Comme $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \epsilon = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)$, on a $M_1^2 \sin^2 \sigma = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \epsilon$.

- 6) En déduire que $\rho_2/\rho_1 = 1 + \frac{1}{\gamma} \epsilon - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} \epsilon^2 + O(\epsilon^3)$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{On en déduit } \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\epsilon\right)}{\gamma+1+\frac{(\gamma^2-1)}{2\gamma}\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{\gamma} \left(\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\epsilon} \right) = 1 + \frac{\epsilon}{\gamma} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\epsilon \right] + \\ O(\epsilon^3) = 1 + \frac{\epsilon}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3). \end{array} \right.$$

7) En déduire que $s_2 - s_1 = O(\epsilon^3)$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{On en déduit } \frac{s_2 - s_1}{C_v} = \text{Ln} \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma} \right] \\ = \text{Ln} \left\{ (1 + \epsilon) \left[1 - \gamma \left(\frac{\epsilon}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\epsilon^2 \right) + \frac{(-\gamma)(-\gamma-1)}{2} \frac{\epsilon^2}{\gamma^2} + O(\epsilon^3) \right] \right\} \\ = \text{Ln} \left\{ (1 + \epsilon) \left[1 - \epsilon + \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right] \right\} = \text{Ln} [1 + O(\epsilon^3)] = O(\epsilon^3). \end{array} \right.$$

8) Montrer que $T_2/T_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\epsilon + O(\epsilon^2)$ et $\varphi = \frac{\sqrt{M_1^2-1}}{M_1^2} \frac{1}{\gamma}\epsilon + O(\epsilon^2)$.

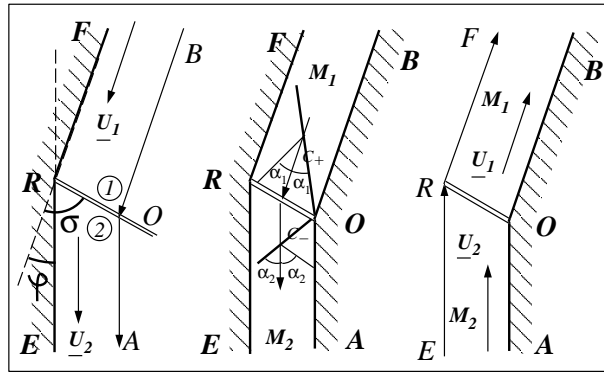
$$\left| \begin{array}{l} \text{Comme } \mu = M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\epsilon, \text{ on a } \frac{T_2}{T_1} = 1 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mu + O(\mu^2) = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\epsilon + \\ O(\epsilon^3). \text{ Comme } \frac{p_2}{p_1} = 1 + \epsilon = 1 + \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\varphi, \text{ on a } \varphi = \frac{\sqrt{M_1^2-1}}{M_1^2}\epsilon + O(\epsilon^2). \end{array} \right.$$

9) Montrer que $U_2/U_1 = 1 - \frac{1}{\gamma M_1^2}\epsilon + O(\epsilon^2) = 1 - \varphi \text{tg} [\alpha(M_1)] + O(\epsilon^2)$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Comme } U_1 \cos \sigma = U_2 \cos(\sigma - \varphi), \text{ on a } \frac{U_2}{U_1} = \frac{\cos \sigma}{\cos(\sigma - \varphi)}. \text{ On peut effectuer le} \\ \text{développement limité } \frac{\cos(\sigma - \varphi)}{\cos \sigma} = \frac{\cos \sigma + \varphi \sin \sigma + O(\varphi^2)}{\cos \sigma} = 1 + \varphi \text{tg} [\alpha(M_1)] + O(\varphi^2). \\ \text{On en déduit } \frac{U_2}{U_1} = 1 - \varphi \text{tg} [\alpha(M_1)] + O(\varphi^2) = 1 - \frac{\sqrt{M_1^2-1}}{M_1^2} \frac{1}{\gamma} \epsilon \frac{1}{\sqrt{M_1^2-1}} + O(\epsilon^2) = \\ 1 - \frac{1}{\gamma M_1^2} \epsilon + O(\epsilon^2). \end{array} \right.$$

3 Onde de détente infinitésimale

On considère une paroi formée de la demi-droite ER parallèle à l'axe Oy et de la demi-droite RF formant un angle $-\varphi$, avec $\varphi > 0$ avec l'axe Oy . On considère un fluide dans la région des $x > 0$ animée d'une vitesse U_1 orientée de F vers R et définissant un nombre de Mach amont $M_1 > 1$. On suppose qu'il se forme un choc oblique d'angle $\sigma(M_1, \varphi)$ par rapport à la paroi FR . On considère une trajectoire de cet écoulement constituée de la demi-droite OB parallèle à RF et OA parallèle à RE . On suppose que O est situé sur le choc oblique stationnaire.



- 10) Montrer que par O passe un C_+ contenue dans la région 1 et une C_- contenue dans la région 2.

Comme $M_1 \sin \sigma > 1$, on a $\sigma > \arcsin \frac{1}{M_1} = \alpha(M_1)$ et donc $0 < \alpha(M_1) < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$. L'inégalité $\alpha(M_1) < \sigma$ entraîne donc que la C_+ issue de O est dans la région 1 (donc avant l'onde de détente). D'autre part, $\alpha(M_2) < \frac{\pi}{2}$, ce qui entraîne que la C_- issue de O est dans la région 2 (onde de détente).

- 11) On remplace AOB par une paroi. Remarquer que l'écoulement est toujours solution. On remplace ensuite la paroi ERF par un milieu infini. Montrer que l'écoulement "choc oblique" offre une solution mathématique au problème. Que dire de sa pertinence physique ? Dessiner la détente de Prandtl-Meyer qui constitue la solution physique de ce nouveau problème.

En l'absence de la paroi ERF , la solution mathématique ainsi construite n'est pas physique. En effet, la solution physique est une détente de Prandtl-Meyer.

En considérant toujours AOB , on considère que ERF est maintenant une trajectoire dans un milieu semi-infini pour l'écoulement obtenu en inversant le sens de l'écoulement précédent, les nombres de Mach M_1 et M_2 étant les mêmes.

- 12) L'écoulement ainsi construit constitue-t-il une solution du problème ?

L'écoulement ainsi construit n'est pas une solution du problème car l'inégalité $s_2 > s_1$ (où la région 2 est maintenant en amont du choc) viole le second principe de la thermodynamique.

- 13) Montrer si $\varphi \ll 1$, le principe de réversibilité n'est violé qu'à l'ordre 3 en φ pour cet écoulement.

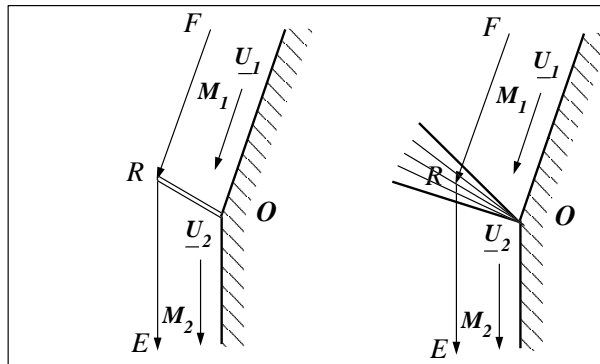
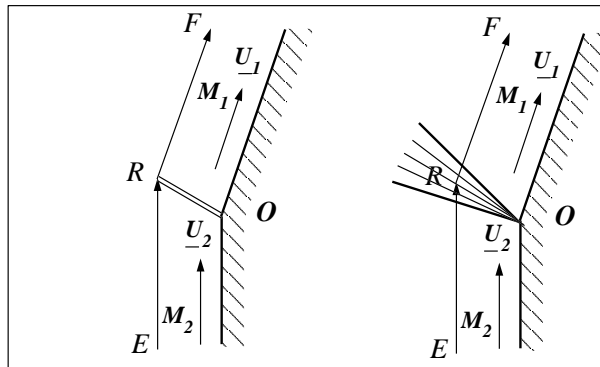
Lorsque $\varphi \ll 1$, on a $s_2 - s_1 = O(\varphi^3) > 0$.

14) Montrer que si $M_1 - 1 = O(1)$ à l'ordre dominant en φ alors $M_2 > 1$.

| Comme $M_{2n}^2 = M_2^2 \sin^2(\sigma - \varphi) = 1 - O(\varphi)$, on $M_2^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha(M_1)} + O(\varphi)$, d'où $M_2^2 = M_1^2 + O(\varphi)$. Si $\varphi \ll 1$, on a donc $M_2 > 1$ à l'ordre dominant.

15) Dans le cas $\varphi \ll 1$, comparer l'écoulement ainsi obtenu à la détente de Prandtl-Meyer qui constitue la vraie solution du problème. On pourra échanger M_1 et M_2 dans les notations pour retrouver les conventions du cours.

| L'écoulement construit en violant le second principe constitue une approximation de la détente de Prandtl-Meyer dans le cas où φ est très petit.



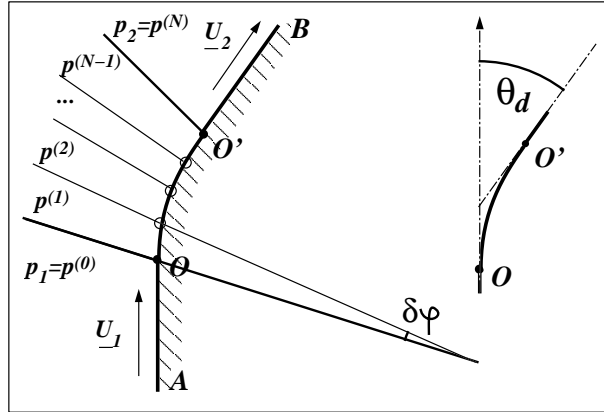
16) Justifier alors le terme “d’onde de détente infinitésimale discontinue”.

| On parle donc d’onde de détente infinitésimale discontinue.

4 Détente le long d'une paroi convexe

On considère l'écoulement le long de la paroi $AOO'B$ (voir figure). On note θ_d la déviation algébrique (ici $\theta_d < 0$) entre les droites AO et $O'B$. On suppose que les écoulements amont (région 1, $M_1 > 1$) et aval (région 2, $M_2 > 1$) sont supersoniques.

On modélise la paroi OO' par une succession de $N - 1$ segments déviés les uns par rapport aux autres d'un angle $\delta\varphi < 0$.



- 17) Représenter schématiquement cette modélisation en notant $p^{(i)}$, $i = 0, N$ la suite des valeurs de pression et les autres grandeurs de manière similaire. Remarquer que $p_1 = p^{(0)}$ et $p_2 = p^{(N)}$.

La détente de Prandtl-Meyer est donc modélisée par une suite de détentes infinitésimales discontinues.

- 18) Montrer que $\delta\varphi = \theta_d/N$.

Dans cette modélisation, les détentes infinitésimales sont caractérisées par un angle commun égal à $\delta\varphi = \theta_d/N$.

- 19) Montrer qu'à l'ordre dominant on a $\frac{p^{(i+1)}}{p^{(i)}} = 1 + \lambda_i \delta\varphi + O[(\delta\varphi)^2]$ et que $s^{(i+1)} - s^{(i)} = \mu_i (\delta\varphi)^3 + O[(\delta\varphi)^4]$ où les λ_i sont les constantes $\lambda_i = \frac{M^{(i)2}}{\sqrt{M^{(i)2}-1}} \gamma$ et les μ_i sont des constantes que l'on ne cherchera pas à calculer.

Les relations de saut des détentes infinitésimales entraînent $\frac{p^{(i+1)}}{p^{(i)}} = 1 + \frac{M^{(i)2}}{\sqrt{M^{(i)2}-1}} \gamma \delta\varphi$ et $s^{(i+1)} - s^{(i)} = O[\delta\varphi^3] < 0$.

- 20) En déduire que $p_2/p_1 = 1 + \delta\varphi \sum_N \lambda_i + O[(\delta\varphi)^2]$ et $(s_2 - s_1)/C_v =$

$$(\delta\varphi)^3 \sum_N \mu_i + O[(\delta\varphi)^4].$$

On en déduit $\frac{p_2}{p_1} = \prod_{i=0}^N \frac{p^{(i+1)}}{p^{(i)}} = 1 + \delta\varphi \sum_{i=0}^N \lambda_i + O(\delta\varphi^2)$ avec $\lambda_i = \frac{M_i^2 \gamma}{\sqrt{M_i^2 - 1}}$. En notant $s^{(i+1)} - s^{(i)} = \mu_i \delta\varphi^3 + O[\delta\varphi^4]$, on obtient $s_2 - s_1 = \sum_{i=0}^N \mu_i + O[\delta\varphi^4]$.

21) Que se passe-t-il lorsque N tend vers l'infini ?

Lorsque N tend vers l'infini, le rapport $\frac{p_2}{p_1}$ tend vers une limite finie et la différence $s_2 - s_1$ tend vers zéro.

22) Montrer qu'à l'ordre dominant on a

$$\frac{u^{(i+1)} - u^{(i)}}{u^{(i)}} = -\frac{\delta\varphi}{\sqrt{M^{(i)2} - 1}}. \quad (7.3)$$

On a $\frac{u^{(i+1)}}{u^{(i)}} = 1 - \delta\varphi \operatorname{tg} \alpha [M^{(i)}] + O(\delta\varphi) = 1 - \frac{1}{\sqrt{M^{(i)2} - 1}} \delta\varphi + O(\delta\varphi)$.

23) Dans la limite où N tend vers l'infini, montrer que cette expression entraîne que

$$\sqrt{M^2(u) - 1} \frac{du}{u} = -d\varphi \quad (7.4)$$

en justifiant la dépendance $M(u)$.

Quand $N \rightarrow \infty$, l'expression précédente devient $\sqrt{M^2(u) - 1} \frac{du}{u} = -d\varphi$ avec $M(u) = \frac{u}{c(u)}$ et $c(u)$ donné par la relation $H_0 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{c^2}{\gamma-1}$.

24) Montrer que $\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{dc}{c}$ et $u du + \frac{2}{\gamma-1} c dc = 0$.

En différenciant les deux égalités précédentes, on obtient $\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{dc}{c}$ et $u du + \frac{2c}{\gamma-1} dc = 0$.

25) En déduire que $\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)$ puis $\frac{\sqrt{M^2-1}}{(1+\frac{\gamma-1}{2} M^2)M} dM = -d\varphi$.

En divisant par c^2 cette dernière relation et en utilisant $M = \frac{u}{c}$ on obtient $\frac{dc}{c} = -\frac{\gamma-1}{2} M^2 \frac{du}{u}$. En éliminant $\frac{dc}{c}$, on obtient $\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} (1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)$. En éliminant $\frac{du}{u}$ on obtient finalement $\frac{\sqrt{M^2-1}}{(1+\frac{\gamma-1}{2} M^2)M} dM = -d\varphi$.

26) En déduire que $\theta_d = f(M_1) - f(M_2)$ où $f(M)$ est la fonction de Prandtl-Meyer définie par

$$f(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (M^2 - 1) \right] - \operatorname{arctg} \left[\sqrt{M^2 - 1} \right]. \quad (7.5)$$

En intégrant cette équation différentielle on obtient

$$[\varphi]_1^2 = \theta_d = - \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}m^2\right) m} dm = f(M_1) - f(M_2).$$

PCM 8

Détente de Prandtl-Meyer et coudes supersoniques

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Détente de Prandtl-Meyer et coudes supersoniques
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc6 (2004)
Mois de création :	mai 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	Détente de Prandtl-Meyer, caractéristiques écoulement plan permanent

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” étudie la détente de Prandtl-Meyer d’un écoulement plan permanent homoénergétique et homoentropique en faisant le parallèle avec l’onde de détente centrée du cas 1D homoentropique. D’autres ondes de détente sont étudiées dans le cadre de l’optimisation de forme de coudes supersoniques.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
$c(U)$	Vitesse du son (m s^{-1})
C_v	Capacité calorifique à volume constant ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
$C_p = C_v + r$	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y$	Vecteurs de base (m)
$f(M)$	Fonction de Prandtl-Meyer
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
H_0	Enthalpie constante (J kg^{-1})
\mathcal{M}	Masse molaire du gaz (kg)
$M(U)$	Nombres de Mach ()
$p(U)$	Champ de pression (Pa)
$r = R/\mathcal{M}$	Constante R divisée par la masse molaire ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R_\pm	Invariants de Riemann $\pm\theta - f(M)$ ()
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_0	Entropie constante ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_{ref}	Entropie de référence ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
$T(U)$	Température ($^\circ\text{K}$)
u	Composante de \underline{U} selon x (m s^{-1})
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
U	Module du champ de vitesse (m s^{-1})
$\overline{U}(x, t)$	Moyenne de U (m s^{-1})
v	Composante de \underline{U} selon y (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y)$	Coordonnées spatiales (m)
$\alpha(M)$	Angle de Mach $\arcsin(1/M)$
β	Notation pour $\sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$
γ	Constante C_p/C_v
θ	Angle de \underline{U} avec \underline{e}_x
$\rho(U)$	Masse volumique (kg m^{-3})

ÉLÉMENTS DE COURS

Relations pour un gaz parfait

Pour un écoulement de gaz parfait polytropique de lois d'état $p = \rho r T$ et $e = C_v T$, on peut écrire :

$$H = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U^2 \quad \text{et} \quad s = s_{\text{ref}} + C_v \text{Ln} \left(p^{1-\gamma} T^\gamma \right)$$

où H est l'enthalpie totale, $c = \sqrt{\gamma r T}$ est la vitesse du son, $\gamma = C_p/C_v$ la constante du gaz parfait polytropique avec $C_p = C_v + r$, $r = R/M$ le rapport entre la constante des gaz parfaits et la masse volumique du gaz, $\underline{U} = \sqrt{u^2 + v^2}$ le module de la vitesse, s l'entropie, s_{ref} un entropie de référence, p la pression et T la température.

Caractéristiques d'un écoulement plan permanent

Lorsque l'écoulement est homoénergétique ($H = H_0$) et homoentropique ($s = s_0$), une seule variable est nécessaire pour décrire l'état thermodynamique du gaz. En choisissant U comme étant cette variable, on peut alors exprimer tous les autres champs en fonction du module de la vitesse : $c(U)$, $M(U) = U/c(U)$, $T(U)$, $\rho(U)$, ...

On note alors θ l'angle que fait le vecteur vitesse $\underline{U} = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$ avec l'axe \underline{e}_x . L'écoulement est alors entièrement décrit par les variables (θ, M) . En effet, la donnée du nombre de Mach M permet de remonter au module de la vitesse U et la direction du vecteur vitesse est donnée par l'angle θ .

