

Construction de contrôles

O. Thual (thual@imft.fr) de 1997 à 2001

Contribution aux contrôles du Département de Mécanique de l'École Polytechnique de 1997 à 2011.

Mécanique des Fluides (MEC432)

1. CC 2006 : “Couches limites à l’interface air-eau”.

Mécanique des Milieux Continus (MEC431)

1. CC 2005 (contribution à 25%) : “Épaisseur de déclenchement d’un avalanche”.
2. CC 2006 (contribution à 75%) : “Équations d’équilibre et critère de rupture : Faille oblique” et “Méthode de Ritz : Déformation d’une pastille confinée”.
3. CC 2007 : “Cisaillement entre deux cylindres”, “Boule de caoutchouc dans une enveloppe” et “Vecteur contrainte exercé par un amas de ressorts”.
4. CC 2010 : “Champ d’autocontraintes dans un cylindre”, “Compression uniaxiale d’un matériau composite anisotrope” et “Compression uniaxiale d’un matériau composite inhomogène”.
5. CC 2011 : diffusion après le 20 janvier.

Dynamique de l’Atmosphère et des Océans (MEC433)

1. CC 2007 : “Cellules de Hadley”, “Vent thermique et jet d’ouest” et “Courant antarctique circumpolaire”.
2. CC 2008 : “Ondes de Rossby stationnaires” et “Modèle à M couches”.
3. CC 2009 : “Perturbations de moyenne latitude” et “Circulation thermohaline”.

“Sciences de l’Eau et Environnement” (MEC567)

1. NC 2008 : “Circuit hydraulique d’un chauffage central”, “Dispersion des ondes capillaires” et “Réfraction de la houle par un courant”.
2. NC 2010 : “Un pipeline pour la Mer Morte”, “Bassin circulaire à vagues”, “Mascaret du Mont Saint-Michel” et “Partage des eaux”.

CONTRÔLE CLASSANT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES MEC432

du lundi 24 avril 2006

Durée : 3 heures (de 10h30 à 13h30)

Sujet proposé par MM. Olivier THUAL et Patrick HUERRE

* * *

L'usage des cours photocopiés, des notes de cours et des notes de petites classes est autorisé. La deuxième partie du problème peut être abordée sans faire la première partie en admettant les résultats.

Joindre à la copie la feuille recto-verso distribuée en même temps que l'énoncé, après y avoir inscrit vos nom et prénom et y avoir complété les figures.

* * *

COUCHES LIMITES À L'INTERFACE AIR-EAU

L'objectif du problème est d'étudier le développement des couches limites visqueuses induites par un vent soufflant à la surface de l'eau (figure 1).

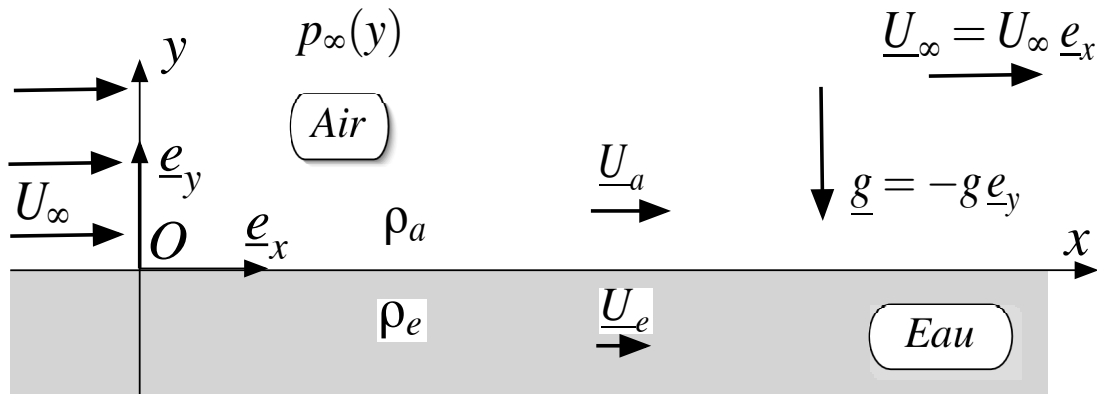


Figure 1: Géométrie du problème.

Un premier écoulement d'air occupant le domaine $y \geq 0$ entraîne l'écoulement de l'eau occupant le domaine $y \leq 0$ dans le repère orthonormé $Oxyz$. L'interface d'équation $y = 0$ est une surface de contact où certaines grandeurs physiques présentent une discontinuité.

Les deux fluides sont supposés non-miscibles, newtoniens et incompressibles. On note, respectivement, (ρ_a, ν_a) et (ρ_e, ν_e) leurs masses volumiques et leurs viscosités cinématiques supposées constantes, puis $J = \rho_e/\rho_a$ et $K = \nu_e/\nu_a$ les rapports entre ces paramètres physiques.

L'écoulement de part et d'autre de l'interface est stationnaire et bidimensionnel de vitesse $\underline{U}_a(x, y) = u_a(x, y) \underline{e}_x + v_a(x, y) \underline{e}_y$ pour l'air et $\underline{U}_e(x, y) = u_e(x, y) \underline{e}_x + v_e(x, y) \underline{e}_y$ pour l'eau. Par ailleurs, on note :

- g l'intensité de la force de pesanteur,
- $p_a(x, y)$ et $p_e(x, y)$ les pressions respectives de l'air et de l'eau,
- $p_\infty(y) = p_0 - \rho_a g y$ la distribution verticale de la pression de l'air pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$,
- $\underline{U}_\infty = U_\infty \underline{e}_x$ la vitesse de l'air, supposée uniforme pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ où U_∞ est une constante.

De plus, on suppose que la vitesse de l'eau est nulle pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$.

PREMIÈRE PARTIE : modèle de couches limites à l'interface (10 points)

Cette première partie a pour objectif d'établir le modèle des couches limites le long de l'interface air-eau.

1. Montrer que l'écoulement de l'air obéit aux équations fondamentales

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} = 0, \quad (\text{E.1a})$$

$$u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p'_a}{\partial x} + \nu_a \left(\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} \right), \quad (\text{E.1b})$$

$$u_a \frac{\partial v_a}{\partial x} + v_a \frac{\partial v_a}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p'_a}{\partial y} + \nu_a \left(\frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_a}{\partial y^2} \right), \quad (\text{E.1c})$$

où $p'_a(x, y) = p_a(x, y) - p_\infty(y)$, ainsi qu'aux conditions aux limites

$$u_a(x, y) \rightarrow U_\infty, \quad v_a(x, y) \rightarrow 0, \quad p'_a(x, y) \rightarrow 0, \quad |\underline{x}| \rightarrow \infty. \quad (\text{E.2})$$

Écrire les équations fondamentales régissant l'écoulement de l'eau où l'on introduira le champ $p'_e(x, y) = p_e(x, y) - p_0 + \rho_e g y$. Écrire les conditions aux limites de cet écoulement pour $|\underline{x}| \rightarrow \infty$.