Dans le cas d'un écoulement plan permanent supersonique ($M > 1$) les courbes caractéristique C_+ et C_- font respectivement un angle $+\alpha(M)$ et $-\alpha(M)$ avec le vecteur vitesse $\underline{U} = (u, v)$, l'angle de Mach $\alpha(M)$ étant défini par la relation

$$\alpha(M) = \arcsin \left(\frac{1}{M} \right) = \text{arctg} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) .$$

Les caractéristiques sont donc définies par les équations

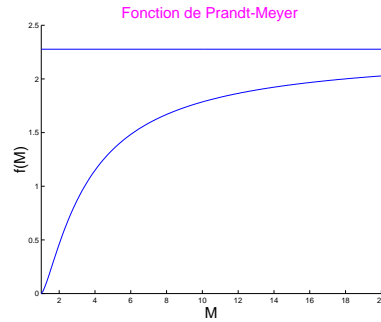
$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_\pm} = \text{tg} \{ \theta(x, y) \pm \alpha[M(x, y)] \}$$

Le long de ces caractéristiques C_+ et C_- , les invariants de Riemann sont respectivement les quantités $R_+(\theta, M)$ et $R_-(\theta, M)$ qui s'écrivent

$$R_+(\theta, M) = \theta - f(M) \quad \text{et} \quad R_-(\theta, M) = -\theta - f(M)$$

où $f(M)$ est la fonction de Prandtl-Meyer qui définie par

$$f(M) = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\beta \sqrt{M^2 - 1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \quad \text{avec } \beta = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$



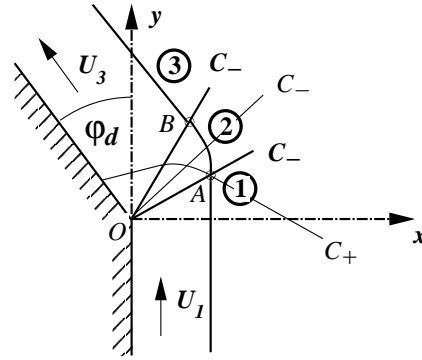
ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Détente de Prandtl-Meyer

On considère un écoulement 2D stationnaire homoénergétique et homoen-tropique en supposant un comportement de fluide parfait polytropique. La valeur de l'enthalpie totale H_0 intervient par l'intermédiaire de la fonction $c(U)$ et donc de $M(U) = U/c(U)$.

On suppose que l'écoulement $(u, v) = (0, v_1)$, avec $v_1 > 0$, est uniforme pour $x \geq 0$ et $y \leq 0$ la frontière $x = 0$ et $y \leq 0$ étant une paroi. On note $U_1 = v_1$ et $M_1 = M(U_1)$.

On suppose que cette paroi est une droite d'équation $y = Y(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_d \right) x$ pour $x \leq 0$ et $y \geq 0$ avec $\varphi_d \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On modélise cette détente de Prandtl-Meyer par une onde simple centrée. On cherche à déterminer le nombre de Mach M_3 de l'écoulement uniforme de la région 3, après le passage par la région 2 correspondant à l'onde simple. La région 1 correspond à l'écoulement uniforme en amont.



- 1) Montrer que l'onde simple est comprise entre les deux droites caractéristiques C_- d'équations

$$y = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right) \right] x = \sqrt{M_1^2 - 1} x \quad (8.1)$$

$$\text{et } y = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi_d - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M_3^2 - 1}} \right) \right] x. \quad (8.2)$$

La région 2 est une onde simple car elle est adjacente à la région 1 où l'écoulement est uniforme. On en déduit donc que la frontière entre ces deux régions est une caractéristique. Comme on a supposé l'écoulement uniforme pour $y \rightarrow -\infty$, cette caractéristique est une C_- . Le long des C_- de la région 2, φ et M sont constants (raisonnement avec les invariants R_{\pm}). L'angle $\varphi - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)$ est donc constant sur une C_- qui est donc une droite. La frontière entre les régions 2 et 3 est donc une droite. La région 2 est donc comprise entre la droite OA d'équation $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right] = \sqrt{M_1^2 - 1}$ et la droite OB d'équation $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi_d - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{M_3^2 - 1}} \right]$.

- 2) Montrer que $f(M_3) = f(M_1) + \varphi_d$.

En considérant une C_+ connectant les régions 1 et 3, on peut écrire $R_+(u, v) = \theta - f(M) = \frac{\pi}{2} - f(M_1) = \frac{\pi}{2} + \varphi_d - f(M_3)$. D'où $f(M_3) = f(M_1) + \varphi_d$.

- 3) Que se passe-t-il si $f(M_1) + \varphi_d > \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)$?

Si $f(M_1) + \varphi_d > f_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right)$, il se forme une poche de vide entre la paroi réelle et une paroi fictive d'angle $\tilde{\varphi}_d$ telle que $f(M_1) + \tilde{\varphi}_d = f_{\max}$.

- 4) Montrer que pour tout point (x, y) de l'onde simple, on a

$$M(x, y) =: M(y/x) = \left\{ 1 + \frac{1}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \left[\beta f(M_1) + \beta \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.3)$$

$$\text{et } \theta(x, y) = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + \arcsin \left[\frac{1}{M(y/x)} \right] \quad (8.4)$$

où l'on a mis en évidence la dépendance $M(x, y) = M(y/x)$.

On considère un point (x, y) sur la C_- d'équation $\text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \theta(x, y) - \arcsin \frac{1}{M(x, y)}$. En considérant la C_+ qui passe par ce point et le connecte à la région 1, on peut écrire $R(u, v) = \theta(x, y) - f[M(x, y)] = \frac{\pi}{2} - f(M_1)$. En éliminant θ entre les deux dernières égalités, on obtient $f[M(x, y)] - \arcsin \frac{1}{M(x, y)} = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} + f(M_1)$. Comme $f(M) = \alpha(M) - \pi/2 + \frac{1}{\beta} \text{arctg} (\beta\sqrt{M^2 - 1})$, cette équation devient $\frac{1}{\beta} \text{arctg} (\beta\sqrt{M^2 - 1}) - \frac{\pi}{2} = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{\pi}{2} + f(M_1)$, ce qui entraîne $\beta\sqrt{M^2 - 1} = \text{tg} \{ \beta [\text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - f(M_1)] \}$. On en déduit $M(x, y) = M(y/x) = \left\{ 1 + \frac{1}{\beta^2} \text{tg}^2 [\beta f(M_1) + \beta \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)] \right\}^{\frac{1}{2}}$. La fonction $\theta(x, y)$, qui a été éliminée plus haut, dépend donc de cette fonction $M(x, y)$ par la relation $\theta(x, y) = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) + \arcsin \left[\frac{1}{M(y/x)} \right]$.

- 5) En déduire que l'équation des lignes de courants dans l'onde simple est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{M^2(y/x)-1}}}{1 - \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{M^2(y/x)-1}}} \quad (8.5)$$

Les trajectoires sont décrites par les courbes $y(x)$ solutions de l'équation $\frac{dy}{dx} = \text{tg} [\theta(x, y)] = \frac{\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}}{1 - \frac{y}{x} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}}$ car $\text{tg}(u+v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \text{tg } v}$.

- 6) En effectuant le changement de variable $\zeta(x) = y(x)/x$, montrer que se l'on se ramène à l'équation à variables séparées

$$\frac{\sqrt{M^2(\zeta) - 1} - \zeta}{1 + \zeta^2} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{x} \quad (8.6)$$

En posant $\zeta(x) = y(x)/x$, on obtient $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x} \left(\frac{dy}{dx} - \zeta \right)$. D'où $x \frac{d\zeta}{dx} = \frac{dy}{dx} - \zeta = \frac{\zeta + \frac{1}{\sqrt{M^2(\zeta)-1}}}{1 - \zeta \frac{1}{\sqrt{M^2(\zeta)-1}}} - \zeta = \frac{1 + \zeta^2}{\sqrt{M^2(\zeta)-1} - \zeta} =: G(\zeta)$ et donc $\frac{1}{G(\zeta)} \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{x}$. Pour déterminer la fonction $\zeta(x)$, et donc $y(x) = x\zeta(x)$, il "suffit" de calculer l'intégrale de $1/G$ dans l'équation $\int_{\zeta_{\text{ref}}}^{\zeta(x)} \frac{1}{G(z)} dz = \text{Ln} \frac{x}{x_{\text{ref}}}$.

- 7) On veut maintenant construire un conduit 2D constitué de la paroi ci-dessus et d'une paroi parallèle en amont et en aval de l'écoulement. Quelle

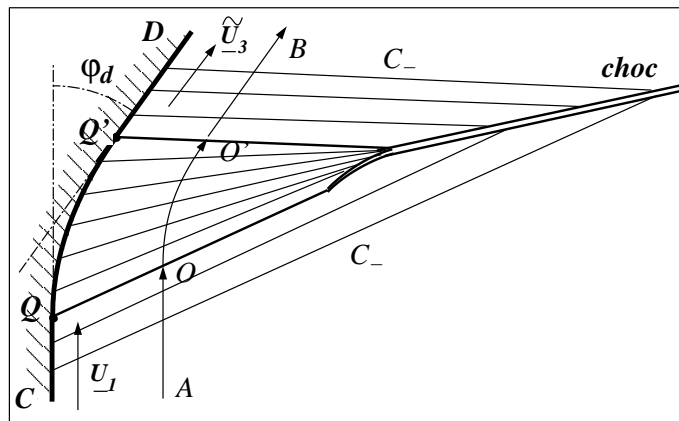
forme doit avoir cette paroi pour garantir que l'écoulement restera uniforme en aval ? Montrer que cette forme dépend du nombre de Mach M_1 .

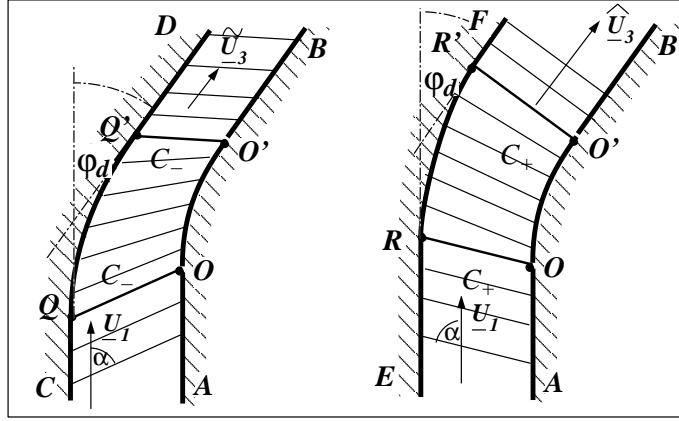
Il suffit de donner à la paroi située à droite la forme d'une trajectoire. On note que cette forme dépend du nombre de Mach M_1 .

2 Coudes supersoniques

On considère l'écoulement plan permanent d'un gaz parfait polytropique avec des conditions amont homoentropiques (s_0) et homoénergétiques (H_0).

On considère une paroi $CQQ'D$ constituée d'une demi-droite QC parallèle à Oy , d'une partie concave d'équation $y = Y(x)$ et d'une demi-droite $Q'D$ faisant un angle $-\varphi_d$ avec l'axe Oy . On suppose que la paroi ne comporte pas de changement brutal de direction. On impose un écoulement amont dans la direction CQ et caractérisé par le nombre de Mach $M_1 > 1$ tel que $f(M_1) > \varphi_d$.





- 8) Décrire sommairement l'écoulement obtenu en milieu semi-infini. Remarquer en particulier que le choc courbe stationnaire est situé à une distance finie de la paroi.

On observe un choc courbe. L'écoulement n'est plus homoentropique ni même potentiel dans la région constituée des trajectoires qui passent par le choc courbe. L'origine de ce choc est situé à une distance finie de la paroi $CQQ'D$.

- 9) On considère une trajectoire qui passe entre la paroi et le choc. Montrer que cette trajectoire est formée d'une demi-droite AO parallèle à Oy , d'une partie concave OO' d'équation $y = \tilde{Y}(x)$ et d'une demi-droite $O'B$ faisant un angle $-\varphi_d$ avec l'axe Oy .

Le long des C_- issues de la portion de paroi $CQQ'D$ et situées à gauche de la trajectoire $AOO'B$, les quantités θ et M sont constantes. Ces C_- sont donc des droites (écoulement uniforme ou ondes simples). Les points O et O' sont donc sur les C_- issues de Q et Q' respectivement.

- 10) Montrer que l'équation de cette ligne de courant est donnée par l'équation

$$\tilde{Y}'(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - f(M_1) + f \left\{ M \left[x, \tilde{Y}(x) \right] \right\} \right) \quad (8.7)$$

où $M(x, y)$ est donnée par la résolution du système en (M, ξ) suivant :

$$f(M) = f(M_1) + \operatorname{arctg} [Y'(\xi)] - \frac{\pi}{2} \quad (8.8)$$

$$\text{et} \quad y - Y(\xi) = \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{arctg} [Y'(\xi)] - \alpha(M) \right\} (x - \xi) \quad (8.9)$$

où $f(M)$ est la fonction de Prandtl-Meyer et $\alpha(M) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)$ est l'angle de Mach.

On considère une C_+ connectant la région d'écoulement uniforme 1 à un point de la paroi QQ' . L'existence de l'invariant de Riemann $R_+(\theta, M) = \theta - f(M)$ permet d'écrire $\arctg [Y'(\xi)] - f\{M[x, Y(x)]\} = \frac{\pi}{2} - f(M_1)$ en considérant un point de la paroi QQ' et un point de la région uniforme 1. L'équation d'une C_- passant par un point $[\xi, Y(\xi)]$ de la paroi QQ' s'écrit $y - \tilde{Y}(\xi) = \text{tg} [\arctg Y'(\xi) - \alpha \{M[\xi, Y(\xi)]\}] (x - \xi)$. La trajectoire $\tilde{Y}(x)$ est donc définie en associant à une abscisse x l'abscisse ξ de l'intersection avec QQ' de la C_- qui passe par $[x, \tilde{Y}(x)]$. Comme θ est invariant le long de cette C_- , on a $\tilde{Y}'(x) = Y'(\xi) = \text{tg} [\frac{\pi}{2} + f(M) - f(M_1)]$ où $M = M[x, \tilde{Y}(x)] = M[\xi, Y(\xi)]$.

On remplace maintenant la trajectoire $AOO'B$ par une paroi.

- 11) Montrer que l'on obtient ainsi un conduit qui transforme un écoulement uniforme supersonique en un écoulement uniforme décéléré et dévié d'un angle φ_d . On note \tilde{M}_3 le nombre de Mach de l'écoulement uniforme à la sortie du coude.

Comme $\varphi_d = f(M_1) - f(\tilde{M}_3)$ et que $f(M)$ est une fonction croissante de M , l'écoulement est décéléré à la sortie du coude.

On suppose que l'on remplace ensuite la paroi $CQQ'D$ par un milieu semi-infini.

- 12) Montrer que l'on peut prolonger la solution précédente sur tout le domaine. Que dire de la pertinence de cette solution ?

Pour construire ce nouvel écoulement dans le milieu semi-infini on prolonge les C_- par des demi-droites et l'on utilise les invariants de Riemann pour propager les informations de l'écoulement à tout le domaine. Cette solution est peu plausible dans la mesure où l'écoulement n'est pas uniforme pour $y \rightarrow -\infty$. C'est néanmoins une solution physiquement acceptable.

- 13) Montrer que la solution la plus plausible du nouveau problème est une onde de détente. On note \tilde{M}_3 le nombre de Mach en aval. Montrer qu'une trajectoire quelconque $ERR'F$ est formée d'une demi-droite ER parallèle à Oy , d'une partie concave d'équation $y = \hat{Y}(x)$ et d'une demi-droite $R'F$ faisant un angle $-\varphi_d$ avec l'axe Oy .

La solution la plus plausible est une détente de Prandtl-Meyer avec $\varphi_d = f(\tilde{M}_3) - f(M_1)$. L'écoulement est ici accéléré.

- 14) Montrer que l'équation de cette trajectoire est donnée par l'équation

$$\hat{Y}'(x) = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} + f(M_1) - f \left\{ M \left[x, \hat{Y}(x) \right] \right\} \right) \quad (8.10)$$

où $M(x, y)$ est donnée par la résolution du système en (M, ξ) suivant :

$$f(M) = f(M_1) - \arctg \left[\tilde{Y}'(\xi) \right] + \frac{\pi}{2} \quad (8.11)$$

$$\text{et } y - \tilde{Y}(\xi) = \text{tg} \left\{ \text{arctg} \left[\tilde{Y}'(\xi) \right] + \alpha(M) \right\} (x - \xi) \quad (8.12)$$

où $f(M)$ est la fonction de Prandtl-Meyer et $\alpha = \text{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right)$ est l'angle de Mach.

Le long des C_+ , les grandeurs θ et M sont conservées. Ces caractéristiques sont des droites. Le long d'une C_- , l'existence de l'invariant de Riemann $R_- = -\theta - f(M)$ permet d'écrire $-\text{arctg } Y'(\xi) - f\{M[\xi, Y(\xi)]\} = -\frac{\pi}{2} - f(M_1)$. L'équation d'une caractéristique C_+ s'écrit

$$y - \tilde{Y}(\xi) = \text{tg} \left[\text{arctg } \tilde{Y}'(\xi) + \alpha \{M[\xi, Y(\xi)]\} \right] (x - \xi) . \quad (8.13)$$

L'équation d'une trajectoire $y = \hat{Y}(x)$ s'obtient en associant à une abscisse x l'abscisse ξ de l'intersection entre la paroi OO' et la C_+ qui passe par $[x, \hat{Y}(x)]$. L'angle θ étant invariant le long d'une C_+ , on a $\hat{Y}'(x) = \tilde{Y}'(\xi) = \text{tg} \left[\frac{\pi}{2} + f(M_1) - f(M) \right]$ avec $M = M[\xi, \tilde{Y}(\xi)] = M[x, \hat{Y}(x)]$.

On remplace maintenant la trajectoire $ERR'F$ par une paroi.

- 15) Montrer que l'on obtient un conduit qui transforme un écoulement uniforme supersonique en un écoulement uniforme accéléré de nombre de Mach \widehat{M}_3 et dévié d'un angle φ_d .

| On a déjà montré que $\widehat{M}_3 > M_1$.

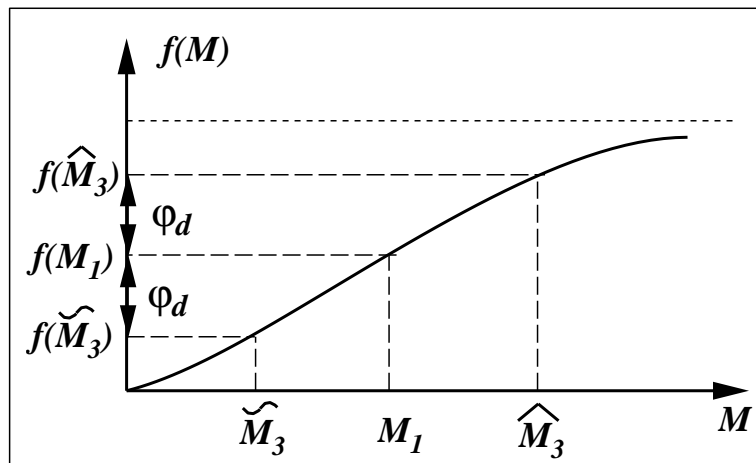
On a donc construit à partir d'une courbe $Y(x)$ décrivant un coude d'angle φ_d un conduit $[Y(x), \tilde{Y}(x)]$ décélérant l'écoulement et un conduit $[\hat{Y}(x), \tilde{Y}(x)]$ accélérant l'écoulement.

- 16) Que se passe-t-il lorsque $\varphi_d \geq f(+\infty) - f(M_1)$?

| Si $\varphi_d \geq f(+\infty) - f(M_1)$, une poche de vide se forme pour le coude accélérant.

- 17) Que peut-il se passer lorsque $\varphi_d \geq f(M_1)$?

| Si $\varphi_d \geq f(M_1)$, le choc est très proche de la paroi. On ne peut pas connecter les régions 1 et 3 par une C_+ capable d'éviter le choc. Dans ce cas, il n'y a pas de région 3 uniforme. On peut même envisager qu'une région subsonique apparaisse en aval du choc.