2. Montrer qu'à l'interface air-eau on a :

$$v_a = v_e = 0, \quad y = 0, \quad (\text{E.3a})$$

$$u_a = u_e, \quad y = 0. \quad (\text{E.3b})$$

Exprimer les tenseurs des contraintes visqueuses $\underline{\tau}_a$ et $\underline{\tau}_e$ dans l'air et l'eau puis montrer que l'on a les conditions supplémentaires :

$$\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial y} = \rho_e \nu_e \frac{\partial u_e}{\partial y}, \quad y = 0, \quad (\text{E.4a})$$

$$p'_a - 2\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = p'_e - 2\rho_e \nu_e \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad y = 0. \quad (\text{E.4b})$$

3. On introduit une échelle horizontale L et l'on suppose que les deux nombres de Reynolds

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu_a} \quad \text{et} \quad \frac{Re}{K} = \frac{U_\infty L}{\nu_e} \quad (\text{E.5})$$

sont du même ordre de grandeur avec

$$Re \gg 1. \quad (\text{E.6})$$

On définit alors le jeu de variables adimensionnelles

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad (\text{E.7a})$$

$$\bar{u}_a = \frac{u_a}{U_\infty}, \quad \bar{v}_a = \frac{v_a}{U_\infty}, \quad \bar{p}'_a = \frac{p'_a}{\rho_a U_\infty^2}, \quad \bar{u}_e = \frac{u_e}{U_\infty}, \quad \bar{v}_e = \frac{v_e}{U_\infty} \quad \text{et} \quad \bar{p}'_e = \frac{p'_e}{\rho_a U_\infty^2}. \quad (\text{E.7b})$$

Exprimer sous forme adimensionnelle le système d'équations pour l'air et pour l'eau.

Exprimer sous forme adimensionnelle les conditions aux limites à l'infini.

Montrer que les équations (E.3-E.4) s'écrivent

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e = 0, \quad \bar{u}_a = \bar{u}_e, \quad \bar{y} = 0, \quad (\text{E.8a})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{y}} = \Lambda \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{p}'_a - \frac{2}{Re} \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{x}} = \bar{p}'_e - \frac{2\Lambda}{Re} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{y} = 0, \quad (\text{E.8b})$$

où Λ est le paramètre sans dimension

$$\Lambda = J K. \quad (\text{E.9})$$

4. On cherche une solution de la forme

$$\bar{U}_a(\bar{x}, \bar{y}; Re) \sim \bar{U}_{a0}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\eta}_1(Re) \bar{U}_{a1}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (\text{E.10a})$$

$$\bar{p}'_a(\bar{x}, \bar{y}; Re) \sim \bar{p}'_{a0}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\eta}_1(Re) \bar{p}'_{a1}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (\text{E.10b})$$

$$\bar{U}_e(\bar{x}, \bar{y}; Re) \sim \bar{U}_{e0}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\eta}_1(Re) \bar{U}_{e1}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (\text{E.10c})$$

$$\bar{p}'_e(\bar{x}, \bar{y}; Re) \sim \bar{p}'_{e0}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\eta}_1(Re) \bar{p}'_{e1}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \quad (\text{E.10d})$$

où $\bar{\eta}_1(Re)$ est une fonction de jauge inconnue telle que $|\bar{\eta}_1(Re)| \ll 1$ lorsque Re tend vers l'infini.

Quel est le système d'équations et de conditions aux limites à l'infini à l'ordre dominant pour l'air et pour l'eau ?

Quelles sont les conditions de saut à l'ordre dominant sur l'interface ?

5. Pensez-vous qu'il existe une solution vérifiant toutes les équations, toutes les conditions aux limites et les conditions de saut à l'interface à l'ordre dominant ? Justifier votre réponse en comparant les équations obtenues en 3 et 4.

Quelle est la solution évidente $\bar{U}_{a0}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{p}'_{a0}(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{U}_{e0}(\bar{x}, \bar{y})$ et $\bar{p}'_{e0}(\bar{x}, \bar{y})$ vérifiant tout le système d'équations, de conditions aux limites et de conditions de saut à l'ordre dominant à l'exception d'une ou plusieurs conditions de saut à l'interface que l'on précisera ?

6. Pour étudier la couche limite au voisinage de l'interface air-eau, on introduit les variables intérieures :

$$\tilde{x} = \bar{x}, \quad \tilde{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}(Re)}, \quad (\text{E.11a})$$

$$\tilde{u}_a = \bar{u}_a, \quad \tilde{v}_a = \bar{v}_a, \quad \tilde{p}'_a = \bar{p}'_a, \quad \tilde{u}_e = \bar{u}_e, \quad \tilde{v}_e = \bar{v}_e \quad \text{et} \quad \tilde{p}'_e = \bar{p}'_e, \quad (\text{E.11b})$$

où $\bar{\delta}(Re)$ est une fonction de jauge inconnue telle que $|\bar{\delta}(Re)| \ll 1$ quand Re tend vers l'infini. Exprimer le système d'équations, de conditions aux limites et de conditions de saut en variables intérieures.

7. On cherche une solution intérieure à l'ordre dominant. Pour ce faire, on introduit les développements asymptotiques intérieurs

$$\tilde{U}_a(\tilde{x}, \tilde{y}; Re) \sim \tilde{U}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\eta}_1(Re) \tilde{U}_{a1}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \quad (\text{E.12a})$$

$$\tilde{p}'_a(\tilde{x}, \tilde{y}; Re) \sim \tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\eta}_1(Re) \tilde{p}'_{a1}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \quad (\text{E.12b})$$

$$\tilde{U}_e(\tilde{x}, \tilde{y}; Re) \sim \tilde{U}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\eta}_1(Re) \tilde{U}_{e1}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \quad (\text{E.12c})$$

$$\tilde{p}'_e(\tilde{x}, \tilde{y}; Re) \sim \tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\eta}_1(Re) \tilde{p}'_{e1}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \dots \quad (\text{E.12d})$$

où la fonction de jauge $\tilde{\eta}_1(Re)$ est telle que $|\tilde{\eta}_1(Re)| \ll 1$ lorsque Re tend vers l'infini.