PCM 9

Écoulements permanents de perturbation

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Écoulements permanents de perturbation
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc7 (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	Écoulement potentiel, relation de Crocco méthode des singularités

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” étudie l’écoulement autour d’un profil mince dans le cas incompressible puis compressible. Le calcul de la portance du profil dans les cas subsonique et supersonique met en évidence la singularité du cas transsonique autour de Mach 1.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
$c(\rho, s)$	Vitesse du son (m s^{-1})
$\text{div } \underline{A}$	Divergence de \underline{A}
$\frac{d}{dt}$	Dérivée particulaire $\frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}}$ (s^{-1})
$\frac{\partial b}{\partial x}$	Dérivée partielle de b par rapport à x (m^{-1})
$\frac{\partial b}{\partial y}$	Dérivée partielle de b par rapport à y (m^{-1})
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\mathcal{E}(\rho, s)$	Loi d'état de l'énergie interne (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
$f(z)$	Potentiel complexe $f = \phi + i\psi$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$F(x, y)$	Fonction $F(x, y) = f(x + iy)$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\underline{\text{grad}}$	Opérateur gradient (m^{-1})
h	Enthalpie spécifique (J kg^{-1})
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
p	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
$\underline{\text{rot}}$	Opérateur rotationnel (m^{-1})
s	Entropie spécifique ($\text{J } ^\circ\text{K kg}^{-1}$)
t	Temps (s)
T	Température ($^\circ\text{K}$)
u	Composante de \underline{U} selon x (m s^{-1})
$\underline{U}(\underline{x})$	Champ de vitesse (m s^{-1})
v	Composante de \underline{U} selon y (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y)$	Coordonnées spatiales (m)
z	Nombre complexe $z = x + iy$ (m)
\bar{z}	Complexe conjugué de z (m)
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport au temps (s^{-1})
θ	Angle de \underline{x} avec \underline{e}_x
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
ϕ	Potentiel de $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
ϕ	Fonction de courant de $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \underline{\text{grad}} \psi$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)

ÉLÉMENTS DE COURS

Écoulements permanents

Les équations d'Euler s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} \\ \frac{d\underline{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \frac{ds}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} &= c^2 \frac{d\rho}{dt} . \end{aligned} \quad (9.1)$$

La vitesse du son c est défini par $c^2(\rho, s) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_s$ où $p = \mathcal{P}(\rho, s)$ est la loi d'état de la pression. La loi d'état pour l'énergie est $e = \mathcal{E}(\rho, s)$, les deux lois d'état étant liée par la relation de Gibbs

$$de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) . \quad (9.2)$$

En régime permanent, ces équations s'écrivent s'écrivent

$$\begin{aligned} \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho &= -\rho \operatorname{div} \underline{U} \\ \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2 &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \underline{U} \cdot \operatorname{grad} s &= 0 \\ \underline{U} \cdot \operatorname{grad} p &= c^2 \underline{U} \cdot \operatorname{grad} \rho , \end{aligned} \quad (9.3)$$

où l'on a utilisé l'identité $\underline{U} \cdot \operatorname{grad} \underline{U} = \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} U^2$. En définissant l'enthalpie totale par $H = h + \frac{1}{2} U^2$ avec $h = e + p/\rho$, on en déduit les deux relations

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{U} \wedge \underline{U} + \operatorname{grad} H &= T \operatorname{grad} s \quad (\text{Crocco}) \\ \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \operatorname{grad} U^2 &= c^2 \operatorname{div} \underline{U} . \end{aligned} \quad (9.4)$$

Dans le cas d'un écoulement plan permanent, la relation de Crocco implique que si deux des propriétés suivantes sont satisfaites :

- irrotationnel (potentiel)
- homoénergétique
- homoentropique

la troisième l'est aussi.

Potentiel complexe

L'ensemble des écoulements plans $\underline{U}(x, y) = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$ qui sont à la fois irrotationnels ($\text{rot } \underline{U} = \underline{0}$) et isochores ($\text{div } \underline{U} = 0$) est en bijection avec l'ensemble des fonctions analytiques $f(z)$ du plan complexe $z \in \mathcal{C}$.

En effet, si \underline{U} est irrotationnel, il s'écrit $\underline{U} = \text{grad } \phi$ où $\phi(x, y)$ est appelé le potentiel. On dit que l'écoulement est "potentiel". Si \underline{U} est isochoire, il s'écrit $\underline{U} = \underline{e}_z \wedge \text{grad } \psi$ où $\psi(x, y)$ est appelée la fonction de courant. On dit aussi que l'écoulement est incompressible. On peut donc écrire

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \underline{U} = \underline{0} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{U} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right.$$

On construit alors la fonction $F(x, y) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \in \mathcal{C}$ et on effectue le changement de variable complexe ($z = x + i y$, $\bar{z} = x - i y$). Ce changement de variable vérifie

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_{\bar{z}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On voit alors que

$$\partial_{\bar{z}} F(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \phi_{,x} = \psi_{,y} \\ \phi_{,y} = -\psi_{,x} \end{cases}$$

C'est le cas lorsque ϕ et ψ sont respectivement le potentiel et la fonction de courant d'un écoulement \underline{U} . Dans ce cas, la fonction $f(z)$ définie par $f(x + i y) = F(x, y) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$ est analytique (ne dépend pas de \bar{z}) et vérifie

$$f'(x + i y) = \partial_z F(x, y) = u(x, y) - i v(x, y).$$

A titre d'exemple, il y a correspondance entre la fonction analytique et l'écoulement potentiel incompressible radial

$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \text{Ln } z = \frac{q}{2\pi} (\text{Ln } r + i \theta) \iff \underline{U}(x) = \frac{q}{2\pi r} \underline{e}_r(\theta)$$

avec $z = r e^{i\theta}$ et $\underline{e}_r(\theta) = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y$. Cet écoulement est singulier en $\underline{0}$. Il s'agit d'une source ponctuelle.

Le tourbillon ponctuel est défini par la fonction analytique et le champ de vitesse

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Ln } z = \frac{\Gamma}{2\pi} (i \text{Ln } r - \theta) \iff \underline{U}(x) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta(\theta)$$

avec $\underline{e}_\theta(\theta) = -\sin \theta \underline{e}_x + \cos \theta \underline{e}_y$. Cet écoulement est singulier en $\underline{0}$.

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

Dans tout ce qui suit, on considère l'écoulement plan permanent d'un fluide parfait avec des conditions amont homoentropiques (s_∞) et homoénergétiques (H_∞).

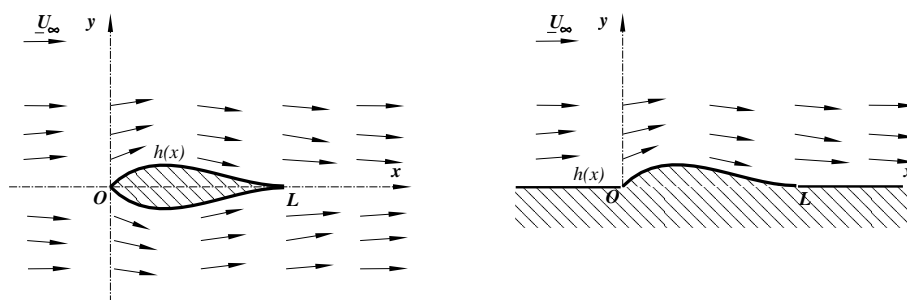
1 Écoulement incompressible

On considère un obstacle défini par $y = h(x)$ avec $x \in [0, L]$ pour l'extrados et $y = -h(x)$ avec $x \in [0, L]$ pour l'intrados avec $h(x) \geq 0$ et $h(0) = h(L) = 0$. On suppose que $h'(0) < \infty$ et $h'(L) = 0$.

On s'intéresse à l'écoulement permanent potentiel d'un fluide parfait autour de l'obstacle avec les conditions aux limites amont $\underline{U} = U_\infty \underline{e}_x$, $\rho = \rho_\infty$ et $p = p_\infty$.

On suppose que $\sup(h)/L \ll 1$ et on fait donc l'hypothèse de perturbation $\underline{U} = \text{grad } \phi = U_\infty \underline{e}_x + \text{grad } \varphi$ avec $\|\text{grad } \varphi\| \ll U_\infty$. On notera $\text{grad } \varphi = u \underline{e}_x + v \underline{e}_y$.

Dans un premier temps, on suppose que l'écoulement est incompressible ($M_\infty = 0$).



- 1) Montrer que l'hypothèse de perturbation et la géométrie du problème conduisent à la résolution du problème $\Delta\varphi = 0$ pour $y \geq 0$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) = U_\infty h'(x)$ en prolongeant l'extrados par la paroi horizontale $h(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R} - [0, L]$.

Comme $\text{div } \underline{U} = 0$, on a $\Delta\varphi = 0$. Comme $h'(L) = 0$ (profil effilé), la condition de Kutta-Joukowski impose seulement la continuité de la vitesse \underline{U} en $(x, y) = (L, 0)$ (on aurait la nullité de cette vitesse avec un bord de fuite en forme de dièdre). Par symétrie, on peut se limiter au demi-plan $y \geq 0$. Les conditions aux limites cinématiques sur la surface $y - h(x) = 0$ s'écrivent $\frac{d}{dt}[y - h(x)] = v - (U_\infty + u)h'(x) = 0$. Comme $u \ll U_\infty$, on a $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = U_\infty h'(x)$ en $y = 0$.

- 2) Indiquer pourquoi il faut ajouter la condition aux limites $\|\text{grad } \varphi\| \rightarrow 0$ quand $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$.

Le système d'équations est elliptique. Il faut donc imposer des conditions aux limites à l'infini. Ici, on impose que $\underline{U} \rightarrow U_\infty \underline{e}_x$ à l'infini.

On définit la résultante des efforts de pression sur la courbe \mathcal{C} délimitant une partie de l'obstacle par la relation $\underline{R}_\mathcal{C} = \int_\mathcal{C} [p(\underline{x}) - p_\infty] \underline{n} \, dl$ où $p(\underline{x})$ est la pression et \underline{n} la normale à \mathcal{C} orientée vers l'extérieur de l'obstacle. Cette relation s'écrit aussi $\underline{R}_\mathcal{C} = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \int_\mathcal{C} C_p(\underline{x}) \underline{n} \, dl$ avec $C_p(\underline{x}) = [p(\underline{x}) - p_\infty] / [\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2]$.

- 3) Montrer les équations du mouvement entraînent que $C_p(\underline{x}) = 1 - U^2/U_\infty^2$. En déduire que l'hypothèse de perturbation conduit à l'approximation $C_p(x, 0) = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2u}{U_\infty}$.

L'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit ici $\text{grad} \left(\frac{1}{2} U^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$, ce qui s'intègre en $p + \frac{1}{2} \rho_\infty U^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2$, ce qui s'écrit $p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 [1 - U^2/U_\infty^2]$. D'où $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = 1 - U^2/U_\infty^2 = 1 - (U_\infty^2 + 2U_\infty u + u^2 + v^2)/U_\infty^2 = -2\frac{u}{U_\infty} + O\left(\frac{u^2 + v^2}{U_\infty^2}\right)$.

- 4) En choisissant pour \mathcal{C} l'extrados de l'obstacle pour $x \in [0, L]$, montrer que l'hypothèse de perturbation permet d'écrire $\underline{R}_\mathcal{C} = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 L (C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y)$ où $C_x = -\frac{1}{L} \int_0^L C_p(x, 0) h'(x) dx$ est le coefficient de traînée de l'extrados et $C_y = \frac{1}{L} \int_0^L C_p(x, 0) dx$ le coefficient de portance de l'extrados.

La normale \underline{n} étant parallèle au vecteur $\text{grad} [y - h(x)]$, on a $\underline{n} = \frac{(-h' \underline{e}_x + \underline{e}_y)}{1+h'^2} = -h' \underline{e}_x + \underline{e}_y + O(\epsilon)$. En approximant \mathcal{C} par l'intervalle $[0, L]$, on a $C_x = -\frac{1}{L} \int_0^L C_p h' dx$ et $C_y = \frac{1}{L} \int_0^L C_p dx$.

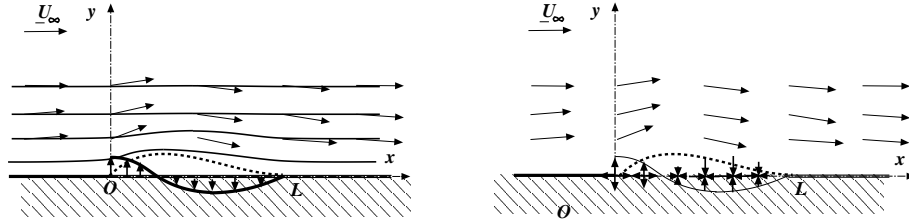
- 5) Indiquer pourquoi l'on peut anticiper que le coefficient de traînée de l'extrados C_x est nul et que la portance de l'obstacle entier est nulle.

Le paradoxe de d'Alembert indique la nullité de la traînée de l'obstacle. En raison de la symétrie, la force exercée sur la paroi a une composante nulle sur l'axe Ox , ce qui s'écrit $C_x = 0$. Par symétrie, les portances sur l'extrados et l'intrados se compensent.

On cherche maintenant à résoudre le problème par méthode des singularités.

- 6) Constater que la solution du problème de perturbation est la même que celle de l'écoulement potentiel dans un demi plan avec injection de vitesse $v(x, 0) = U_\infty h'(x)$ sur une paroi plane. Comparer la trajectoire issue de $(-\infty, 0)$ avec la forme de la paroi.

Les équations à résoudre à l'ordre dominant de l'approximation sont formellement celles d'un écoulement potentiel soumis à l'injection d'une vitesse $v(x, 0) = U_\infty h'(x)$ sur l'axe Ox . En choisissant $\varphi(-\infty, 0) = 0$, la trajectoire $\varphi = 0$ est proche de la forme de la paroi $y = h(x)$ à $O(\epsilon^2)$ près.



7) En considérant une densité $q(x)$ de sources ponctuelles, justifier alors la recherche d'une solution à l'aide du potentiel complexe

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(x') \text{Ln}(z - x') dx' \tag{9.5}$$

avec $f'(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$. Montrer que $q(x)$ doit vérifier l'équation $U_\infty h'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left[-\frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(x')}{x+i\epsilon-x'} dx' \right]$.

En posant $f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ où $f(z)$ est une fonction analytique, on obtient la solution $\varphi(x, y)$ si et seulement si la dérivée $f'(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ vérifie bien les conditions aux limites (il suffit de détailler le changement de variable $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, une fonction analytique étant, par définition, indépendante de \bar{z}). En choisissant $f(z)$ sous la forme d'une superposition de sources ponctuelles $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(x') \text{Ln}(z - x') dx'$, on obtient $f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(x')}{z-x'} dx'$. La condition aux limites sur la paroi s'écrit $U_\infty h'(x) = v(x, 0) = \text{Im} [f'(x)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{q(x')}{x+i\epsilon-x'} dx' \right]$.

8) En effectuant un changement de variable adéquat, montrer que l'intégrale $I(\epsilon) = \int_0^L \frac{q(x')}{(x-x')+i\epsilon} dx'$ vérifie $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = -i\pi q(x)$.

On effectue le changement de variable $s = \frac{x-x'}{\epsilon}$ qui implique $ds = -\frac{dx'}{\epsilon}$, on obtient $I(\epsilon) = \int_{-\frac{x-L}{\epsilon}}^{\frac{x-L}{\epsilon}} \frac{q(x+\epsilon s)}{s+i} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x)}{s+i} ds + O(\epsilon)$. Donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = q(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s-i}{s^2+1} ds = -i q(x) [\text{arctg } s]_{-\infty}^{\infty} = -i\pi q(x)$.

9) En déduire que la densité $q(x) = 2U_\infty h'(x)$ permet de trouver la solution du problème

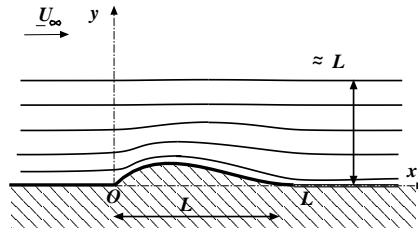
$$u = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^L \frac{h'(x')(x - x')}{(x - x')^2 + y^2} dx' \quad \text{et} \quad v = \frac{U_\infty}{\pi} y \int_0^L \frac{h'(x')}{(x - x')^2 + y^2} dx', \tag{9.6}$$

et que $C_x = 0$.

On en déduit $U_\infty h'(x) = \Im[f'(x)] = \text{vp} \left[\frac{i}{2\pi} \int_0^L \frac{q(x')}{x-x'} dx' \right] = \frac{q(x)}{2}$, ce qui implique $q(x) = 2U_\infty h'(x)$. D'où $f(z) = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^L h'(x') \text{Ln}(z-x') dx'$ et $f'(x+iy) = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^L \frac{h'(x')}{(x-x') + iy} dx'$. Comme $f'(x+iy) = u(x,y) - iv(x,y)$, on a finalement $u(x,y) = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^L \frac{h'(x')(x-x')}{(x-x')^2 + y^2} dx'$ et $v(x,y) = \frac{U_\infty}{\pi} y \int_0^L \frac{h'(x')}{(x-x')^2 + y^2} dx'$. Le calcul de C_x fait intervenir l'intégrale de $\frac{h'(x)h'(x')}{x-x'}$ sur $(x,x') \in [0,L]^2$ qui est une fonction antisymétrique du couple (x,x') . On a donc $C_x = 0$.

- 10) Dessiner l'allure des trajectoires en admettant que la distance à la paroi à partir de laquelle ces trajectoires peuvent être considérées comme rectilignes est de l'ordre de L (démonstration à chercher sous forme d'exercice complémentaire);

Les trajectoires peuvent être considérées comme rectilignes au-delà d'une distance d'ordre L .



2 Écoulement subsonique

On suppose maintenant que l'écoulement plan permanent de fluide parfait est compressible, homoénergétique (H_∞) et homoentropique (s_∞). On suppose que le comportement du fluide est celui d'un gaz parfait polytropique ($H_\infty = \frac{U^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1}$). On note $M(U) = U/c(U)$ le nombre de Mach et $M_\infty = M(U_\infty)$.

- 11) Montrer que l'écoulement est potentiel.

D'après la relation de Crocco, un écoulement homoénergétique, homoentropique, plan et permanent est potentiel.

On effectue alors l'hypothèse de perturbation $\underline{U} = \text{grad } \phi = U_\infty \underline{e}_x + \text{grad } \varphi$ avec $\|\text{grad } \varphi\| \ll U_\infty$ basée sur le petit paramètre $\epsilon = h_0/L$.

- 12) Montrer que l'hypothèse de perturbation conduit à la résolution du problème

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = U_\infty h'(x).$$

L'équation $c^2 \Delta \phi - \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U}^2 = 0$ entraîne que $(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ à l'ordre dominant. L'approximation pour les conditions aux limites est la même que dans le cas incompressible.

- 13) Indiquer pourquoi il faut ajouter la condition aux limites $\|\text{grad } \varphi\| \rightarrow 0$ quand $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$.

Le problème est elliptique. Il faut donc prescrire des conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine.

On définit les expressions de R_C , C_x , C_y et $C_p(x, 0)$ en fonction de p avec les mêmes relations que dans le cas incompressible.

- 14) Montrer que

$$C_p(\underline{x}) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(1 - U^2/U_\infty^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}. \quad (9.7)$$

L'écoulement étant homoénergétique, on a $\frac{1}{2} U^2 + \frac{c^2(U)}{\gamma-1} = \frac{1}{2} U_\infty^2 + \frac{c_\infty^2(U)}{\gamma-1}$.