Calculer $\tilde{v}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $\tilde{v}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Déterminer $\tilde{\eta}_1(Re)$ et $\bar{\delta}(Re)$ par application du principe de moindre dégénérescence.

En déduire les équations des deux couches limites à l'ordre dominant.

Écrire les conditions de saut à l'interface à cet ordre.

8. Exprimer les règles de raccord avec la solution extérieures \bar{U}_{a0} , \bar{U}_{e0} , \bar{p}'_{a0} et \bar{p}'_{e0} à l'ordre dominant, en supposant que toutes les fonctions de champ admettent une limite à la "lisière" des couches limites à cet ordre.

En déduire les fonctions $\tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $\tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y})$ pour tout (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Écrire les équations de Prandtl finales régissant les deux couches limites situées de part et d'autre de l'interface et rappeler toutes les conditions aux limites et toutes les conditions de saut à l'interface qui leur sont associées.

9. On introduit les fonctions de courant dimensionnelles $\psi_a(x, y)$ et $\psi_e(x, y)$ telles que

$$u_a = \frac{\partial \psi_a}{\partial y}, \quad v_a = -\frac{\partial \psi_a}{\partial x}, \quad u_e = \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_e = -\frac{\partial \psi_e}{\partial x}. \quad (\text{E.13})$$

Montrer que l'approximation dominante de l'écoulement dans les couches limites est bien décrite par le système d'équations, de conditions aux limites et de conditions de saut :

$$\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_a}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_a}{\partial y} = \nu_a \frac{\partial^3 \psi_a}{\partial y^3}, \quad y \geq 0, \quad (\text{E.14a})$$

$$\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = \nu_e \frac{\partial^3 \psi_e}{\partial y^3}, \quad y \leq 0, \quad (\text{E.14b})$$

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial y} \rightarrow U_\infty, \quad y \rightarrow \infty \quad ; \quad \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty, \quad (\text{E.14c})$$

$$\psi_e = \psi_a = 0, \quad \frac{\partial \psi_e}{\partial y} = \frac{\partial \psi_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial y^2} = \Lambda \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial y^2}, \quad y = 0. \quad (\text{E.14d})$$

DEUXIÈME PARTIE : couches limites interfaciales (10 points)

Dans cette deuxième partie, on cherche à décrire le développement spatial de couches limites auto-semblables situées de part et d'autre de l'interface air-eau. L'étude se conclue par la détermination du transfert de quantité de mouvement entre l'air et l'eau.

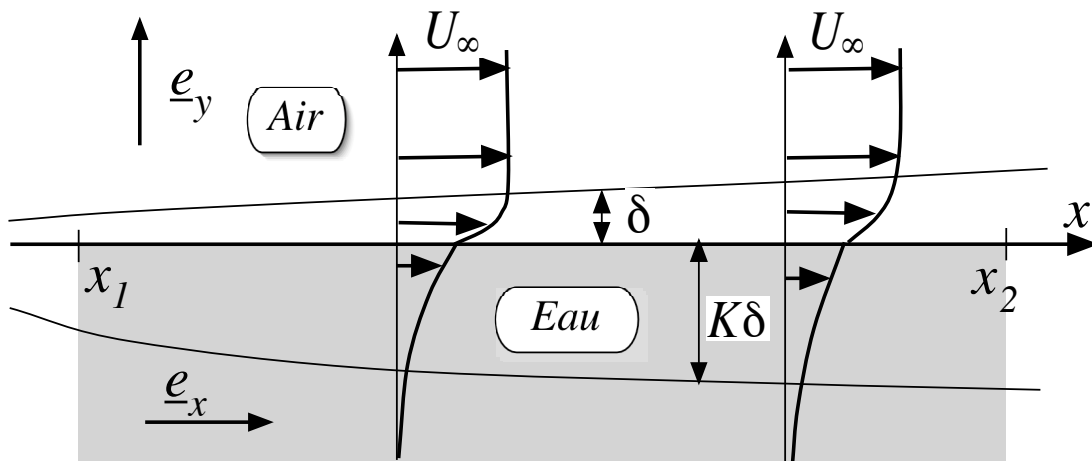


Figure 2: Développement de deux couches limites auto-semblables à l'interface air-eau.

10. Dans un sous-domaine $x_1 \leq x \leq x_2$, avec $0 < x_1$ et $L = x_2 - x_1$, on recherche les fonctions de courant ψ_a et ψ_e sous la forme :

$$\psi_a(x, y) = (\nu_a U_\infty x)^{1/2} f_a(\eta_a), \quad \psi_e(x, y) = (\nu_e U_\infty x)^{1/2} f_e(\eta_e) \quad (\text{E.15})$$

où f_a et f_e sont des fonctions des variables de similitude

$$\eta_a = \frac{y}{(\nu_a x / U_\infty)^{1/2}}, \quad \eta_e = \frac{y}{(\nu_e x / U_\infty)^{1/2}}. \quad (\text{E.16})$$

Justifier le fait que $f_a(\eta_a)$ et $f_e(\eta_e)$ sont solutions de l'équation de Blasius

$$2f''' + ff'' = 0, \quad (\text{E.17})$$

où $f(\eta)$ est une fonction définie sur l'intervalle $\eta \geq 0$ ou $\eta \leq 0$. On pourra se baser pour cela sur les résultats du cours écrit sans avoir à les redémontrer.

Montrer que les conditions aux limites et les conditions de saut s'écrivent :

$$f'_a(+\infty) = 1, \quad f'_e(-\infty) = 0, \quad (\text{E.18a})$$

$$f_a(0) = f_e(0) = 0, \quad f'_a(0) = f'_e(0), \quad f''_a(0) = \chi f''_e(0), \quad (\text{E.18b})$$

où χ est un nombre sans dimension que l'on exprimera en fonction des paramètres physiques des deux fluides.

11. On note

$$u_* = f'_e(0), \quad \tau_* = f''_a(0). \quad (\text{E.19})$$

Exprimer $u_e(x, 0)$ en fonction de u_* et de U_∞ .

Exprimer $\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial y}(x, 0)$ en fonction de τ_* , ρ_a , ν_a , x et U_∞ .

Quelle grandeur physique représente cette expression ?

12. Afin de résoudre graphiquement le système (E.17)-(E.18) pour différentes valeurs du paramètre χ , on met à votre disposition deux familles de solutions de l'équation de Blasius (E.17) :

- la famille $F_a(\eta_a; \tau_*)$ à un paramètre τ_* , définie dans l'intervalle $\eta_a \geq 0$, qui vérifie

$$F_a(0; \tau_*) = 0, \quad F'_a(+\infty; \tau_*) = 1, \quad F''_a(0; \tau_*) = \tau_*, \quad (\text{E.20})$$

- la famille $F_e(\eta_e; u_*)$ à un paramètre u_* , définie dans l'intervalle $\eta_e \leq 0$, qui vérifie

$$F_e(0; u_*) = 0, \quad F'_e(-\infty; u_*) = 0, \quad F'_e(0; u_*) = u_*. \quad (\text{E.21})$$

Par ailleurs, on donne les valeurs numériques

$$F_e(-\infty; 1) = -1,616; \quad F''_e(0; 1) = 0,444. \quad (\text{E.22})$$

On cherche des solutions de l'équation de Blasius (E.17) et des conditions aux limites et de saut (E.18) sous la forme $f_a(\eta_a) = F_a(\eta_a; \tau_*)$ et $f_e(\eta_e) = F_e(\eta_e; u_*)$ où τ_* et u_* doivent être déterminés en fonction de χ .

Avant d'effectuer cette détermination, on définit la fonction $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$ dans l'intervalle $0 \leq u_* \leq 1$ à l'aide de la relation implicite

$$F'_a[0; \mathcal{T}_*(u_*)] = u_* \quad (\text{E.23})$$

qui permet de vérifier la condition de saut (E.18b-ii).

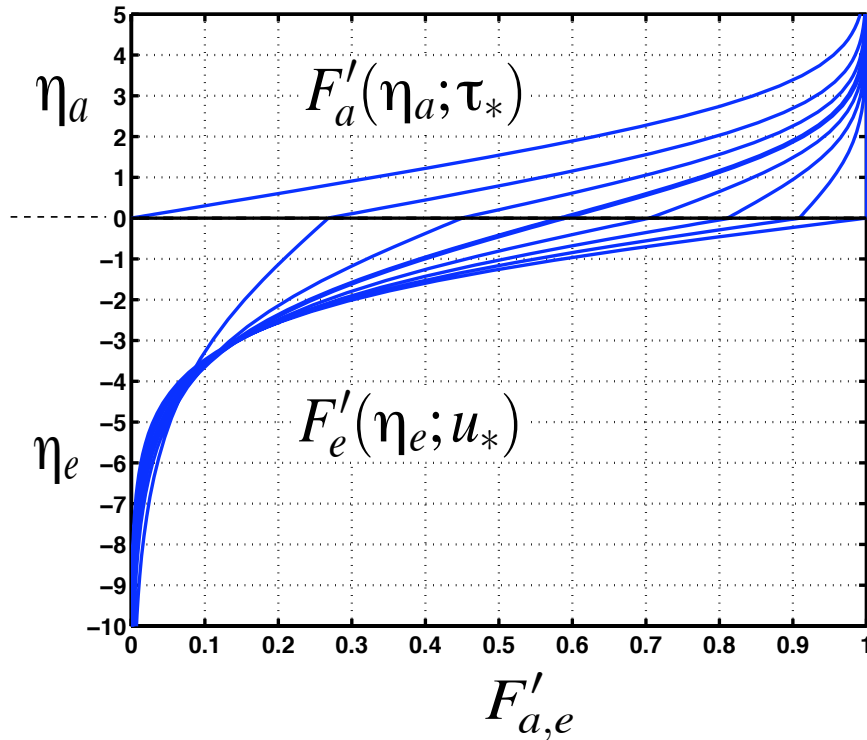


Figure 3: Familles de solutions de l'équation de Blasius. Profils en η_a des fonctions $F'_a(\eta_a; \tau_*)$ pour $\tau_* = 0,332; 0,30; 0,25; 0,20; 0,15; 0,10; 0,05; 0$. Profils en η_e des fonctions $F'_e(\eta_e; u_*)$ pour $u_* = 0; 0,27; 0,45; 0,59; 0,70; 0,81; 0,91; 1$.

La figure 3 représente les profils des fonctions $F'_a(\eta_a; \tau_*)$ et $F'_e(\eta_e; u_*)$ pour des couples de valeurs (u_*, τ_*) vérifiant (E.23).

À partir d'une lecture graphique de la figure 3 et d'une extrapolation linéaire à main levée entre huit valeurs de (u_*, τ_*) , tracer la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$ dans le domaine $0 \leq u_* \leq 1$, $0 \leq \tau_* \leq 0,332$. Ce tracé sera effectué sur l'un des graphes de la feuille recto-verso fournie en même temps que l'énoncé.

- 13.** La figure 3 permet également de repérer, dans le cadre de la précision du graphique, plusieurs couples (f_a, f_e) de solutions de l'équation de Blasius (E.17) vérifiant les conditions aux limites et conditions de saut (E.18) pour différents valeurs de χ .

Identifier sur la reproduction de la figure 3 fournie en même temps que l'énoncé :

- le couple A vérifiant $\chi = 0$,
- trois couples B , C et D vérifiant $\chi < 1$.
- le couple E vérifiant $\chi = 1$,

- deux couples F et G vérifiant $\chi > 1$,
- le couple I obtenu dans la limite $\chi \rightarrow \infty$.

À quels types de fluides correspondent les cas $\chi = 0$, $\chi = 1$ et $\chi = \infty$?

- 14.** En vue de démontrer (E.26), trouver une transformation affine laissant invariante l'équation de Blasius (E.17). On posera

$$f = A \hat{f}, \quad \eta = B \hat{\eta} \quad (\text{E.24})$$

et on indiquera la condition que doivent satisfaire les facteurs multiplicatifs A et B pour que l'équation soit invariante.

En déduire

$$\frac{f''(0)}{\hat{f}''(0)} = \left[\frac{f'(0)}{\hat{f}'(0)} \right]^\gamma, \quad (\text{E.25})$$

où γ est un exposant que l'on déterminera.