L'écoulement étant homoentropique, on a $\frac{p}{p_\infty} = \left[\frac{c^2(U)}{c_\infty^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. On en déduit

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} = \frac{2p_\infty}{\rho_\infty c_\infty^2 M_\infty^2} \left\{ \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\}. \quad (9.8)$$

Or $\frac{p_\infty}{\rho_\infty c_\infty^2} = \frac{\rho_\infty r T_\infty}{\rho_\infty \gamma r T_\infty} = \frac{1}{\gamma}$ car $p = \rho r T$ et $c^2 = \gamma r T$.

- 15) En déduire que l'hypothèse de perturbation permet d'écrire et que $C_p(\underline{x}) = 1 - U^2/U_\infty^2$. En déduire que l'on peut aussi écrire $C_p(\underline{x}) = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2u}{U_\infty}$.

Comme $U^2 = (U_\infty + u)^2 + v^2$, le développement limité de C_p pour $1 - U^2/U_\infty^2 \sim -\frac{2u}{U_\infty} \ll 1$ conduit à $C_p \sim \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\frac{\gamma-1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} M_\infty^2 \left(1 - \frac{U^2}{U_\infty^2} \right) \right] = 1 - \frac{U^2}{U_\infty^2}$. On retrouve la même expression $C_p \sim -\frac{2u}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ que dans le cas $M_\infty = 0$.

On cherche la solution $\varphi^{\text{comp}}(x, y)$ du problème compressible ($M_\infty > 0$) à partir de la solution $\varphi^{\text{inc}}(x, y)$ du problème incompressible ($M_\infty = 0$). On notera pour cela x' et y' les variables de la fonction $\varphi^{\text{inc}}(x', y')$.

- 16) Montrer que l'on a $\varphi^{\text{comp}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \varphi^{\text{inc}}(x, y \sqrt{1-M_\infty^2})$.

En reportant φ^{comp} dans l'équation elliptique, on obtient

$$(1 - M_\infty^2) \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial^2 \varphi^{\text{inc}}}{\partial x'^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi^{\text{inc}}}{\partial y'^2} \\ = \sqrt{1 - M_\infty^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{\text{inc}}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{\text{inc}}}{\partial y'^2} \right) = 0 .$$

La condition aux limites devient $\frac{\sqrt{1 - M_\infty^2}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \varphi^{\text{inc}}}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi^{\text{inc}}}{\partial y'} = U_\infty h'(x)$. Si $\varphi^{\text{inc}}(x', y')$ est solution du problème pour $M_\infty = 0$, alors

$$\varphi^{\text{comp}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \varphi \left(x, y \sqrt{1 - M_\infty^2} \right)$$

est solution du problème compressible $M_\infty > 0$.

17) En déduire que

$$u^{\text{comp}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} u^{\text{inc}} \left(x, y \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) \quad \text{et} \quad v^{\text{comp}} = v^{\text{inc}} \left(x, y \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) . \quad (9.9)$$

On en déduit

$$u^{\text{comp}} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial \varphi^{\text{inc}}}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} u^{\text{inc}} \left(x, y \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) \\ \text{et} \quad v^{\text{comp}} = \frac{\partial \varphi^{\text{inc}}}{\partial y'} = v^{\text{inc}} \left(x, y \sqrt{1 - M_\infty^2} \right) . \quad (9.10)$$

18) En déduire que $C_p^{\text{comp}}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} C_p^{\text{inc}}(x, 0)$.

On en déduit que $C_p^{\text{comp}}(x, 0) = -\frac{2u^{\text{comp}}}{U_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} C_p^{\text{inc}}$.

19) Dessiner l'allure des trajectoires en admettant que la distance à la paroi à partir de laquelle ces trajectoires peuvent être considérées comme rectilignes est de l'ordre de L dans le cas $M_\infty = 0$.

Le domaine d'influence de l'obstacle est donc de l'ordre de $\frac{L}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$. Il tend vers l'infini quand $M_\infty \rightarrow 1$.

3 Écoulement supersonique

On suppose maintenant que l'écoulement est supersonique ($M_\infty > 1$).

- 20) Montrer que l'hypothèse de perturbation permet de conserver l'hypothèse d'homoentropie à l'ordre dominant. Jusqu'à quel ordre en ϵ cette hypothèse reste-t-elle vérifiée ?

La présence de la paroi peut être responsable de chocs. Ces chocs seront infinitésimaux si $\epsilon =: h_0/L \ll 1$. Les variations d'entropie sont alors d'ordre ϵ^3 . On peut donc largement supposer que $s = s_\infty$ partout.

- 21) Montrer que l'hypothèse de perturbation conduit à la résolution du problème $(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ avec $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = U_\infty h'(x)$.

L'équation $c^2 \Delta \phi - \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 = 0$ s'écrit, à l'ordre dominant, $(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$. L'approximation pour les conditions aux limites reste inchangée.

- 22) Indiquer brièvement pourquoi on ne peut plus ajouter la condition aux limites $\|\underline{\text{grad}} \varphi\| \rightarrow 0$ quand $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty$. Quelle condition doit-on imposer à la place ?

L'équation est hyperbolique (équation des ondes). Il faut supposer que l'information venant de l'infini, le long des caractéristiques, est celle de l'écoulement U_∞ . L'information allant vers l'infini, le long des caractéristiques, ne tend pas forcément vers zéro.

- 23) Montrer que la solution s'écrit $\varphi(x, y) = -U_\infty \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1})$.

En reportant $\varphi(x, y) = -\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1})$ dans l'équation, on obtient

$$-\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} [(M_\infty^2 - 1)h'' - (M_\infty^2 - 1)h''] = 0. \quad (9.11)$$

Cette fonction satisfait les conditions aux limites car

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \sqrt{M_\infty^2 - 1} (-h') = U_\infty h'.$$

Donc $\varphi(x, y)$ est solution.

- 24) En déduire que $C_p(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h'(x)$. Commenter le comportement de ce coefficient pour $M_\infty \rightarrow 1$.

On en déduit que $C_p(x, 0) = -\frac{2u}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h'(x)$. Pour les régimes transsoniques ($M_\infty \sim 1$) ce développement n'est plus valide.

PCM 10

Écoulements transsoniques

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Écoulements transsoniques
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc8 (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	tuyère de Laval, transsonique développement asymptotique

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” étudie l’écoulement plan permanent au voisinage du col de la tuyère de Laval dans le cas où cette région est transsonique.

NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur
c	Vitesse du son (m s^{-1})
c_∞	Vitesse du son à l’infini (m s^{-1})

C_v	Capacité calorifique à volume constant ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
$C_p = C_v + r$	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
e	Énergie interne massique (J kg^{-1})
$\underline{e}_x, \underline{e}_y$	Vecteurs de base (m)
H	Enthalpie totale spécifique (J kg^{-1})
H_0	Enthalpie constante (J kg^{-1})
M	Nombre de Mach ()
M_∞	Nombre de Mach à l'infini ()
\mathcal{M}	Masse molaire du gaz (kg)
p	Champ de pression (Pa)
$r = R/\mathcal{M}$	Constante R divisée par la masse molaire ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
R	Constante des gaz parfaits ($\text{J }^\circ\text{K}^{-1}$)
$\underline{\text{rot}}$	Opérateur rotationnel (m^{-1})
s	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_0	Entropie constante ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
T	Température ($^\circ\text{K}$)
$\underline{U}(\underline{x})$	Champ de vitesse (m s^{-1})
$\underline{u}(\underline{x})$	Champ de vitesse $\underline{U}(\underline{x}) - U_\infty \underline{e}_x$ (m s^{-1})
U	Module du champ de vitesse (m s^{-1})
U_∞	Vitesse à l'infini (m s^{-1})
$\underline{x} = (x, y)$	Coordonnées spatiales (m)
γ	Constante C_p/C_v
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
ϕ	Potentiel de $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ ($\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$)
φ	Potentiel de $\underline{u} = \underline{\text{grad}} \varphi$ ($\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$)

ÉLÉMENTS DE COURS

Écoulements plans homoénergétiques et homoentropique

On considère un écoulement permanent de vitesse \underline{U} , de masse volumique ρ , de pression p , d'énergie interne e , d'entropie s et d'enthalpie totale $H = h + \frac{1}{2}\underline{U}^2$ avec $h = e + p/\rho$. Les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Relation de Crocco :} \quad & \underline{\text{rot}} \underline{U} \wedge \underline{U} + \underline{\text{grad}} H = T \underline{\text{grad}} s \\ & \frac{1}{2} \underline{U} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{U}^2 = c^2 \text{div } \underline{U} . \end{aligned} \quad (10.1)$$

Si l'écoulement est plan, homoénergétique ($H = H_0$) et homoentropique ($s = s_0$) la relation de Crocco indique qu'il est aussi est potentiel ($\underline{\text{rot}} \underline{U} = \underline{0}$). Il s'écrit alors sous la forme $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$ où ϕ est le potentiel. Si le fluide est un

gaz parfait ($p = \rho r T$ et $e = C_v T$), l'enthalpie totale, constante, s'écrit

$$H_0 = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U^2, \quad (10.2)$$

où $c = \sqrt{\gamma r T}$ est la vitesse du son, T la température et $\gamma = C_p/C_v$ avec $C_p = C_v + r$.

Changement de variables autour d'une vitesse constante

S'il existe une vitesse constante $U_\infty \underline{e}_x$ privilégiée (par exemple à l'infini), on peut effectuer le changement de variable $\underline{U} = U_\infty \underline{e}_x + \text{grad } \varphi$ où φ est le potentiel du champ de vitesse $\underline{u} = \underline{U} - U_\infty \underline{e}_x$. En notant c_∞ la vitesse du son à l'infini et $M_\infty = U_\infty/c_\infty$ le nombre de Mach à l'infini, l'équation (??) s'écrit

$$\begin{aligned} & \left[1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ & + \left[1 - (\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{U_\infty^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ & - 2 \frac{M_\infty}{U_\infty} \left(1 + \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.3) \end{aligned}$$

La conservation de l'enthalpie totale s'écrit alors

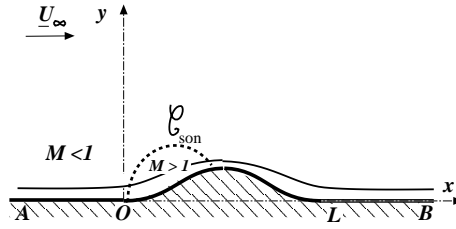
$$\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} (U_\infty \underline{e}_x + \text{grad } \varphi)^2 = \frac{c_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} U_\infty^2. \quad (10.4)$$

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

Dans tout ce qui suit, on considère l'écoulement plan permanent d'un fluide parfait homoentropiques (s_0) et homoénergétiques (H_0).

1 Existence d'une ligne sonique

On s'intéresse à des écoulements pour lesquels coexistent des régions subsoniques et supersoniques. On s'intéresse alors au voisinage de la ligne sonique définie par $M(U) = 1$. On définit son voisinage transsonique par le lieu des points tels que $|M(U) - 1| < \mu$ avec $\mu \ll 1$. On suppose que l'écoulement permanent de fluide parfait est homoénergétique (H_0) et homoentropique (s_0) et que comportement du fluide est celui d'un gaz parfait polytropique.

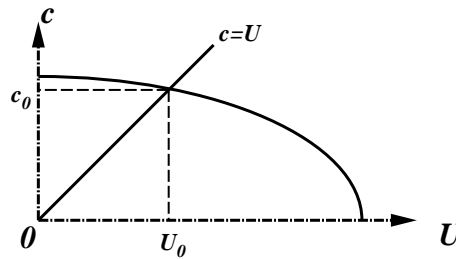


- 1) Montrer que l'écoulement est potentiel, c'est-à-dire qu'il existe ϕ tel que $\underline{U} = \text{grad } \phi$.

En l'absence de choc et comme H_0 et s_0 sont constants, l'écoulement reste potentiel (relation de Crocco).

- 2) On note C_{son} la ligne sonique dont les points P vérifient $M(P) = 1$. Montrer que les points de la ligne sonique sont tels que $(\text{grad } \phi)^2 = c_0^2$ où c_0 est une constante que l'on reliera à H_0 .

L'intersection des courbes $\frac{U}{c} = 1$ et $\frac{1}{2}U^2 + \frac{c^2}{\gamma-1} = H_0$ dans le plan (U, c) permet de déterminer le couple (U_0, c_0) qui caractérise la vitesse $U_0 = c_0$ des points soniques. On calcule facilement $c_0^2 = 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} H_0$.



- 3) On pose alors $\underline{U} = c_0 \underline{e}_x + u \underline{e}_x + v \underline{e}_y = c_0 \underline{e}_x + \text{grad } \phi$. Montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (10.5)$$

Comme $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, on a $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. L'écoulement est en effet potentiel.

- 4) En utilisant la conservation de l'enthalpie totale (écoulement homoénergétique), montrer que l'équation $c^2 \Delta \phi - \frac{1}{2} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } [(\text{grad } \phi)^2] = 0$ vérifiée par le potentiel ϕ permet d'écrire, dans la région transsonique,

l'équation suivante vérifiée par φ :

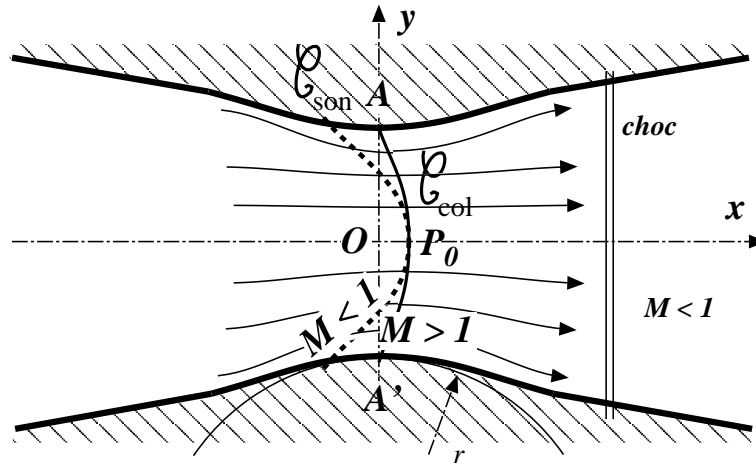
$$\begin{aligned}
 & \left[-(\gamma + 1) \frac{u}{c_0} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u^2}{c_0^2} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\
 + & \left[1 - (\gamma - 1) \frac{u}{c_0} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{c_0^2} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right] \frac{\partial v}{\partial y} \\
 - & \left(1 + \frac{u}{c_0} \right) \frac{v}{c_0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 . \tag{10.6}
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'équation U_∞ par c_0 , c_∞ par c_0 et M_∞ par $M_0 = 1$ dans les équations (??) et (??), on obtient l'équation (??) et l'équation $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 = \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} c_0^2$. En utilisant $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, on obtient finalement le résultat en utilisant $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$

2 Écoulement transsonique au voisinage du col

On considère à présent une tuyère délimitée par les parois d'équations $y = h(x)$ et $y = -h(x)$ telles que $h(0) = d$, $h'(0) = 0$ et $h''(0) = 1/r > 0$. On suppose que le rayon de courbure r est grand devant d et l'on définit le petit paramètre η par la relation $\eta^2 = d/r$. On suppose que les dérivées n -ièmes vérifient $h^{(n)}(0) = O(r^{n-1})$.

On note A le point de coordonnées $(0, d)$. On suppose que l'écoulement permanent $\underline{U}(x, y)$ devient sonique dans le voisinage du col et on note c_0 la vitesse du son au point sonique P_0 de l'axe, de coordonnées $(x_0, 0)$, c'est-à-dire tel que le nombre de Mach est $M(P_0) = 1$. On pose alors $\underline{U} = c_0 \underline{e}_x + u \underline{e}_x + v \underline{e}_y = c_0 \underline{e}_x + \text{grad } \varphi$.



- 5) Montrer que les conditions exactes de glissement du fluide sur la paroi de la tuyère s'écrivent

$$\begin{aligned} v[x, h(x)] &= h'(x) \{c_0 + u[x, h(x)]\} \\ \text{et } v[x, -h(x)] &= -h'(x) \{c_0 + u[x, -h(x)]\} . \end{aligned} \quad (10.7)$$

La condition de glissement sur la frontière d'équation $y - h(x) = 0$ s'écrit $\frac{d}{dt} [y - h(x)] = 0$ ou encore $v - \underline{U} \cdot \text{grad } h = v - U h'(x) = 0$. On en déduit $v = h'(x)(c_0 + u)$. Par symétrie, on a $v[x, -h(x)] = -h'(x) \{c_0 + u[x, -h(x)]\}$.

On cherche à déterminer la ligne sonique \mathcal{C}_{son} et à décrire l'écoulement dans la région transcritique, c'est-à-dire dans un voisinage de cette ligne sonique. Pour cela on utilise les notations :

$$\frac{x}{d} = \eta X, \quad \frac{y}{d} = Y, \quad \frac{u(x, y)}{c_0} = \eta^2 U(X, Y) \quad \text{et} \quad \frac{v(x, y)}{c_0} = \eta^3 V(X, Y)$$

et on effectue le développement asymptotique qui consiste à supposer que les variables sans dimensions X, Y, U et V sont d'ordre 1 lorsque $\eta \rightarrow 0$.

- 6) Montrer que la région $|x/d| < \eta$ est une région transcritique telle que $|M(U) - 1| < O(\eta^2)$ et que l'écoulement y est approximativement décrit par les équations

$$-(\gamma + 1)U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} = 0, \quad (10.8)$$

avec les conditions aux limites $V(X, 1) = X$ et $V(X, -1) = -X$.

Comme $\frac{u}{c_0} = O(\eta^2)$ et $\frac{v}{c_0} = O(\eta^3)$, on a $M(\|\underline{U}\|) = 1 + O(\eta^2)$. Les équations pour φ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \left[-(\gamma + 1) \frac{u}{c_0} + O(\eta^4) \right] \frac{\partial u}{\partial x} + [1 + O(\eta^2)] \frac{\partial v}{\partial y} - O(\eta^3) \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ -(\gamma + 1) \eta^2 U \frac{1}{d\eta} c_0 \eta^2 \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{d} c_0 \eta^3 \frac{\partial V}{\partial Y} + O(\eta^4) &= \\ \frac{\eta^3 c_0}{d} \left[-(\gamma + 1) U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right] + O(\eta^4) &= 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{d} c_0 \eta^2 \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{1}{d\eta} c_0 \eta^3 \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\eta^3 c_0}{d} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) = 0 \quad (10.10)$$

L'équation de la paroi s'écrit $y = h(x) = d + h''(0) \frac{x^2}{2} + O(x^3) = d + \frac{1}{r} \frac{x^2}{2} + O(x^3) = d \left[1 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O(\eta^5) \right]$ ou encore $dY = d(1 + \eta^4 X) + O(\eta^5)$. On en déduit $h'(x) = \eta^2 \left(\frac{x}{d} \right) + O(\eta^2) = \eta^3 X + O(\eta^4)$. L'équation de la condition aux limites s'écrit $v[x, h(x)] = c_0 \eta^3 V(X, 1) + O(\eta^4) = c_0 \eta^3 X + O(\eta^4)$ ou encore $V(X, 1) = X$. Par symétrie, la condition aux limites sur l'autre paroi s'écrit $V(X, -1) = -X$.

- 7) On note $X_0 = x_0/(\eta d)$ l'abscisse adimensionnée du point sonique de l'axe. On cherche des solutions de la forme

$$U(X, Y) = a(X - X_0) + bY^2 \quad \text{et} \quad V(X, Y) = Y[\alpha(X - X_0) + \beta Y^2].$$

Justifier ce choix à partir de la symétrie du problème et de l'hypothèse de sonicité du point P_0 . On choisit $a > 0$. Discuter ce choix.

La symétrie ($Y \rightarrow -Y$, $U \rightarrow U$ et $V \rightarrow -V$) et le fait que $U = V = 0$ pour $(X, Y) = (X_0, 0)$ justifient la forme des polynômes. On doit choisir $a > 0$ dans la mesure où l'on suppose que l'écoulement est accéléré au voisinage du col de la tuyère.

- 8) En reportant dans les équations, montrer que l'on obtient $b = \frac{\gamma+1}{2}a^2$, $\alpha = (\gamma + 1)a^2$ et $\beta = \frac{(\gamma+1)^2}{6}a^3$.

En reportant dans $-(\gamma+1)U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y}$, on obtient $-(\gamma+1)[a(X - X_0) + bY^2]a + \alpha(X - X_0) + 3\beta Y^2 = 0$, ce qui entraîne $\alpha = (\gamma + 1)a^2$ et $3\beta = (\gamma + 1)ab$. En reportant dans $\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} = 0$, on obtient $\alpha = 2b$. On a, finalement, $b = \frac{\alpha}{2} = \frac{(\gamma+1)}{2}a^2$ et $\beta = \frac{(\gamma+1)}{3}ab = \frac{(\gamma+1)^2}{6}a^3$.

- 9) En utilisant les conditions aux limites, montrer que $a = 1/\sqrt{\gamma+1}$, $b = 1/2$, $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{\gamma+1}/6$ et $X_0 = \sqrt{\gamma+1}/6$. En déduire :

$$U(X, Y) = \frac{(X - X_0)}{6X_0} + \frac{Y^2}{2} \quad \text{et} \quad V(X, Y) = Y[(X - X_0) + X_0 Y^2].$$

En reportant dans $V(X, 1) = X$, on obtient $\alpha(X - X_0) + \beta = X$, ce qui implique $\alpha = 1$ et $\beta = X_0$. D'où $a^2 = \frac{1}{\gamma+1}$, $b = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6} = X_0 = \frac{1}{6a}$. On résume ces résultats en écrivant $U(X, Y) = \frac{(X-X_0)}{6X_0} + \frac{Y^2}{2}$ et $V(X, Y) = Y[(X - X_0) + X_0 Y^2]$ avec $X_0 = \sqrt{\gamma+1}/6$.

- 10) On revient maintenant aux quantités dimensionnées. Montrer que $x_0 = \frac{1}{6}\sqrt{\gamma+1} d^{3/2} r^{-1/2}$. Montrer que les équations de la ligne des cols et de la ligne sonique sont respectivement

$$\mathcal{C}_{\text{col}} : (x - x_0)/x_0 = -(y/d)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\text{son}} : (x - x_0)/x_0 = -3(y/d)^2.$$

La ligne \mathcal{C}_{col} , définie par $V = 0$, a donc pour équation $\frac{X-X_0}{X_0} = -Y^2$. Comme $X = \frac{x}{d\eta}$ et $Y = \frac{y}{d}$, cette équation s'écrit aussi $(x - x_0)/x_0 = -(y/d)^2$ avec $x_0 = d\eta \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6} = d\sqrt{\frac{d}{r}} \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{\gamma+1} d^{3/2}/r^{1/2}$. La ligne \mathcal{C}_{son} est définie par $U = 0$ à l'ordre dominant dans la mesure où $\|\underline{U}\| = \sqrt{(c_0 + u)^2 + v^2} = c_0(1 + u/c_0) + O(\eta^3)$. Son équation est donc $\frac{X-X_0}{X_0} = -3Y^2$, ce qui s'écrit aussi $(x - x_0)/x_0 = -3(y/d)^2$.

- 11) Tracer ces lignes. Montrer que les rayons de courbures de ces lignes sont respectivement $\rho_0 = \frac{3}{\sqrt{\gamma+1}}\sqrt{rd}$ et $\rho_* = \frac{1}{\sqrt{\gamma+1}}\sqrt{rd}$. Tracer x_0/d et d/ρ_0 en fonction du paramètre $\eta = \sqrt{d/r}$.

Les lignes \mathcal{C}_{col} et \mathcal{C}_{son} sont des paraboles passant par le point P_0 . Leur intersection avec la paroi est A pour \mathcal{C}_{col} et $(-2x_0, d)$ pour \mathcal{C}_{son} . La ligne \mathcal{C}_{son} est donc en amont de \mathcal{C}_{col} . La courbure de \mathcal{C}_{col} est $\rho_0 = \frac{d^2}{2x_0} = 3\sqrt{\frac{rd}{\gamma+1}}$. La courbure de \mathcal{C}_{son} est $\rho_* = \frac{d^2}{6x_0} = \sqrt{\frac{rd}{\gamma+1}}$. On a donc $\frac{x_0}{d} = \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6}\eta$. Comme $\rho_0 = \frac{d^2}{2x_0}$, on a $\frac{d}{\rho_0} = \frac{2x_0}{d} = \frac{\sqrt{\gamma+1}}{3}\eta$.

- 12) Montrer que l'on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, y)/c_0 &= \eta^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma+1}} \frac{x-x_0}{d} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{d^2} \right] \\ v(x, y)/c_0 &= \eta^2 \frac{y}{d} \left[\frac{x-x_0}{d} + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6} \eta \frac{y^2}{d^2} \right]. \end{aligned} \quad (10.11)$$

En revenant aux variables dimensionnées, on obtient

$$u(x, y)/c_0 = \eta^2 \left[\frac{x-x_0}{6x_0} + \frac{y^2}{d^2} \right] = \eta \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma+1}} \frac{x-x_0}{d} + \frac{1}{2} \eta \frac{y^2}{d^2} \right] + O(\eta^3)$$

et

$$v(x, y)/c_0 = \eta^3 \frac{y}{d} \left[\frac{x-x_0}{d\eta} + x_0 \frac{y^2}{d^2} \right] = \eta^2 \frac{y}{d} \left[\frac{x-x_0}{d} + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{6} \eta \frac{y^2}{d^2} \right] + O(\eta^4).$$

PCM 11

Émission du son par une sphère

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Émission du son par une sphère
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-acpc9 (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	ondes sonores, sources ponctuelles traitement harmonique

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” s’intéresse aux ondes sonores émises par une sphère en mouvement et examine le cas limite de la source ponctuelle.

NOTATIONS

\underline{a} Vecteur

c	Vitesse du son (m s^{-1})
\underline{I}	Flux d'énergie W m^{-2}
p'	Champ de pression (Pa)
p_0	Champ de pression constant (Pa)
p	Perturbation du pression constant (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
s'	Entropie spécifique ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s_0	Entropie constante ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
s	Perturbation du champ d'entropie ($\text{J }^\circ\text{K kg}^{-1}$)
T	Température ($^\circ\text{K}$)
$\underline{u}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
w_a	Energie acoustique (W m^{-3})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
ρ'	Masse volumique (kg m^{-3})
ρ_0	Masse volumique constante (kg m^{-3})
ρ	Perturbation de masse volumique (kg m^{-3})
ϕ	Potentiel de $\underline{u} = \underline{\text{grad}} \phi$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)

ÉLÉMENTS DE COURS

Équations d'Euler

Les équations d'évolution d'un fluide parfait s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \rho' &= -\text{div } \underline{u} \\
 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \underline{u} &= -\frac{1}{\rho'} \underline{\text{grad}} p' \\
 \frac{\partial s'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} s' &= 0 \\
 \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} p' \right) &= c^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} \rho' \right) \quad (11.1)
 \end{aligned}$$

où $\underline{u}(\underline{x}, t)$ est la vitesse, $\rho'(\underline{x}, t)$ la masse volumique, $p'(\underline{x}, t)$ la pression, $s'(\underline{x}, t)$ l'entropie et $c^2(\rho', s') = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \right)_s$ la dérivée partielle de la loi d'état $p' = \mathcal{P}(\rho', s')$ à entropie constante.

Ondes sonores

On pose $\rho'(\underline{x}, t) = \rho_0 + \rho(\underline{x}, t)$, $p'(\underline{x}, t) = p_0 + p(\underline{x}, t)$, $s'(\underline{x}, t) = s_0 + s(\underline{x}, t)$ et on suppose que ρ/ρ_0 , p/p_0 et s/s_0 sont petits devant 1 et du même ordre de

grandeur. À l'ordre dominant, les équations s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div} \underline{u}, & \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= 0 & \text{et} & \frac{\partial}{\partial t} (p - c_0^2 \rho) = 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

avec $c_0^2 = c^2(\rho_0, s_0)$. On en déduit $\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \underline{u}) = 0$. Comme à l'état de repos on a $\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{0}$, $s = 0$ et $p = c_0^2 \rho$, ces trois égalités restent valides pour l'état perturbé. L'écoulement est donc potentiel ($\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{0}$) et l'on peut écrire $\underline{u} = \operatorname{grad} \phi$. Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\underline{u} = \operatorname{grad} \phi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \underline{u}, \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p \quad \text{et} \quad p = c_0 \rho. \quad (11.3)$$

En éliminant p et ϕ , ce système se met sous la forme

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta \phi = 0. \quad (11.4)$$

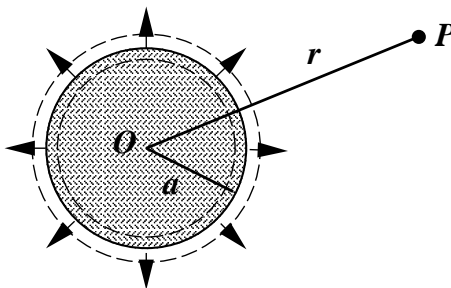
La quantité c_0 est donc la vitesse de propagation des ondes sonores. On montre que les équations du mouvement entraînent

$$\frac{\partial w_a}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{I} = 0 \quad (11.5)$$

où $w_a = \rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}$ est l'énergie acoustique et $\underline{I} = p \underline{u}$ son flux.

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Sphère pulsant avec une vitesse radiale quelconque



On considère une sphère de rayon moyen a centrée en O pulsant avec une vitesse radiale $u_s(t)$. On suppose que u_s est très petit devant la vitesse du

son c_0 . On suppose que ce mouvement donne naissance à un écoulement sonore de potentiel ϕ et de pression $p_0 + p$. On note ρ_0 la densité du fluide parfait qui entoure la sphère.

- 1) Montrer que la linéarisation des équations locales (fluide parfait) conduit à la résolution du problème $\frac{\partial^2}{\partial t^2} p - c_0^2 \Delta p = 0$ avec les conditions aux limites $\frac{\partial p}{\partial r}(a, t) = -\rho_0 u'_s(t)$.

Comme $\underline{V} = 0$ (vitesse moyenne), les équations à résoudre sont $\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \underline{U} = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p$ avec $p = c_0^2 \rho$ et $\underline{u} = \operatorname{grad} \phi$. On en déduit le système $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \underline{u} = -\rho_0 c_0^2 \Delta \phi$ et $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \phi = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p$. Cette dernière équation entraîne $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} p$ en ajustant convenablement la constante d'intégration. On en déduit $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta p = 0$. Les conditions aux limites sont $\underline{u} \cdot \underline{e}_r = u_s$ pour $r = a$. On en déduit donc $\underline{u} \cdot \underline{e}_r = \operatorname{grad} \phi \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_s$ pour $r = a$. En dérivant par rapport à t , on obtient $\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial t} = u'_s$, ce qui permet d'écrire la condition aux limites sous la forme $\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_0 u'_s(t)$ pour $r = a$.

- 2) Montrer que les solutions sont de la forme $p(\underline{x}, t) = p(r, t)$ avec $\frac{\partial^2}{\partial t^2} p - c_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = 0$. En supposant qu'il n'y a pas d'autres sources sonores que la sphère, en déduire que les solutions sont de la forme $p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0} - t_0\right)$, où t_0 est une constante arbitraire.

La symétrie sphérique des équations entraîne $p(\underline{x}, t) = p(r, t)$. Comme $\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp)$, on a $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = 0$, ce qui s'écrit $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (rp) = 0$. On a donc $rp = F\left(t - \frac{r}{c_0}\right) + G\left(t + \frac{r}{c_0}\right)$. Comme il n'y a pas de sources autres que la sphère, on a $G \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$, ce qui entraîne $G = 0$. On peut alors écrire $p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_0} - t_0\right)$.

- 3) On choisit $t_0 = \frac{a}{c_0}$ afin de simplifier l'écriture. On a donc $p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)$. Montrer que les conditions aux limites entraînent alors $f'(t) + \frac{c_0}{a} f(t) = a c_0 \rho_0 u'_s(t)$.

Si $t_0 = \frac{a}{c_0}$, on a donc $p(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)$. Les conditions aux limites en $r = a$ s'écrivent $\frac{\partial p}{\partial r}(a, t) = -\frac{1}{a^2} f(t) - \frac{1}{ac_0} f'(t) = -\rho_0 u'_s(t)$. On en déduit donc la relation $f'(t) + \frac{c_0}{a} f(t) = a c_0 \rho_0 u'_s(t)$.

- 4) Montrer que l'on a

$$f(t) = \rho_0 c_0^2 a \left[\frac{u_s(t)}{c_0} - e^{-\frac{c_0}{a} t} \int_{-\infty}^t e^{\frac{c_0}{a} \tau} \frac{u_s(\tau)}{a} d\tau \right] + C_* e^{-\frac{c_0}{a} t}. \quad (11.6)$$

1. SPHÈRE PULSANT AVEC UNE VITESSE RADIALE QUELCONQUE 117

En interprétant C_* comme étant l'intensité d'un transitoire, on suppose désormais que $C_* = 0$.

Pour résoudre cette équation différentielle ordinaire, on considère d'abord l'équation homogène $f' + \frac{c_0}{a} f(t) = 0$, ce qui conduit à la solution homogène $f(t) = C \exp(-\frac{c_0}{a} t)$. Par variation de la constante, on pose $f(t) = C(t) \exp(-\frac{c_0}{a} t)$, ce qui conduit à $C'(t) \exp(-\frac{c_0}{a} t) = a c_0 \rho_0 u'_s(t)$. On en déduit

$$\begin{aligned} C(t) &= a c_0 \rho_0 \int_{-\infty}^t u'_s(\tau) \exp\left(\frac{c_0}{a} \tau\right) d\tau + C_* \\ &= a c_0 \rho_0 \left[u_s(t) \exp\left(\frac{c_0}{a} t\right) \right]_{-\infty}^t - a c_0 \rho_0 \int_{-\infty}^t u_s(\tau) \frac{c_0}{a} \exp\left(\frac{c_0}{a} \tau\right) d\tau + C_* . \end{aligned}$$

D'où $f(t) = a c_0 \rho_0 u_s(t) - c_0 \rho_0 \exp(-\frac{c_0}{a} t) \int_{-\infty}^t u_s(\tau) \exp(\frac{c_0}{a} \tau) d\tau + C_* \exp(-\frac{c_0}{a} t)$. Le terme $C_* \exp(-\frac{c_0}{a} t)$ représente un transitoire. Pour simplifier, on suppose $C_* = 0$.

5) En déduire l'expression finale

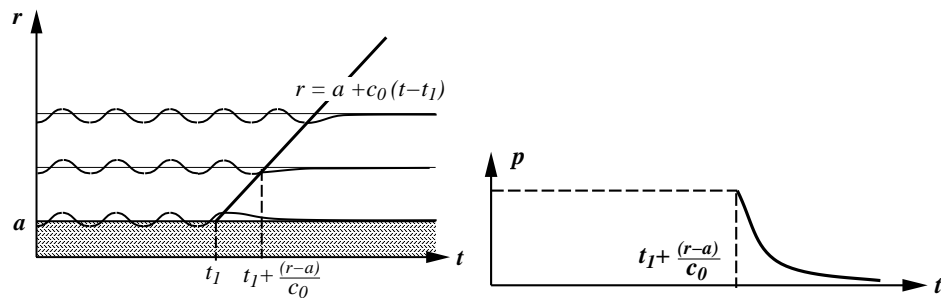
$$p(r, t) = \rho_0 c_0^2 \frac{a}{r} \left[\frac{u_s\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)}{c_0} - e^{-\frac{c_0}{a} \left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)} \int_{-\infty}^{\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)} e^{\frac{c_0}{a} \tau} \frac{u_s(\tau)}{a} d\tau \right] .$$

On en déduit donc

$$p(r, t) = \rho_0 c_0^2 \frac{a}{r} \left[\frac{1}{c_0} u_s\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right) - e^{-\frac{c_0}{a} \left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)} \int_{-\infty}^{\left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)} e^{\frac{c_0}{a} \tau} \frac{u_s(\tau)}{a} d\tau \right]$$

6) Que se passe-t-il si $u_s(t) = 0$ après un temps t_1 ? Représenter graphiquement cette solution dans un plan (t, r) .

On suppose que $u_s(t) = 0$ pour $t \geq t_1$. Si $r \geq a + c_0(t - t_1)$, alors $t - \frac{r-a}{c_0} \leq t_1$ et seuls les $u_s(\tau)$ avec $\tau \leq t_1$ contribuent à l'intégrale dans l'expression de p . L'information $u_s(t) = 0$ n'est pas encore arrivée en un tel point. Si $r \leq a + c_0(t - t_1)$, on obtient $p(r, t) = -\rho_0 c_0^2 \frac{B}{r} \exp\left[-\frac{c_0}{a} \left(t - \frac{r-a}{c_0}\right)\right]$ en notant $B = \int_{-\infty}^{t_1} u_s(\tau) \exp\left(\frac{c_0}{a} \tau\right) d\tau$ (c'est une constante). Cette solution représente un amortissement exponentiel.



2 Pulsation harmonique de la sphère

On suppose maintenant que $u_s = \operatorname{Re} [u_0 \exp(-i\omega t)]$ avec $u_0 \in \mathcal{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

7) Montrer que pour cette vibration on a $f = \operatorname{Re} (\tilde{f})$ avec

$$\tilde{f}(t) = \rho_0 c_0 a u_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{-i\omega a}{c_0 - i\omega a} \right). \quad (11.7)$$

On pose $\tilde{u}_s(t) = u_0 e^{-i\omega t}$. Comme l'équation est linéaire, on calcule $\tilde{p}(r, t) \in \mathcal{C}$ à l'aide de l'expression précédente en remplaçant $u_s(t) \in \mathbb{R}$ par $\tilde{u}_s(t) \in \mathcal{C}$. On a donc $\tilde{p}(r, t) = \frac{1}{r} \tilde{f} \left(t - \frac{r-a}{c_0} \right)$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \rho_0 c_0^2 a \left[\frac{u_0}{c_0} e^{-i\omega t} - e^{-\frac{c_0}{a} t} \int_{-\infty}^t e^{\frac{c_0}{a} \tau} \frac{u_0}{a} e^{-i\omega \tau} d\tau \right] \\ &= \rho_0 c_0^2 a \left\{ \frac{u_0}{c_0} e^{-i\omega t} - e^{-\frac{c_0}{a} t} \frac{u_0}{a} \left[\frac{e^{(\frac{c_0}{a} - i\omega) \tau}}{\frac{c_0}{a} - i\omega} \right]_{-\infty}^t \right\} \\ &= \rho_0 c_0 a u_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{i\omega a}{c_0}} \right) = \rho_0 c_0 a u_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{-i\omega a}{c_0 - i\omega a} \right). \end{aligned} \quad (11.8)$$

8) En notant $k = \frac{\omega}{c_0}$ montrer que l'on a $p = \operatorname{Re} (\tilde{p})$ avec

$$\begin{aligned} \tilde{p}(r, t) &= \rho_0 c_0 \frac{a}{r} u_0 \left(\frac{i k a}{i k a - 1} \right) e^{-i\omega \left(t - \frac{r-a}{c_0} \right)} \\ &= \rho_0 c_0 \frac{a}{r} u_0 \left(\frac{i k a}{i k a - 1} \right) e^{i[k(r-a) - \omega t]}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

En notant $k = \frac{\omega}{c_0}$ (ce qui implique $\omega = kc_0$), on a finalement

$$\tilde{p}(r, t) = \rho_0 c_0 u_0 \frac{a}{r} \frac{i k a}{i k a - 1} e^{-i\omega \left(t - \frac{r-a}{c_0} \right)} = \rho_0 c_0 u_0 \frac{a}{r} \frac{i k a}{i k a - 1} e^{i k (r-a) - i\omega t} \quad (11.10)$$

9) On veut retrouver cette expression par une autre méthode, appelée "traitement harmonique", qui consiste à poser

$$p = \operatorname{Re} \left[p^\omega(\underline{x}) e^{-i\omega t} \right]. \quad (11.11)$$

Montrer que l'on doit résoudre $\Delta p^\omega + k^2 p^\omega = 0$ avec $k = \frac{\omega}{c_0}$, et les conditions aux limites $\frac{\partial}{\partial r} p^\omega(a, t) = \rho_0 i \omega u_0$.