Déduire de la relation (E.25) et des données numériques de l'énoncé que

$$F_e''(0; u_*) = 0,444 u_*^{3/2}. \quad (\text{E.26})$$

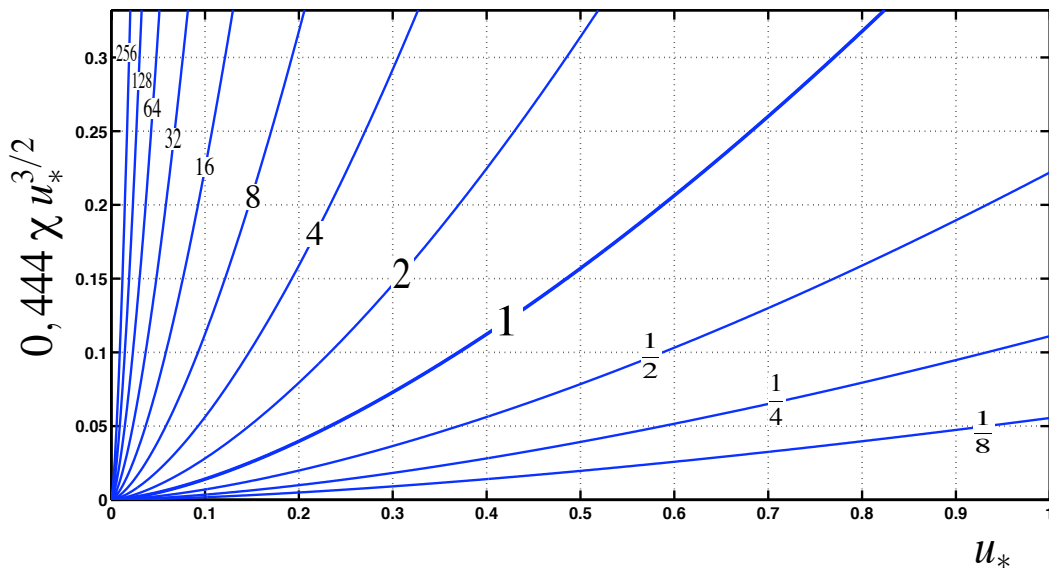


Figure 4: Tracés des fonctions $0,444 \chi u_*^{3/2}$ pour $\chi = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$.

- 15.** Déduire de **12** et **14** que si (f_a, f_e) est un couple solution du système (E.17-E.18) avec $f_a(\eta_a) = F_a(\eta_a; \tau_*)$ et $f_e(\eta_e) = F_e(\eta_e; u_*)$, alors on peut écrire

$$\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*) = 0,444 \chi u_*^{3/2}. \quad (\text{E.27})$$

Le tracé de $0,444\chi u_*^{3/2}$ en fonction de u_* est donné sur la figure 4 pour plusieurs valeurs du paramètre χ .

Exploiter la relation (E.27) et le tracé effectué en **12** pour proposer une méthode de résolution graphique permettant de déterminer la solution $u_* = \mathcal{U}_*(\chi)$ de l'équation implicite (E.27).

Pour de l'air soufflant sur l'eau, on a

$$\nu_a = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad \nu_e = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad \rho_a = 1 \text{ kg m}^{-3}, \quad \rho_e = 1 \, 000 \text{ kg m}^{-3}. \quad (\text{E.28})$$

Estimer les valeurs numériques de u_* et τ_* dans ce cas (on pourra utiliser $1/\sqrt{15} = 0,258$). En notant H le couple (f_a, f_e) correspondant à ces valeurs, tracer l'allure des profils $f'_a(\eta_a)$ et $f'_e(\eta_e)$ sur le second graphe de la feuille recto-verso distribuée en même temps que l'énoncé.

- 16.** Déterminer graphiquement les valeurs numériques de u_* et τ_* lorsque l'air et l'eau sont remplacés par un seul fluide de telle sorte que

$$\nu_a = \nu_e, \quad \rho_a = \rho_e. \quad (\text{E.29})$$

Tracer dans ce cas l'allure des profils $f'_a(\eta_a)$ et $f'_e(\eta_e)$ sur le second graphe de la feuille recto-verso distribuée en même temps que l'énoncé.

- 17.** En exploitant les propriétés d'invariance établies en **14**, montrer que

$$\frac{f(-\infty)}{\widehat{f}(-\infty)} = \left[\frac{f'(0)}{\widehat{f}'(0)} \right]^\beta, \quad (\text{E.30})$$

où β est un exposant que l'on déterminera.

Déduire de la relation (E.30) et de données numériques de l'énoncé que

$$F_e(-\infty; u_*) = -1,616 u_*^{1/2}. \quad (\text{E.31})$$

- 18.** On suppose que le forçage $(\rho_a, \nu_a, U_\infty)$ par le vent est fixé.

Montrer, en exploitant le résultat (E.31), que le débit de masse $Q(x) = \rho_e \int_{-\infty}^0 u_e(x, y) dy$ dans l'eau s'exprime en fonction de x et de χ sous la forme

$$\frac{Q(x)}{\rho_a \sqrt{U_\infty} \nu_a x} = 1,616 \chi \sqrt{\mathcal{U}_*(\chi)}. \quad (\text{E.32})$$

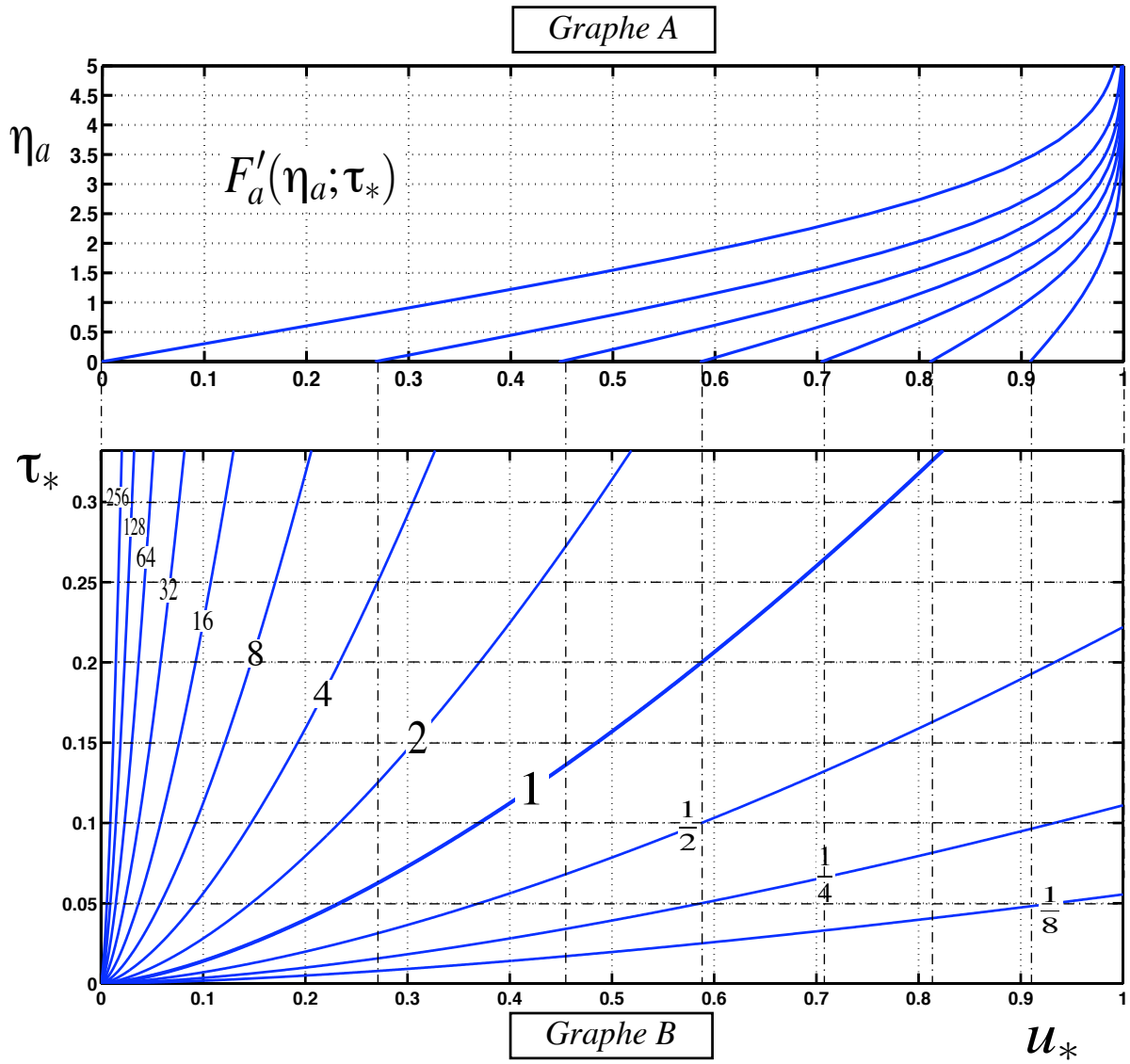
- 19.** A partir des courbes disponibles, tracer le graphe de