En reportant $\tilde{p} = p^\omega e^{-i\omega t}$ dans l'équation $\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \tilde{p} = 0$, on obtient $\omega^2 p^\omega + c_0^2 \Delta p^\omega = 0$, ce qui s'écrit aussi $k^2 p^\omega + \Delta p^\omega = 0$ avec $k = \omega/c_0$. Les conditions aux limites en $r = a$ s'écrivent $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}(a, t) = -\rho_0 \tilde{u}'_s$, ce qui entraîne $\frac{\partial p^\omega}{\partial r}(a) = \rho_0 i \omega u_0$.

10) En déduire que $p^\omega(\underline{x}) = p^\omega(r)$ et que l'on a

$$p^\omega(r) = \rho_0 c_0 u_0 \frac{a}{r} \frac{ik a}{ika - 1} e^{ik(r-a)}. \quad (11.12)$$

Comparer avec le résultat déjà obtenu pour \tilde{p} .

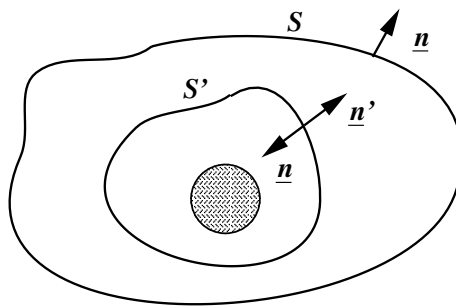
Cherchons des solutions de la forme $p^\omega(r) = A \frac{e^{ikr}}{r}$. Pour $r > 0$, le laplacien de cette expression s'écrit $\Delta p^\omega(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p^\omega) = \frac{1}{r} A (ik)^2 e^{ikr} = -k^2 p^\omega$. L'équation d'Helmoltz est donc vérifiée pour tout $r > 0$. L'application des conditions aux limites à cette solution s'écrit $\frac{\partial p^\omega}{\partial r} = -\frac{A}{a^2} e^{ika} + \frac{A}{a} (ik) e^{ika} = +\frac{A}{a^2} (ika - 1) e^{ika} = \rho_0 i \omega u_0$. D'où $A = \rho_0 i \omega u_0 a^2 \frac{e^{-ika}}{ika - 1} = \rho_0 c_0 u_0 a \frac{ika}{ika - 1} e^{-ika}$. Ceci conduit à l'expression déjà trouvée $\tilde{p}(r, t) = \rho_0 c_0 u_0 \frac{a}{r} \frac{ika}{ika - 1} e^{ik(r-a) - i\omega t}$.

11) Montrer que l'on a $\frac{\partial p^\omega}{\partial r} p^\omega = -\frac{p^\omega}{r} + ik p^\omega$. En déduire que cette solution vérifie bien la condition de rayonnement de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial p^\omega}{\partial r} - ik p^\omega \right) \right] = 0. \quad (11.13)$$

La dérivée de p^ω par rapport à r s'écrit $\frac{\partial p^\omega}{\partial r} = \frac{A}{r^2} (ikr - 1) e^{ikr} = \frac{1}{r} p^\omega (ikr - 1)$. On en déduit que $\frac{\partial p^\omega}{\partial r} - ik p^\omega = -\frac{p^\omega}{r}$ et $r \left(\frac{\partial p^\omega}{\partial r} - ik p^\omega \right) = -p^\omega = -\frac{A}{r} e^{ikr}$. On a donc bien $\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r \left(\frac{\partial p^\omega}{\partial r} - ik p^\omega \right) \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} |p^\omega| = 0$.

12) On définit la puissance acoustique \bar{P} d'une source harmonique comme la moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega$ de la puissance acoustique instantanée $P_S(t) = \int_S \underline{I} \cdot \underline{n} da$ d'un domaine S entourant cette source, avec $\underline{I} = p \underline{u}$. Montrer que cette définition ne dépend pas du choix d'un tel domaine.



Soit S' une autre surface entourant la source. On note \mathcal{D} le domaine compris entre S et S' . On peut écrire la différence de puissance $P_S(t) - P_{S'}(t) = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{I} \cdot \underline{n} da = \int_S \underline{I} \cdot \underline{n} da - \int_{S'} \underline{I} \cdot \underline{n}' da$ où $\underline{n}' = -\underline{n}$ est la normale orientée vers l'intérieur du domaine \mathcal{D} . Par ailleurs, on peut écrire $\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} w_a d\Omega + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{I} \cdot \underline{n} da = 0$ où l'énergie acoustique volumique est définie par $w_a = \rho_0 \frac{u_a^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}$. On en déduit donc $P_S(t) - P_{S'}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} w_a(\underline{x}, t) d\Omega$ où \mathcal{D} est un domaine fixe. En moyennant sur une période, on voit que $\overline{P}_{S'} = \overline{P}_S =: \overline{P}$ est indépendant de S .

- 13) On définit $\tilde{\underline{u}}$ par $\underline{u} = \text{Re}(\tilde{\underline{u}})$ et $\tilde{\phi}$ par $\phi = \text{Re}(\tilde{\phi})$. On note alors $\tilde{\underline{u}} = \underline{u}^\omega e^{-i\omega t}$ et $\tilde{\phi} = \phi^\omega e^{-i\omega t}$. Montrer que $p^\omega = \rho_0 i \omega \phi^\omega$.

Comme $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \tilde{p}$, on a $p^\omega = \rho_0 i \omega \phi^\omega$.

- 14) Montrer que $\overline{P} = \frac{1}{4} \int_S (p^\omega \underline{u}^{\omega*} + p^{\omega*} \underline{u}^\omega) \cdot \underline{n} da$ où $p^{\omega*}$ et $\underline{u}^{\omega*}$ désignent les conjugués de p^ω et \underline{u}^ω .

On a

$$\begin{aligned} \underline{I} &= p \underline{u} = \frac{1}{4} (p^\omega e^{i\omega t} + p^{\omega*} e^{-i\omega t}) (\underline{u}^\omega e^{i\omega t} + \underline{u}^{\omega*} e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4} (p^\omega \underline{u}^{\omega*} + p^{\omega*} \underline{u}^\omega) + \frac{1}{4} p^\omega \underline{u}^\omega e^{2i\omega t} + \frac{1}{4} p^{\omega*} \underline{u}^{\omega*} e^{-2i\omega t}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

On en déduit $\overline{P} = \overline{P}_s(t) = \int_S \overline{p \underline{u}} \cdot \underline{n} da = \frac{1}{4} \int_S (p^\omega \underline{u}^{\omega*} + p^{\omega*} \underline{u}^\omega) \cdot \underline{n} da$

- 15) On choisit pour S la sphère S_r de centre O et de rayon $r > a$ pour calculer la puissance acoustique émise par la sphère pulsante de rayon a . Avant de calculer cette puissance, montrer que $\underline{u}^\omega \cdot \underline{e}_r = \frac{1}{i\omega\rho_0} p^\omega \left(-\frac{1}{r} + ik\right)$.

Comme $\underline{u}^\omega = \underline{\text{grad}} \phi^\omega$, on a $\underline{u}^\omega \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial \phi^\omega}{\partial r} = \frac{1}{\rho_0 i \omega} \frac{\partial p^\omega}{\partial r} = \frac{1}{i\omega\rho_0} p^\omega \left(-\frac{1}{r} + ik\right)$.

- 16) En déduire que

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2} (4\pi a^2) \quad (11.15)$$

Quelle est la puissance acoustique émise par unité de surface de la sphère ?

On a $p^\omega \underline{u}^{\omega*} \cdot \underline{e}_r + p^{\omega*} \underline{u}^\omega \cdot \underline{e}_r = |p^\omega|^2 \left[\frac{1}{i\omega\rho_0} \left(-\frac{1}{r} + ik\right) - \frac{1}{i\omega\rho_0} \left(-\frac{1}{r} - ik\right) \right] = 2\frac{k}{\omega\rho_0} |p^\omega|^2 = \frac{2}{\rho_0 c_0} |p^\omega|^2$ car $\omega = kc_0$.
 Comme $p^\omega = A \frac{e^{ikr}}{r} = \rho_0 c_0 u_0 \frac{a}{r} \frac{ika}{ika-1} e^{ik(r-a)}$, on a $|p^\omega|^2 = \rho_0^2 c_0^2 |u_0|^2 \frac{a^2}{r^2} \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2}$.
 D'où $\overline{P} = \frac{1}{4} \int_{S_r} \frac{2}{\rho_0 c_0} \rho_0^2 c_0^2 |u_0|^2 \frac{a^2}{r^2} \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2} da = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2} \int_{S_r} \frac{da}{r^2}$
 $= \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2} (4\pi a^2)$.
 La puissance émise par unité de surface est donc $\frac{\overline{P}}{4\pi a^2} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2}$.

- 17) Montrer que dans le cas limite $ka \gg 1$ la puissance par unité de surface $\frac{\overline{P}}{4\pi a^2} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2$ est celle émise par une plaque vibrante.

La quantité $\frac{\overline{P}}{4\pi a^2} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 \frac{k^2 a^2}{1+k^2 a^2}$ est la puissance acoustique émise par unité de surface de la sphère. On a $\frac{\overline{P}}{4\pi a^2} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2$ pour $ka \gg 1$. C'est la limite où la sphère est vue comme une plaque vibrante.

- 18) On considère le cas limite $ka \ll 1$ en supposant que $(u_0 \frac{\omega}{c_0} a^2)$ reste d'ordre 1. Montrer que $p^\omega(r) = M_0 G(r)$ où $M_0 = 4i\pi\rho_0(u_0 \omega a^2)$ avec $G(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$. On admette que $G(r)$ est solution de l'équation $\Delta G + k^2 G = \delta$ (fonction de Green de l'équation d'Helmoltz 3D). Montrer que $\overline{P} = \frac{1}{8\pi\rho_0 c_0} |M_0|^2$ et comparer avec l'expression $\overline{P} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} \frac{|p^\omega|^2}{2\rho_0 c_0} da$. Justifier le terme de "source ponctuelle d'intensité M_0 " pour qualifier cette limite.

Dans la limite $ka \ll 1$, on peut écrire $p^\omega(r) = -i\rho_0 u_0 k c_0 a^2 \frac{e^{ikr}}{r}$. On peut aussi écrire $p^\omega(r) = M_0 G(r)$ avec $M_0 = 4i\pi\rho_0(u_0 \omega a^2) = 4i\pi\rho_0(u_0 k c_0 a^2)$ et $G(r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$. Dans la limite $ka \ll 0$, on a $\overline{P} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 |u_0|^2 k^2 a^2 (4\pi a^2) = \frac{1}{4\pi\rho_0 c_0} \frac{1}{2} \rho_0^2 |u_0|^2 \omega^2 a^4 (4\pi)^2 = \frac{1}{8\pi\rho_0 c_0} |M_0|^2$. Comme $ka \rightarrow 0$ avec $(u_0 \omega a^2)$ d'ordre 1, et donc M_0 et \overline{P} d'ordre 1, on peut parler d'une source ponctuelle d'amplitude M_0 et de puissance \overline{P} .

PCM 12

Propagation du son dans un milieu réactif

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Propagation du son dans un milieu réactif
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-fhpc1 (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	Équations d'Euler Réaction chimique, propagation du son

RÉSUMÉ

Cette “Petite Classe” s’intéresse à la propagation d’une onde sonore dans un fluide en présence d’une réaction chimique.

NOTATIONS

$A \cdot B$ Produit contracté des tenseurs A et B

\underline{a}	Vecteur quelconque
\underline{A}	Vecteur Flux rentrant
$\underline{\underline{A}}$	Tenseur d'ordre 2
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
$a_i b_i$	Sommation avec la convention d'Einstein := $\underline{a} \cdot \underline{b}$
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$	Produit contracté de $\underline{\underline{A}}$ et \underline{b}
$A_{ij} b_j = C_i$	Sommation avec la convention d'Einstein : $\underline{C} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$
$\underline{A} \cdot \underline{B}$	Produit contracté de tenseurs d'ordre 2
$A_{ik} B_{kj} = C_{ij}$	Sommation avec la convention d'Einstein : $\underline{C} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{B}$
$\underline{\underline{C}} = \underline{A} \otimes \underline{B}$	Produit tensoriel de vecteurs : $A_i B_j = C_{ij}$
$c(\rho, s)$	Vitesse du son (m s ⁻¹)
$\text{div } \underline{A}$	Divergence de \underline{A} : $= A_{i,i}$
$\text{div } \underline{\underline{A}} = \underline{C}$	Divergence de $\underline{\underline{A}}$ de composante $C_i = A_{ij,j}$
\mathcal{D}	Domaine quelconque
$\partial\mathcal{D}$	Frontière de \mathcal{D}
da	Élément d'intégration surfacique (m ²)
$d\Omega$	Élément d'intégration volumique (m ³)
e	Énergie interne spécifique (J kg ⁻¹)
$\mathcal{E}(\rho, s)$	Loi d'état de l'énergie interne (J kg ⁻¹)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de base (m)
\underline{F}	Densité volumique des forces extérieurs (N m ⁻³)
$F(\underline{x}, t)$	Champ quelconque
$\underline{\underline{I}}$	Identité : $I_{ij} = \delta_{ij}$
\underline{n}	Vecteur unitaire normal sortant (m)
p	Champ de pression (Pa)
$\mathcal{P}(\rho, s)$	Loi d'état de la pression (Pa)
P_F	Production volumique de F
\underline{q}	Vecteur flux de chaleur (W m ⁻³)
r_c	Production volumique de chaleur (W m ⁻³)
s	Entropie spécifique (J °K kg ⁻¹)
t	Temps (s)
$\underline{U}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s ⁻¹)
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)
$\frac{\delta}{\delta t}$	Opérateur dérivée pour un domaine fixe (s ⁻¹)
ρ	Masse volumique (kg m ⁻³)
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur des contraintes (Pa)
$\underline{\underline{\tau}}$	Tenseur des contraintes visqueuses (Pa)

ÉLÉMENTS DE COURS

Rappel des équations de bilan

On rappelle ici les bilans locaux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour un mélange fluide qui s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{U}) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{U}) + \operatorname{div}(\rho \underline{U} \otimes \underline{U} + p \underline{I} - \underline{\tau}) = \rho \underline{F}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) \underline{U} + p \underline{U} - \underline{\tau} \cdot \underline{U} + \underline{q} \right] = \rho \underline{F} \cdot \underline{U} + r_c$$

On montre que dans le système des trois bilans locaux, on peut remplacer, de manière équivalente, le bilan d'énergie par l'un des trois bilans locaux suivants

$$\begin{aligned} (a) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) &= -\operatorname{div}(p \underline{U}) + \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \operatorname{div} \underline{q} + r_c + \rho \underline{F} \cdot \underline{U} \\ (b) \quad \rho \frac{de}{dt} &= -p \operatorname{div} \underline{U} + \underline{\tau} : \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} - \operatorname{div} \underline{q} + r_c \\ (c) \quad \rho \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \operatorname{div} \underline{q} + r_c + \rho \underline{F} \cdot \underline{U}, \end{aligned}$$

où $H = \frac{1}{2} \underline{U}^2 + e + \frac{p}{\rho}$ est l'enthalpie totale.

En effet, en utilisant la loi de conservation de la masse, on peut transformer la forme conservative de l'équation de bilan de l'énergie sous la forme de l'équation (a). On peut transformer de même l'équation de bilan de la quantité de mouvement sous la forme $\rho \frac{d}{dt} \underline{U} = -\underline{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div} \underline{\tau} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U}$ que l'on peut alors multiplier par \underline{U} pour obtenir $\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \underline{U}^2 = -\underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} p + \underline{U} \cdot \operatorname{div} \underline{\tau} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U} = \operatorname{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{U}) - \underline{\tau} : \underline{\operatorname{grad}} \underline{U} + \rho \underline{F} \cdot \underline{U}$. En retranchant cette équation à la relation (a), on obtient la relation (b). En utilisant la loi de conservation de la masse, on peut écrire $\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} p + p \operatorname{div} \underline{U}$. En ajoutant cette équation à l'équation (b) et en utilisant la relation $\operatorname{div}(p \underline{U}) = p \operatorname{div} \underline{U} + \underline{U} \cdot \underline{\operatorname{grad}} p$, on obtient l'équation (c).

Cas d'un fluide parfait : équations d'Euler

On considère maintenant le cas d'un fluide non visqueux ($\underline{\tau} = \underline{0}$), non conducteur de la chaleur ($\underline{q} = \underline{0}$), en l'absence de forces massiques extérieures ($\underline{F} = \underline{0}$) ou de forçage thermique extérieur ($r_c = 0$). Le système des trois équations de bilan (masse, quantité de mouvement et énergie) est alors constitué des deux équations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \frac{d}{dt} \underline{U} = -\underline{\operatorname{grad}} p$$

complétées par l'une des trois équations suivantes

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) = -\operatorname{div} (p \underline{U}) \\
 (b) \quad & \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} \quad \text{ou} \\
 (c) \quad & \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} .
 \end{aligned}$$

Étant données les lois d'état $p = \mathcal{P}(s, \rho)$ et $e = \mathcal{E}(s, \rho)$, la relation de Gibbs-Duhem $de = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ équivaut à relation $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}(s, \rho) = \frac{1}{\rho^2} \mathcal{P}(s, \rho)$. Une contrainte supplémentaire dans le choix de \mathcal{P} et \mathcal{E} est donnée par l'inégalité $c^2(s, \rho) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}(s, \rho) > 0$. Les deux autres relations de Weyl sont $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \tau^2}\right)_s > 0$ avec $\tau = 1/\rho$ et $\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}\right)_\rho > 0$.

On montre que les trois bilans locaux et les deux lois d'état conduisent au système formé des quatre équations

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \rho \frac{d}{dt} \underline{U} = -\operatorname{grad} p, \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

avec $c^2 = c^2(s, \rho)$, complétées par l'une des trois équations suivantes

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) = -\operatorname{div} (p \underline{U}) \quad \text{avec} \quad e = e(s, \rho) \\
 (b) \quad & \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U} \quad \text{avec} \quad e = e(s, \rho) \\
 \text{ou} \quad (c) \quad & \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{avec} \quad H = \frac{1}{2} \underline{U}^2 + h(s, \rho) .
 \end{aligned}$$

En effet, dans le cas $\underline{\tau} = \underline{0}$, $\underline{q} = \underline{0}$ et $r_c = 0$, l'équation (b) devient $\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$. En utilisant la loi de conservation de la masse $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \underline{U}$, la relation de Gibbs-Duhem entraîne $\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \underline{U}$. On en déduit donc que $\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \underline{U} = 0$. Il en découle alors que $\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}$.

Pour chacune des formulations, la donnée des deux fonctions $[c^2(s, \rho), e(s, \rho)]$ ou $[c^2(s, \rho), h(s, \rho)]$ est nécessaire pour compléter le système.

ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Ondes émises par un piston

On considère un fluide non visqueux, non conducteur de la chaleur, en l'absence de forces massiques extérieures et au repos à l'instant initial. Ce fluide est

ensuite animé d'un écoulement de perturbation.

- 1) En supposant que $\underline{U} = \epsilon \underline{u} = \epsilon \text{grad } \phi$ et en utilisant les notations $p = p_0 + \epsilon p_1$, $\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1$, etc., montrer que les équations linéarisées de l'acoustique sont constituées des quatre équations

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \Delta \phi = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p_1, \quad \frac{\partial s_1}{\partial t} = 0, \quad p_1 = c_0^2 \rho_1 \quad (12.1)$$

complétées par l'une des équations

$$(a) \quad \rho_0 \frac{\partial e_1}{\partial t} = -p_0 \Delta \phi, \quad (b) \quad e_1 = \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 \quad \text{ou} \quad (c) \quad \rho_0 H_1 = p_1 .$$

| Il suffit de linéariser le système des équations d'Euler.

- 2) On considère l'écoulement de perturbation induit par un piston dont le mouvement est décrit par l'équation $x = a \sin \omega t$. Montrer que $p_1 = \pm a \rho_0 c_0 \omega \cos(kx \mp \omega t)$ pour $\pm x > 0$ avec $k = \omega/c_0$. En déduire que $\phi = a c_0 \sin[kx \mp \omega t]$ et $u = a \omega \cos[kx \mp \omega t]$ pour $\pm x > 0$.

| En éliminant ϕ , le système à résoudre s'écrit $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p_1 = 0$ avec la condition aux limites $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = u_0(t)$. Comme $\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p_1$, cette condition aux limites s'écrit $\frac{\partial p_1}{\partial x}(0, t) = -\rho_0 u_0'(t) = a \rho_0 \omega^2 \sin \omega t$. On en déduit la solution.

Modélisation d'une réaction chimique

On considère la réaction chimique réversible $\sum_{i=1}^N \nu_i A_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^N \nu'_i A_i$. On note \mathcal{M}_i la masse volumique du constituant chimique A_i . On rappelle les notations $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$, $Y_i = \rho_i/\rho$ (titre massique), $\underline{U} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i \underline{U}_i = \sum_{i=1}^N Y_i \underline{U}_i$, $p = \sum_{i=1}^N p_i$, $e = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i e_i$, $h = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i h_i$ et $s = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^N \rho_i s_i$, ainsi que les équations

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{U} = 0, \quad \rho \frac{d}{dt} \underline{U} = -\text{grad } p$$

et (a) $\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \underline{U}^2 \right) = -\text{div } (p \underline{U})$, (12.2)

l'équation (a) pouvant être remplacée par les variantes (b) et (c) établies dans le cas homogène.

- 3) On note X le nombre de mûles produites par la réaction pour une particule de masse m et pour un constituant chimique réel ou virtuel dont les

coefficients stochiométriques sont ou seraient $\nu' = 1$ et $\nu = 0$. On définit le degré d'avancement massique par la relation $\xi = X/m$. Montrer que l'on peut écrire

$$dY_i = (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i d\xi . \quad (12.3)$$

On considère la particule de masse $m = \sum_i m_i$ où m_i est la masse du constituant A_i . D'après la définition, on peut écrire $dm_i = (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i dX$. Comme on a par ailleurs $m_i = m Y_i$, on peut écrire $Y_i = (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i \frac{X}{m} = (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i \xi$. La relation différentielle en découle immédiatement.

- 4) On suppose que la loi d'état est une fonction $e = \mathcal{E}(s, \rho, Y_i)$ vérifiant la relation de Gibbs-Duhem $de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \sum_i \mu_i dY_i$ où μ_i est le potentiel chimique du constituant i . En définissant l'affinité chimique A par la relation $A = \sum_i \mu_i (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i$, montrer que l'écriture de la loi d'état sous la forme $e = \mathcal{E}(s, \rho, \xi)$ entraîne la relation $de = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho + A d\xi$.

Il suffit de remplacer la relation $dY_i = (\nu'_i - \nu_i) \mathcal{M}_i d\xi$ dans la relation de Gibbs-Duhem.

On choisit d'énoncer la loi d'état pour la pression sous deux formes équivalentes $p = \mathcal{P}_f(s, \rho, \xi)$ et $p = \mathcal{P}_e(s, \rho, A)$. Les formes différentielles de ces deux lois d'état s'écrivent respectivement

$$dp = \lambda_f ds + c_f^2 d\rho + a d\xi \quad \text{et} \quad dp = \lambda_e ds + c_e^2 d\rho + b dA \quad (12.4)$$

où (λ_f, c_f^2, a) et (λ_e, c_e^2, b) sont respectivement des fonctions de (s, ρ, ξ) et (s, ρ, A) .

- 5) On note (s_0, ρ_0, ξ_0) les valeurs de l'entropie massique, de la densité et du degré d'avancement massique à l'équilibre. On admet qu'au voisinage de l'équilibre on peut écrire $\frac{d\xi}{dt} = \frac{LA}{T}$ où (L, T, A) sont des fonctions de (s, ρ, ξ_0) . Montrer que l'on a $A(s_0, \rho_0, \xi_0) = 0$

Comme $\xi = \xi_0$ à l'équilibre, on a $\frac{d\xi}{dt} = 0$ ce qui entraîne $A_0 = 0$ à l'équilibre à cause de l'hypothèse $\frac{d\xi}{dt} = \frac{LA}{T}$.

Propagation du son au voisinage de l'équilibre

- 6) Montrer que la modélisation de la réaction chimique se traduit par le système d'équations constitué des relations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \rho \frac{d}{dt} \underline{U} = -\operatorname{grad} p \quad (12.5)$$

complétées par l'une des trois équations suivantes

$$(a) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underline{U}^2 + e \right) = -\operatorname{div} (p \underline{U}) \quad (b) \quad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{U}$$

ou (c) $\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$,

complétées par la relation de Gibbs-Duhem

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + A \frac{d\xi}{dt},$$

complétées par l'une des deux équations suivantes

$$(f) \quad \frac{dp}{dt} = \lambda_f \frac{ds}{dt} + c_f^2 \frac{d\rho}{dt} + a \frac{d\xi}{dt} \quad \text{ou} \quad (e) \quad \frac{dp}{dt} = \lambda_e \frac{ds}{dt} + c_e^2 \frac{d\rho}{dt} + b \frac{dA}{dt}$$

et complétées enfin par la relation (valable au voisinage de l'équilibre)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{L A}{T}. \quad (12.6)$$

Ces équations découlent des trois équations de bilan (masse, quantité de mouvement et énergie), des deux lois d'état (énergie interne et pression) et de la cinétique chimique. Plusieurs variantes dans la formulation de ces équations sont proposées ici.

7) Montrer que ce système d'équations est équivalent au système

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{U} = 0, \quad \rho \frac{d\underline{U}}{dt} = -\operatorname{grad} p, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{A}{T} \frac{d\xi}{dt}, \quad (12.7)$$

complétées par les équations suivantes

$$\rho \frac{de}{dt} = (a), (b) \text{ ou } (c), \quad \frac{dp}{dt} = (f) \text{ ou } (e) \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{L A}{T}. \quad (12.8)$$

Comme dans le cas homogène, la combinaison de l'équation de bilan de l'énergie et de la relation de Gibbs-Duhem permet d'obtenir une expression simple pour $\frac{ds}{dt}$.

8) On considère maintenant un écoulement de perturbation au voisinage de l'équilibre avec $\underline{U} = \epsilon \underline{u}$ et on note $p = p_0 + \epsilon p_1$, $\rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1$, etc. Montrer que le système d'équations s'écrit alors

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad \rho_0 \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p_1, \quad \frac{\partial s_1}{\partial t} = 0, \quad (12.9)$$

complétées par les équations suivantes

$$e_1 = \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho_1 \quad (f) \quad p_1 = c_{f0}^2 \rho_1 + a_0 \xi_1 \quad \text{ou} \quad (e) \quad p_1 = c_{e0}^2 \rho_1 + b_0 A_1$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{L_0}{T_0} A_1 \quad (\mathbf{12.10})$$

Interpréter les vitesses du son c_{f0} et c_{e0} . On suppose désormais que $a_0 b_0 < 0$.

Les équations sont l'ordre dominant du développement en ϵ . La vitesse du son c_{f0} est celle obtenue lorsque l'on fixe le degré d'avancement ξ à la valeur $\xi = \xi_0$ alors que l'affinité A peut fluctuer : la réaction chimique est figée mais le point d'équilibre peut fluctuer. La vitesse du son c_{e0} est celle obtenue lorsque l'on fixe l'affinité A à la valeur $A = 0$ de l'équilibre alors que le degré d'avancement ξ peut fluctuer : la réaction chimique est à l'équilibre.

- 9) On suppose que la réaction s'effectue à volume constant, ce qui revient à imposer $\rho_1 = 0$. Montrer que l'on a $\xi_1(t) = \xi_1(0) \exp(-t/\tau_{v0})$ avec $\tau_{v0} = -\frac{T_0 b_0}{L_0 a_0}$. Interpréter ce temps caractéristique.

Si $\rho_1 = 0$ (volume constant), on a $p_1 = a_0 \xi_1 = b_0 A_1$, ce qui entraîne $A_1 = \frac{a_0}{b_0} \xi_1$. D'où $\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{L_0 A_1}{T_0} = \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} \xi_1$ et donc $\xi_1(t) = \xi_1(0) \exp\left[\frac{T_0 b_0}{L_0 a_0} t\right]$. Le temps $\tau_{v0} = -\frac{T_0 b_0}{L_0 a_0}$ est le temps caractéristique de retour à l'équilibre à volume constant.

- 10) On suppose que la réaction s'effectue à pression constante ce qui revient à imposer $p_1 = 0$. Montrer que l'on a $\xi_1(t) = \xi_1(0) \exp(-t/\tau_{p0})$ avec $\tau_{p0} = \frac{c_{f0}^2}{c_{e0}^2} \tau_{v0}$. Interpréter ce temps caractéristique.

Si $p_1 = 0$ (pression constante), on a $c_{f0}^2 \rho_1 + a_0 \xi_1 = 0$ et $c_{e0}^2 \rho_1 + b_0 A_1 = 0$, ce qui entraîne $A_1 = \frac{c_{e0}^2 a_0}{c_{f0}^2 b_0} \xi_1$. D'où $\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{c_{e0}^2}{c_{f0}^2} \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} \xi_1$ et donc $\xi_1(t) = \xi_1(0) \exp\left[\frac{c_{f0}^2}{c_{e0}^2} \frac{T_0 b_0}{L_0 a_0} t\right]$. Le temps $\tau_{p0} = \frac{c_{f0}^2}{c_{e0}^2} \tau_{v0}$ est le temps caractéristique de retour à l'équilibre à pression constante.

- 11) On suppose qu'à $t = 0$ l'écoulement est irrotationnel. Montrer que l'on peut écrire $\underline{u} = \text{grad } \phi$ et que l'équation de quantité de mouvement peut être remplacée par l'équation $\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p_1$.

Comme $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \underline{u} = \underline{0}$, alors $\text{rot } \underline{u}$ est nul pour tous temps s'il est nul initialement. On en déduit que l'on peut trouver ϕ tel que $\underline{u} = \text{grad } \phi$. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors $\text{grad } (\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\text{grad } p_1$, ce que l'on peut simplifier en $\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -p_1$ en choisissant zéro comme constante d'intégration (ϕ est définie à une fonction du temps près).

- 12) En éliminant p_1 et A_1 , montrer que l'on obtient le système à trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \phi = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_{f0}^2 \rho_1 - a_0 \xi_1, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{L_0}{T_0 b_0} (c_{f0}^2 - c_{e0}^2) \rho_1 + \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0}. \end{aligned} \quad (12.11)$$

On élimine facilement $p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$. En utilisant l'égalité $c_{f0}^2 \rho_1 + a_0 \xi_1 = c_{e0}^2 \rho_1 + b_0 A_1$, on obtient la relation $A_1 = \frac{(c_{f0}^2 - c_{e0}^2) \rho_1 + a_0 \xi_1}{b_0}$, ce qui permet d'éliminer A_1 . On est alors en présence du système

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \Delta \phi = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_{f0}^2 \rho_1 - a_0 \xi_1, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{L_0}{T_0 b_0} (c_{f0}^2 - c_{e0}^2) \rho_1 + \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} \xi_1. \end{aligned} \quad (12.12)$$

- 13) En posant $(\rho, \phi, \xi) = (R, B, C) \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t)$, où \underline{k} est un vecteur complexe, montrer que l'on obtient la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 =: k^2 = \frac{\omega^2}{c_{e0}^2} \frac{1 - i \omega \tau_{v0}}{1 - i \omega \tau_{p0}}. \quad (12.13)$$

En posant $(\rho, \phi, \xi) = (R, B, C) \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x} - i \omega t)$, la relation de dispersion est obtenue en annulant le déterminant

$$\begin{vmatrix} i\omega & \rho_0 k^2 & 0 \\ -\frac{c_{f0}^2}{\rho_0} & i\omega & -\frac{a_0}{\rho_0} \\ \frac{L_0}{T_0 b_0} (c_{f0}^2 - c_{e0}^2) & 0 & \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} + i\omega \end{vmatrix} = \frac{L_0}{T_0 b_0} (c_{f0}^2 - c_{e0}^2) \begin{vmatrix} \rho_0 k^2 & 0 \\ i\omega & -\frac{a_0}{\rho_0} \end{vmatrix} + \left(\frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} + i\omega \right) \begin{vmatrix} i\omega & \rho_0 k^2 \\ -\frac{c_{f0}^2}{\rho_0} & i\omega \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation s'écrit encore

$$-\frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} (c_{f0}^2 - c_{e0}^2) k^2 + k^2 \frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} c_{f0}^2 + i\omega c_{f0}^2 k^2 - \omega^2 \left(\frac{L_0 a_0}{T_0 b_0} + i\omega \right) = 0, \quad (12.14)$$

ce qui conduit finalement à $k^2 = \frac{\omega^2 (1 - i\omega \tau_{v0})}{c_{e0}^2 - i\omega \tau_{v0} c_{f0}^2} = \frac{\omega^2}{c_{e0}^2} \frac{1 - i\omega \tau_{v0}}{1 - i\omega \tau_{p0}}$.

- 14) Interpréter cette relation de dispersion dans les limites $\omega \tau_{v0} \rightarrow 0$ (réaction rapide) et $\omega \tau_{v0} \rightarrow \infty$ (réaction lente).

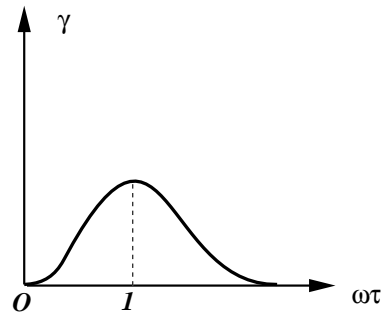
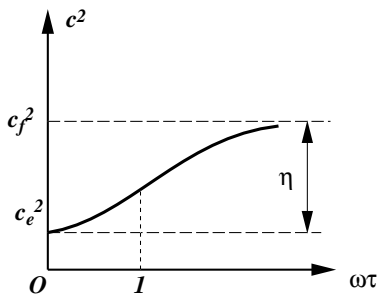
La limite $\omega \tau_{v0} \rightarrow 0$ correspond au cas où la réaction s'amortit rapidement par rapport à la période des ondes acoustiques. Le nombre d'onde k est réel et vaut $k = \frac{\omega}{c_e}$. Le son se propage à la vitesse c_{e0} et la réaction est constamment à l'équilibre. La limite $\omega \tau_{v0} \rightarrow \infty$ correspond au cas où la réaction s'amortit lentement par rapport à la période des ondes acoustiques. Le nombre d'onde k est réel et vaut $k = \frac{\omega}{c_{f0}}$. Le son se propage à la vitesse c_{f0} et une onde ne voit qu'une réaction figée.

- 15) On suppose maintenant que $c_f^2 = c_e^2(1 + \eta)$ avec $0 < \eta \ll 1$. Montrer que la vitesse de propagation du son c en présence de la réaction chimique et le taux de dissipation γ sont, à l'ordre dominant en η ,

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k_r} \right)^2 = \frac{c_e^2 + \omega^2 \tau^2 c_f^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{k_i}{\omega} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{c_f - c_e}{c_e^2} \quad (12.15)$$

où $\tau = \tau_{v0}$.

Si $c_f^2 = c_e^2(1 + \eta)$ avec $0 < \eta \ll 1$, la partie imaginaire k_i du nombre d'onde k est d'ordre η . On peut alors écrire $c^2 = \left(\frac{\omega}{k_r} \right)^2 = \frac{c_e^2 + \omega^2 \tau^2 c_f^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$ et $\gamma = \frac{k_i}{\omega} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{c_f - c_e}{c_e^2}$ avec $\tau = \tau_{v0}$.



PCM 13

Combustion d'une goutte immobile

FICHE SIGNALÉTIQUE

Petite Classe Multimedia (PCM)	
Titre :	Combustion d'une goutte immobile
Auteur :	O. THUAL, INPT
Référence :	<i>PCM-XINP</i> thu-fhpc2 (2004)
Mois de création :	juin 2004
Mise à jour :	January 15, 2011
URL multimedia :	http://www.enseeiht.fr/hmf/enseignants/thual/
Niveau :	Master I ou II
Enseignement :	Petite classe de 2h
Animations :	néant
Mots clés :	Équations de Shvab-Zeldovich Hypothèse de Burke-Schumann, flamme

RÉSUMÉ

Cette "Petite Classe" s'intéresse à un cas d'application du modèle de la flamme de diffusion dans le cadre des équations de Shvab-Zeldovich et de l'hypothèse de Burke-Schumann.