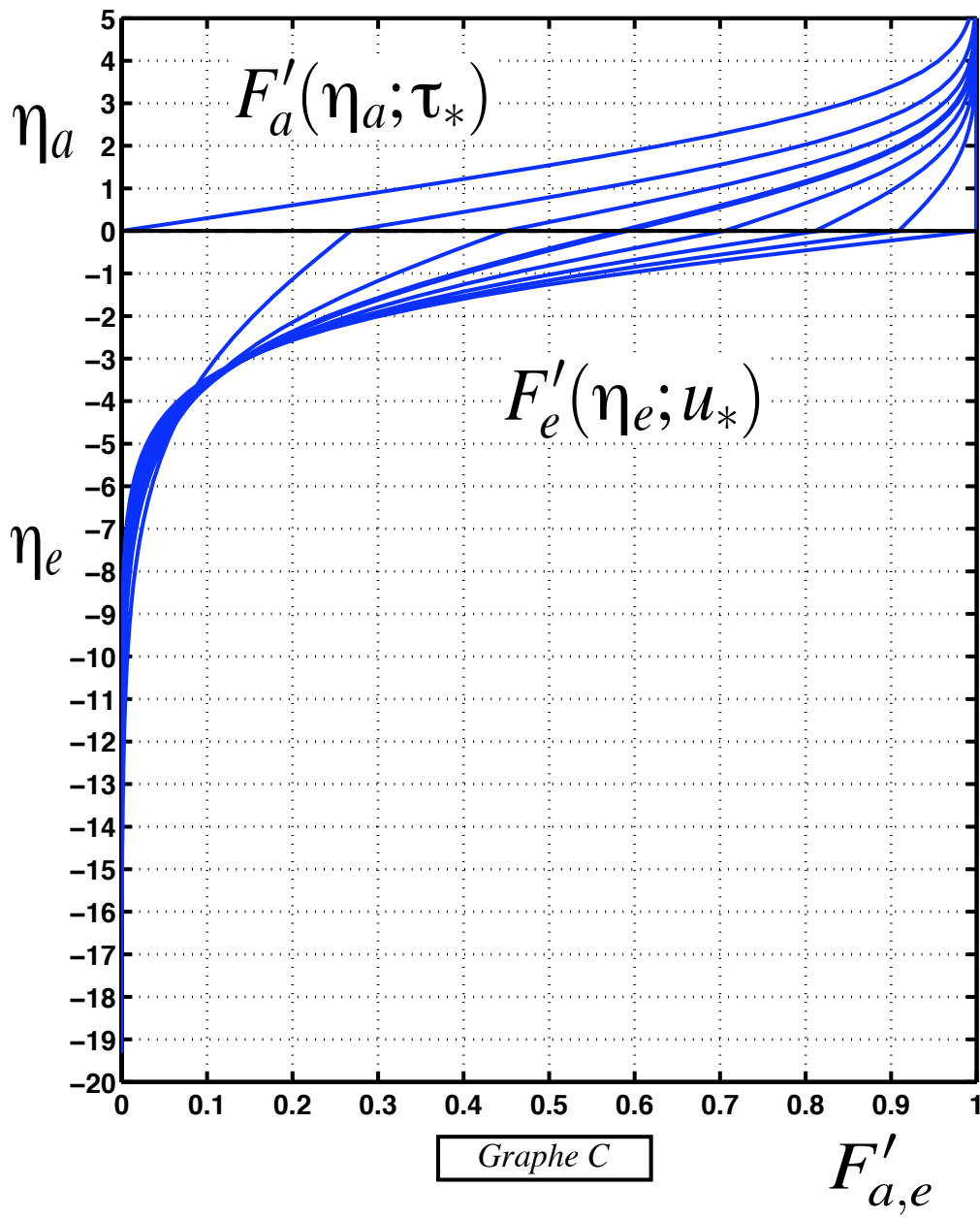
$$\mathcal{Q}_*(\chi) = \frac{Q(x)}{\rho_a \sqrt{U_\infty} \nu_a x} \quad (\text{E.33})$$

en fonction de χ et constater que c'est une fonction croissante de χ .

En déduire que plus la vitesse horizontale u_* est petite, plus le débit \mathcal{Q}_* du fluide e entraîné par le fluide a est grand.

Expliquer ce paradoxe.





CORRIGÉ

PREMIÈRE PARTIE : modèle de couches limites à l'interface (10 points)

1. L'équation de continuité $\text{div } \underline{U} = 0$ et la loi fondamentale de la dynamique $\rho_a \frac{d\underline{U}_a}{dt} = -\rho_a g \underline{e}_y - \text{grad } p_a + \rho_a \nu_a \Delta \underline{U}_a$ pour un fluide visqueux incompressible [cours écrit, chapitre IV, p. 89, édition 1998] conduisent, après utilisation des hypothèses de l'écoulement stationnaire bidimensionnel et en remarquant que $\text{grad } p_a = \text{grad } p'_a - \rho_a g \underline{e}_y$, au système

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} = 0, \quad (1a)$$

$$u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p'_a}{\partial x} + \nu_a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_a, \quad (1b)$$

$$u_a \frac{\partial v_a}{\partial x} + v_a \frac{\partial v_a}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p'_a}{\partial y} + \nu_a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_a. \quad (1c)$$

Compte tenu des précisions de l'énoncé, les conditions aux limites sur la vitesse \underline{U}_a et la pression p'_a s'écrivent bien :

$$u_a(x, y) \rightarrow U_\infty, \quad v_a(x, y) \rightarrow 0, \quad p'_a(x, y) \rightarrow 0, \quad |\underline{x}| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Le système d'équations fondamentales régissant l'écoulement de l'eau est le même que le système (1) à condition de changer l'indice a en e .

Les conditions à l'infini sur la vitesse \underline{U}_e s'écrivent :

$$u_e(x, y) \rightarrow 0, \quad v_e(x, y) \rightarrow 0, \quad |\underline{x}| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

2. Les conditions cinématiques [cours écrit, chapitre IV, p.92, équation (3.7)] s'écrivent

$$v_a(x, 0) = v_e(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Il n'y a pas de glissement de part et d'autre d'une surface de contact entre deux fluides newtoniens non-miscibles [cours écrit, chapitre IV, p. 93, équation (3.11)]. On a donc

$$u_a(x, 0) = u_e(x, 0). \quad (5)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses de l'air a pour composantes [cours écrit, annexe III, p. 327] :

$$\tau_{axx} = 2\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial x}, \quad \tau_{ayy} = 2\rho_a \nu_a \frac{\partial v_a}{\partial y}, \quad (6a)$$

$$\tau_{axy} = \tau_{ayx} = \rho_a \nu_a \left(\frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} \right). \quad (6b)$$

Il suffit de remplacer l'indice a par l'indice e pour obtenir les composantes de $\underline{\tau}_e$.

La condition dynamique à l'interface [cours écrit, chapitre IV, p. 93, équation (3.12)] s'écrit

$$p_a \underline{n} - \underline{\tau}_a \cdot \underline{n} = p_e \underline{n} - \underline{\tau}_e \cdot \underline{n}, \quad y = 0, \quad (7)$$

avec $\underline{n} = \underline{e}_y$. Les deux composantes de la relation (7) conduisent aux équations :

$$\tau_{axy}(x, 0) = \tau_{exy}(x, 0), \quad (8a)$$

$$-p_a(x, 0) + \tau_{ayy}(x, 0) = -p_e(x, 0) + \tau_{eyy}(x, 0). \quad (8b)$$

Les relations (4), (6b) et (8a) conduisent à

$$\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial y}(x, 0) = \rho_e \nu_e \frac{\partial u_e}{\partial y}(x, 0). \quad (9)$$

En remarquant que

$$p_a(x, 0) = p'_a(x, 0) \quad \text{et} \quad p_e(x, 0) = p'_e(x, 0), \quad (10)$$

et en utilisant les équations de continuité

$$\frac{\partial v_a}{\partial y} = -\frac{\partial u_a}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_e}{\partial y} = -\frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad (11)$$

les relations (6a) et (8b) conduisent à

$$p'_a(x, 0) - 2\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial x}(x, 0) = p'_e(x, 0) - 2\rho_e \nu_e \frac{\partial u_e}{\partial x}(x, 0). \quad (12)$$

3. Les équations fondamentales sous forme adimensionnelle s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (13a)$$

$$\bar{u}_a \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_a \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}'_a}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \bar{u}_a, \quad (13b)$$

$$\bar{u}_a \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_a \frac{\partial \bar{v}_a}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}'_a}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \bar{v}_a, \quad (13c)$$

pour l'air et

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (14a)$$

$$\bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{p}'_e}{\partial \bar{x}} + \frac{K}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \bar{u}_e, \quad (14b)$$

$$\bar{u}_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_e \frac{\partial \bar{v}_e}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{p}'_e}{\partial \bar{y}} + \frac{K}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \bar{v}_e, \quad (14c)$$

pour l'eau.

Les conditions à l'infini pour l'air et pour l'eau s'écrivent

$$\bar{u}_a(x, y) \rightarrow 1, \quad \bar{v}_a(x, y) \rightarrow 0, \quad \bar{p}'_a(x, y) \rightarrow 0, \quad |\underline{x}| \rightarrow \infty \quad (15a)$$

$$\bar{u}_e(x, y) \rightarrow 0, \quad \bar{v}_e(x, y) \rightarrow 0, \quad |\underline{x}| \rightarrow \infty. \quad (15b)$$

Les conditions à l'interface (4), (5), (9) et (12) deviennent

$$\bar{v}_a(\bar{x}, 0) = \bar{v}_e(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{u}_a(\bar{x}, 0) = \bar{u}_e(\bar{x}, 0), \quad (16a)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0), \quad \bar{p}'_a(\bar{x}, 0) - \frac{2}{Re} \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, 0) = \bar{p}'_e(\bar{x}, 0) - \frac{2\Lambda}{Re} \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, 0). \quad (16b)$$

où

$$\Lambda = \frac{\rho_e \nu_e}{\rho_a \nu_a} = J K. \quad (17)$$

4. En reportant les développements asymptotiques (E.10) dans (13) et (14), il vient à l'ordre dominant

$$\frac{\partial \bar{u}_{a0}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_{a0}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (18a)$$

$$\bar{u}_{a0} \frac{\partial \bar{u}_{a0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_{a0} \frac{\partial \bar{u}_{a0}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}'_{a0}}{\partial \bar{x}}, \quad (18b)$$

$$\bar{u}_{a0} \frac{\partial \bar{v}_{a0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_{a0} \frac{\partial \bar{v}_{a0}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}'_{a0}}{\partial \bar{y}} \quad (18c)$$

pour l'air et

$$\frac{\partial \bar{u}_{e0}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_{e0}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (19a)$$

$$\bar{u}_{e0} \frac{\partial \bar{u}_{e0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_{e0} \frac{\partial \bar{u}_{e0}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{p}'_{e0}}{\partial \bar{x}}, \quad (19b)$$

$$\bar{u}_{e0} \frac{\partial \bar{v}_{e0}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_{e0} \frac{\partial \bar{v}_{e0}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{p}'_{e0}}{\partial \bar{y}} \quad (19c)$$

pour l'eau.