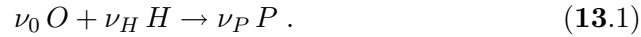
NOTATIONS

\underline{a}	Vecteur quelconque
$\underline{a} \cdot \underline{b}$	Produit scalaire des \underline{a} et \underline{b}
C_p	Capacité calorifique à pression constante ($\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$)
div	Opérateur divergence (m^{-1})
\mathcal{D}	Coefficient de diffusion ($\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$)
\underline{e}_r	Vecteurs unitaire radial (m)
grad	Opérateur gradient (m^{-1})
\mathcal{M}	Masse molaire (kg)
q_f^0	Enthalpie de formation (J m^{-3})
T	Température ($^\circ\text{K}$)
t	Temps (s)
$\underline{u}(\underline{x}, t)$	Champ de vitesse (m s^{-1})
r	Coordonnée radiale (m)
Y	Concentration d'un constituant chimique
ξ	Degré d'avancement volumique de la réaction chimique m^{-3}
ρ	Masse volumique (kg m^{-3})
ν	Coefficient stochiométrique

ÉLÉMENTS DE COURS

Équations de Shvab-Zeldovich

On considère la réaction de combustion suivante entre un combustible (hydrogène liquide H) qui brûle dans une atmosphère de comburant (oxygène O) :



En notant ξ_v le degré d'avancement volumique de cette réaction, on rappelle que les équations de Shvab-Zeldovich s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{div} [\rho \underline{u}] &= 0 \\ \text{div} [\rho Y_O \underline{u} - \rho \mathcal{D} \text{grad} Y_O] &= -\nu_O \mathcal{M}_O \dot{\xi}_v \\ \text{div} [\rho Y_H \underline{u} - \rho \mathcal{D} \text{grad} Y_H] &= -\nu_H \mathcal{M}_H \dot{\xi}_v \\ \text{div} [\rho Y_P \underline{u} - \rho \mathcal{D} \text{grad} Y_P] &= \nu_P \mathcal{M}_P \dot{\xi}_v \\ \text{div} [\rho G(T) \underline{u} - \rho \mathcal{D} \text{grad} G(T)] &= -Q \dot{\xi}_v \end{aligned} \quad (13.2)$$

avec $G(T) = \int_0^T C_p(\alpha) d\alpha = C_p T$ et $Q = \nu_P \mathcal{M}_P q_{f_P}^0 - \nu_O \mathcal{M}_O q_{f_O}^0 - \nu_H \mathcal{M}_H q_{f_H}^0$.
Ces relations sont soumis à la contrainte $Y_O + Y_H + Y_P = 1$.

Hypothèse de Burke-Schumann

L'approximation de Burke-Schumann consiste à remplacer le modèle de cinétique chimique par les hypothèses $Y_O = 0$ d'un côté la flamme et $Y_H = 0$ de l'autre.

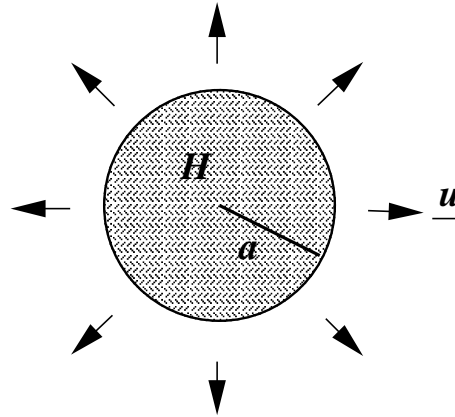
ÉNONCÉ DE PETITE CLASSE

1 Équations de Shvab-Zeldovich

On considère la réaction de combustion suivante entre un combustible (hydrogène liquide H) qui brûle dans une atmosphère de comburant (oxygène O) :



On suppose que toutes les hypothèses de Shvab-Zeldovich et Burke-Schumann sont vérifiées. On note ξ_v le degré d'avancement



On considère une goutte de combustible de densité ρ_l et de masse $M(t) = M(0) - m(t)$. La quantité \dot{m} est le débit massique d'hydrogène liquide vaporisé lors de la combustion. L'indice l désigne les caractéristiques de cette goutte d'hydrogène liquide. On suppose que la densité ρ du mélange gazeux est très petite devant ρ_l . On suppose connues les grandeurs suivantes : T_∞ , T_v , L_v , C_p , T_i et $Y_{O,\infty}$ (voir définition plus loin). En raison de la symétrie sphérique du problème, on pose $\underline{u} = u(r, t) \underline{e}_r$.

- 1) On suppose que la vitesse u_l à l'intérieur de la goutte est nulle. Montrer que les relations de saut sur la surface de la goutte de rayon $a(t)$ s'écrivent, pour le bilan de masse et d'hydrogène, sous la forme

$$\rho(u - w) = -\rho_l w \quad \text{et} \quad \rho Y_H(u - w) - \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r} = -\rho_l w$$

$$\text{avec } w = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2(t)}. \quad (13.4)$$

Les relations de saut pour le bilan de masse et d'hydrogène s'écrivent respectivement

$$\left[\left[\rho(\underline{u} - w \underline{e}_r) \right] \right] \cdot \underline{e}_r = 0 \quad \text{et} \quad \left[\left[\rho Y_H(\underline{u} - w \underline{e}_r) - \rho \mathcal{D} \text{grad} Y_H \right] \right] \cdot \underline{e}_r = 0 \quad (13.5)$$

Où $\underline{W} = w \underline{e}_r$ est la vitesse de la surface de la goutte. Cette relation s'écrivent $\rho(u - w) = -\rho_l w$ et $\rho Y_H(u - w) - \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r} = -\rho_l w$. En dérivant par rapport au temps la relation $M(0) - m(t) = \frac{4}{3}\pi a(t)^3$, on obtient $\dot{a} = w = -\frac{1}{\rho_l} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2(t)}$.

2) En utilisant $\rho_l \gg \rho$ montrer que $|w| \ll u$ ainsi que les relations

$$\rho(a, t) u(a, t) = \frac{\dot{m}}{4\pi a^2(t)}$$

$$\text{et} \quad \frac{\dot{m}}{4\pi a^2(t)} [Y_H(a, t) - 1] = \rho(a, t) \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r}(a, t). \quad (13.6)$$

La première relation de saut s'écrit $\rho u = (\rho - \rho_l)w \sim -\rho_l w$. On en déduit $u \sim -\frac{\rho_l}{\rho} w \gg |w|$. La seconde relation s'écrit $\rho Y_H(u - w) \sim \rho Y_H u = \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r} - \rho_l w$. Mais comme $\rho u \sim -\rho_l w$, on peut écrire $-\rho_l w Y_H \sim \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r} - \rho_l w$ et donc $(-\rho_l w)(Y_H - 1) \sim \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r}$. On en déduit alors $\frac{\dot{m}}{4\pi a^2} [Y_H - 1] = \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_H}{\partial r}$.

2 Vaporisation de la goutte

Les conditions aux limites thermiques à la surface de la goutte pour le mélange sont $T(a, t) = T_v$, où T_v est la température de vaporisation de l'hydrogène liquide. On suppose que la température $T_l = T_i$ de la goutte est uniforme et constante.

3) La surface de la goutte n'est pas inerte pour la relation de saut de l'énergie $G(T) = C_p T$. Montrer que cette relation de saut s'écrit

$$\rho(u - w) C_p T_v - \rho \mathcal{D} C_p \frac{\partial T}{\partial r} = -\rho_l C_p T_i w + \rho_l w L_v \quad (13.7)$$

où L_v est la chaleur latente de vaporisation de l'hydrogène. En utilisant les approximations déjà citées, en déduire la condition aux limites

$$\rho \mathcal{D} C_p \frac{\partial T}{\partial r}(a, t) = \frac{\dot{m}(t)}{4\pi a^2(t)} L \quad (13.8)$$

avec $L = L_v + C_p (T_v - T_i)$.

La relation de saut pour l'énergie s'écrit

$$\left[\left[\rho C_p T (\underline{u} - w \underline{e}_r) - \rho \mathcal{D} \underline{\text{grad}} (C_p T) \right] \right] \cdot \underline{e}_r = \rho_l w L_v \quad (13.9)$$

dans la mesure où la surface de discontinuité n'est pas inerte à cause de la vaporisation. On en déduit donc $\rho C_p T_v (u - w) - \rho \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} (C_p T) = -\rho_l C_p T_i w + \rho_l w L_v$. Comme $u \gg |w|$ et $\rho u \sim -\rho_l w$, on peut écrire approximativement $\rho \mathcal{D} C_p \frac{\partial T}{\partial r} = -\rho_l w L_v - \rho_l w C_p T_v + \rho_l w C_p T_i = -\rho_l w [L_v + C_p (T_v - T_i)]$. Comme $\rho_l w = -\frac{\dot{m}}{4\pi a^2}$, on obtient finalement la condition aux limites $\rho \mathcal{D} C_p \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{m}}{4\pi a^2} L$ en $r = a(t)$ avec $L = L_v + C_p (T_v - T_i)$.

- 4) On introduit les notations $\alpha_O = -\frac{Y_O}{\nu_O \mathcal{M}_O}$, $\alpha_H = -\frac{Y_H}{\nu_H \mathcal{M}_H}$, $\alpha_T = -\frac{G(T)}{Q} = -\frac{C_p T}{Q}$ et $\mathcal{L}(\alpha) = \text{div} (\rho \alpha \underline{u} - \rho \mathcal{D} \underline{\text{grad}} \alpha)$. Montrer que le système s'écrit

$$\text{div} (\rho \underline{u}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\alpha_O) = \mathcal{L}(\alpha_H) = \mathcal{L}(\alpha_T) = \dot{\xi}_v \quad (13.10)$$

avec les conditions aux limites en à la surface de la goutte qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \rho u &= \frac{\dot{m}(t)}{4\pi a^2(t)}, & \frac{\partial \alpha_H}{\partial r} &= \frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \left(\alpha_H + \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \right), \\ \alpha_T &= \frac{C_p T_v}{Q} & \text{et} & \quad \frac{\partial \alpha_T}{\partial r} = -\frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \frac{L}{Q} \quad \text{pour } r = a(t). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Montrer que les conditions aux limites à l'infini $Y_O = Y_{O,\infty}$, $Y_H = 0$ et $T = T_\infty$ s'écrivent

$$\alpha_O = -\frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O}, \quad \alpha_H = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_T = \frac{C_p T_\infty}{Q} \quad \text{pour } r = \infty. \quad (13.12)$$

En ajoutant la conditions aux limites $T(a, t) = T_v$ et en utilisant les notations α_O , α_H et α_T , on obtient les relations indiquées.

Hypothèse de Burke-Schumann

- 5) Montrer que la relation de saut pour Y_O à la surface de la goutte s'écrit $\frac{\dot{m}}{4\pi a^2} Y_O - \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_O}{\partial r} = 0$ en $r = a(t)$. Remarquer alors que la spécification d'un modèle de cinétique chimique $\dot{\xi}_v = F(T, \rho, Y_O, Y_H)$ permet de compléter les équations aux dérivées partielles et conditions aux limites énoncées plus haut pour aboutir à un problème bien posé.

| La relation de saut pour Y_O s'écrit $\rho Y_O(u - w) - \rho \mathcal{D} \frac{\partial Y_O}{\partial r} = 0$. En utilisant $\rho u \sim -\rho_l w = \frac{\dot{m}}{4\pi a^2}$ on obtient le résultat annoncé.

L'approximation de Burke-Schumann consiste à remplacer le modèle de cinétique chimique par les hypothèses $Y_O = 0$ pour $r < b(t)$ et $Y_H = 0$ pour $r > b(t)$ où $b(t)$ est la position de la flamme.

- 6) En remarquant que la relation de saut pour Y_O est alors trivialement satisfaite, montrer que le problème à résoudre s'écrit

$$\operatorname{div}(\rho \underline{u}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u) = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\alpha_O) = \mathcal{L}(\alpha_H) = \mathcal{L}(\alpha_T) = \dot{\xi}_v,$$

avec $\mathcal{L}(\alpha) = \operatorname{div}(\rho \alpha \underline{u} - \rho \mathcal{D} \operatorname{grad} \alpha) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\rho \alpha u - \rho \mathcal{D} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \right]$, complété par l'hypothèse de Burke-Schumann

$$\alpha_O = 0 \quad \text{pour } r < b(t) \quad \text{et} \quad \alpha_H = 0 \quad \text{pour } r > b(t) \quad (\mathbf{13.13})$$

et par les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \rho u &= \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} && \text{pour } r = a(t), \\ \frac{\partial \alpha_H}{\partial r} &= \frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \left(\alpha_H - \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \right), \\ \frac{\partial \alpha_T}{\partial r} &= \frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \frac{L}{Q}, \quad \alpha_T = -\frac{C_p T_v}{Q} && \text{pour } r = a(t), \\ \text{et} \quad \alpha_O &= -\frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O}, \quad \alpha_T = -\frac{C_p T_\infty}{Q} && \text{pour } r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\mathbf{13.14})$$

| L'hypothèse de Burke-Schumann revient à poser $\dot{\xi}_v = 0$ dans tout le domaine, excepté sur la flamme $r = b(t)$ (surface ayant donc une mesure nulle).

- 7) En exprimant la masse totale de la goutte, montrer que l'on peut écrire $\dot{m}(t) = -4\pi a^2(t) \rho_l \dot{a}(t)$.

| On a en fait $w = \dot{a}$.

- 8) On pose $\varphi_T = \alpha_T - \alpha_O$ et $\varphi_H = \alpha_H - \alpha_O$. En remarquant que l'hypothèse de Burke-Schumann permet de déduire les trois fonctions α_T , α_O et α_H à partir des deux fonctions φ_T et φ_H , montrer que le problème à résoudre est équivalent au système

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u) = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho \left(\varphi_T u - \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_T \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho \left(\varphi_H u - \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_H \right) \right] = 0$$

complété par les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \rho u &= \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} && \text{pour } r = a(t) \\ \frac{\partial \varphi_H}{\partial r} &= \frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \left(\varphi_H - \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \right), && \\ \frac{\partial \varphi_T}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho \mathcal{D}} \frac{\dot{m}}{4\pi a^2} \frac{L}{Q}, \quad \varphi_T = -\frac{C_p T_v}{Q} && \text{pour } r = a(t), \\ \text{et } \varphi_H &= \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O}, \quad \varphi_T = -\frac{C_p T_\infty}{Q} + \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} && \text{pour } r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

| Il suffit de remplacer dans les équations en utilisant les expressions de div en sphérique et les hypothèses $\alpha_O = 0$ pour $r = a(t)$ et $\alpha_H = 0$ pour $r \rightarrow \infty$.

Résolution des équations du modèle

9) Montrer que l'on a $u(r, t) = \frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho(r, t) r^2}$.

| En intégrant l'équation de bilan de la masse $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho u) = 0$ on obtient $u(r, t) = \frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho(r, t) r^2}$.

10) On suppose maintenant que le produit $\rho \mathcal{D}$ est indépendant de r . En notant $\delta(t) = \frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho \mathcal{D} a}$, montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \varphi_H(r, t) &= A_H(t) + B_H(t) \exp \left[-\frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho \mathcal{D} r} \right] \\ \text{et } \varphi_T(r, t) &= A_T(t) + B_T(t) \exp \left[-\frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho \mathcal{D} r} \right] \end{aligned} \quad (13.15)$$

avec

$$\begin{aligned} A_H &= -\frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H}, \\ B_H &= \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} + \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H}, \\ A_T &= -\frac{C_p T_v}{Q} + \frac{L}{Q} = -\frac{C_p T_\infty}{Q} + \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} + \frac{L}{Q} \exp(\delta), \end{aligned}$$

$$B_T = -\frac{L}{Q} \exp(\delta). \quad (13.16)$$

En déduire que $\delta = \text{Ln} \left[1 + \frac{C_p(T_\infty - T_v)}{L} - \frac{Q}{L} \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} \right]$ est indépendant du temps.

En intégrant $\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho \left(\varphi_H u - \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_H \right) \right] = 0$ et $\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \rho \left(\varphi_T u - \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_T \right) \right] = 0$, on obtient, en remarquant que la constante d'intégration est nulle à cause des conditions aux limites, $\frac{1}{\varphi_T} \frac{\partial \varphi_T}{\partial r} = \frac{1}{\varphi_H} \frac{\partial \varphi_H}{\partial r} = u(r, t) = \frac{\dot{m}}{4\pi \rho \mathcal{D} r^2}$. En intégrant une nouvelle fois on obtient alors $\varphi_H(r, t) = A_H(t) + B_H(t) \exp \left[-\frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho \mathcal{D} r} \right]$ et $\varphi_T(r, t) = A_T(t) + B_T(t) \exp \left[-\frac{\dot{m}(t)}{4\pi \rho \mathcal{D} r} \right]$. Les conditions aux limites permettent alors de fixer la valeur des constantes. Comme elles sont plus nombreuses que l'ordre des équations, la constante δ peut alors être déterminée.

- 11) En utilisant le lien entre $\dot{m}(t)$ et $a(t)$ montrer que l'on a $a^2(t) = a^2(0) - \frac{2\rho \mathcal{D} \delta}{\rho_l} t$. En déduire que le temps nécessaire pour brûler toute la goutte est $t_* = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{\rho_l}{\rho \mathcal{D} \delta}$.

Comme $\dot{m} = 4\pi \rho \mathcal{D} a(t) \delta = -4\pi a^2(t) \rho_l \dot{a}(t)$, on déduit que $a^2(t) = a^2(0) - \frac{2\rho \mathcal{D} \delta}{\rho_l} t$. Le rayon s'annule pour $t = t_*$.

- 12) Montrer que la continuité de Y_H et Y_O à travers la flamme d'équation $r = b(t)$ permet d'écrire $\varphi_H[b(t), t] = 0$, ce qui conduit à

$$b(t) = a(t) \delta / \text{Ln} \left[1 + Y_{O,\infty} \frac{\nu_H \mathcal{M}_H}{\nu_O \mathcal{M}_O} \right].$$

La condition de continuité en $r = b(t)$ permet de calculer la position $r = b(t)$ de la flamme.

- 13) Conclure en écrivant la solution sous la forme

$$\begin{aligned} \text{pour } a(t) < r < b(t) \quad : \\ Y_O &= 0 \\ \frac{Y_H}{\nu_H \mathcal{M}_H} &= \left(\frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} + \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} \right) e^{-\delta \frac{a(t)}{r}} - \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \\ C_p \frac{T}{Q} &= \frac{C_p T_v}{Q} + \frac{L}{Q} \left[e^{\delta \left(1 - \frac{a(t)}{r} \right)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (13.17)$$

pour $b(t) < r$:

$$\begin{aligned} \frac{Y_O}{\nu_O \mathcal{M}_O} &= \left(\frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} + \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \right) e^{-\frac{\delta a(t)}{r}} - \frac{1}{\nu_H \mathcal{M}_H} \\ Y_H &= 0 \\ C_p \frac{T}{Q} &= \frac{C_p T_v}{Q} + \frac{L}{Q} \left[e^{\delta \left(1 - \frac{a(t)}{r}\right)} - 1 \right] - \frac{Y_O}{\nu_O \mathcal{M}_O} \end{aligned} \quad (13.18)$$

où δ est donnée par $\delta = \text{Ln} \left[1 + \frac{C_p(T_\infty - T_v)}{L} - \frac{Q}{L} \frac{Y_{O,\infty}}{\nu_O \mathcal{M}_O} \right]$ et les rayons $a(t)$ et $b(t)$ par

$$a(t) = \sqrt{a^2(0) - \frac{2\rho D \delta}{\rho_l} t} \quad \text{et} \quad b(t) = a(t) \frac{\delta}{\text{Ln} \left[1 + Y_{O,\infty} \frac{\nu_H \mathcal{M}_H}{\nu_O \mathcal{M}_O} \right]} \quad (13.19)$$

Tracer l'allure des fonctions Y_O , Y_H , Y_P et T en fonction de r et l'allure des fonction $a(t)$ et $b(t)$ en fonction de t .

| L'allure des fonctions est indiquée par la figure.

- 14) En déduire que la température de la flamme $T_f = T_v + \frac{L}{C_p} \left[e^{\delta(t) \left(1 - \frac{a(t)}{b(t)}\right)} - 1 \right]$ ne dépend pas du temps.

| On en déduit la température de la flamme. Comme $b(t)/a(t)$ est une constante, cette température est indépendante du temps.