Les conditions à l'infini applicables à l'air sont, à l'ordre dominant :

$$\bar{U}_{a0}(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \underline{e}_x, \quad \bar{p}'_{a0}(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow 0, \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty. \quad (20)$$

La condition à l'infini applicable à l'eau est, à l'ordre dominant :

$$\bar{U}_{e0}(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow \underline{0}, \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Les conditions de saut à l'interface air-eau (E.16) deviennent, à l'ordre dominant :

$$\bar{v}_{a0}(\bar{x}, 0) = \bar{v}_{e0}(\bar{x}, 0) = 0, \quad (22a)$$

$$\bar{u}_{a0}(\bar{x}, 0) = \bar{u}_{e0}(\bar{x}, 0), \quad (22b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{a0}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \bar{u}_{e0}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0), \quad (22c)$$

$$\bar{p}'_{a0}(\bar{x}, 0) = \bar{p}'_{e0}(\bar{x}, 0). \quad (22d)$$

5. À l'ordre dominant, les deux fluides se comportent comme des fluides parfaits non miscibles. Les conditions à l'interface de deux tels fluides se réduisent à la continuité de la vitesse normale et de la pression [cours écrit, chapitre IV, paragraphe 3.2, pp 92-94]. Pour le cas qui nous intéresse, ce sont les conditions (22a) et (22d). Il n'existe pas de solution vérifiant toutes les équations (18), (19), (20), (21) et (22). En effet, l'ordre des dérivées spatiales des équations (18) et (19) est inférieur d'une unité à celui des équations (13) et (14).

La solution évidente vérifiant (18), (19), (20), (21), (22a) et (22d) est celle correspondant à l'écoulement de fluide parfait :

$$\bar{U}_{a0} = \underline{e}_x, \quad \bar{U}_{e0} = \underline{0}, \quad \bar{p}'_{a0} = \bar{p}'_{e0} = 0. \quad (23)$$

Les conditions auxquelles il a fallu renoncer sont les relations de saut(22b) et (22c) :

$$\bar{u}_{a0}(\bar{x}, 0) = \bar{u}_{e0}(\bar{x}, 0), \quad \frac{\partial \bar{u}_{a0}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \bar{u}_{e0}}{\partial \bar{y}}(\bar{x}, 0). \quad (24)$$

6. En s'appuyant sur le cours écrit [chapitre IX, équations (3.23)-(3.25)], on trouve que les

équations de Navier-Stokes exprimées en variables intérieures s'écrivent :

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (25a)$$

$$\tilde{u}_a \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}'_a}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re \delta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \tilde{u}_a, \quad (25b)$$

$$\tilde{u}_a \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{v}_a}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{p}'_a}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re \delta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \tilde{v}_a, \quad (25c)$$

pour l'air et

$$\frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (26a)$$

$$\tilde{u}_e \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \tilde{v}_e \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{p}'_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{K}{Re \delta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \tilde{u}_e, \quad (26b)$$

$$\tilde{u}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\delta} \tilde{v}_e \frac{\partial \tilde{v}_e}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{J \delta} \frac{\partial \tilde{p}'_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{K}{Re \delta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \right) \tilde{v}_e, \quad (26c)$$

pour l'eau.

De plus, les conditions à l'infini applicables à l'air sont :

$$\tilde{U}_a(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow \underline{e}_x, \quad \tilde{p}'_a(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow 0, \quad |\tilde{x}| \rightarrow \infty. \quad (27)$$

La condition à l'infini applicable à l'eau est :

$$\tilde{U}_e(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow \underline{0}. \quad (28)$$

Les conditions de saut à l'interface air-eau (16) deviennent en variables intérieures :

$$\tilde{v}_a(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_e(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{u}_a(\tilde{x}, 0) = \tilde{u}_e(\tilde{x}, 0), \quad (29a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0), \quad \tilde{p}'_a(\tilde{x}, 0) - \frac{2}{Re} \frac{\partial \tilde{u}_a}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 0) = \tilde{p}'_e(\tilde{x}, 0) - \frac{2\Lambda}{Re} \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{x}}(\tilde{x}, 0). \quad (29b)$$

7. Le raisonnement est identique à celui du cours écrit [chapitre IX, pp. 268-269]. En reportant (E.11) dans les équations (25a), (26a) et (29a), il vient à l'ordre dominant :

$$\frac{\partial \tilde{v}_{a0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial \tilde{v}_{e0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \quad (30a)$$

$$\tilde{v}_{a0}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_{e0}(\tilde{x}, 0) = 0. \quad (30b)$$

On en déduit immédiatement que

$$\tilde{v}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{v}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 . \quad (31)$$

Les équations de continuité (25a) et (26a) s'écrivent donc à l'ordre dominant :

$$\frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{\eta}_1}{\bar{\delta}} \frac{\partial \tilde{v}_{a1}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\tilde{\eta}_1}{\bar{\delta}} \frac{\partial \tilde{v}_{e1}}{\partial \tilde{y}} = 0 . \quad (32)$$

Pour qu'elles ne soient pas dégénérées, il faut que

$$\bar{\delta}(Re) = \tilde{\eta}_1(Re) , \quad (33)$$

auquel cas (32) devient :

$$\frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_{a1}}{\partial \tilde{y}} = 0 , \quad (34)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_{e1}}{\partial \tilde{y}} = 0 . \quad (35)$$

Compte tenu des résultats précédents, le premier membre de (25b) et (26b) est $O(1)$. Pour préserver le terme de dérivée seconde au second membre de (25b) et (26b), il faut donc choisir $\bar{\delta}(Re)$ tel que

$$\frac{1}{Re \bar{\delta}^2} = 1 , \quad (36)$$

c'est-à-dire

$$\bar{\delta}(Re) = Re^{-1/2} . \quad (37)$$

À l'ordre le plus bas, (25b) et (26b) s'écrivent donc

$$\tilde{u}_{a0} \frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{a0} \frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}'_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}^2} , \quad (38)$$

$$\tilde{u}_{e0} \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{e0} \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{p}'_{e0}}{\partial \tilde{x}} + K \frac{\partial^2 \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}^2} . \quad (39)$$

De même (25c) et (26c) s'écrivent à l'ordre dominant

$$\frac{\partial \tilde{p}'_{a0}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{p}'_{e0}}{\partial \tilde{y}} = 0 , \quad (40)$$

d'où

$$\tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}) \quad \text{seulement,} \quad (41)$$

$$\tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}) \quad \text{seulement.} \quad (42)$$

Les équations de la couche limite à l'ordre dominant sont donc constituées, pour l'air de (34), (38) et (41) et, pour l'eau de (35), (39), et (42).

À l'ordre dominant, les conditions de saut à l'interface (29) s'écrivent :

$$\tilde{v}_{a1}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_{e1}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{u}_{a0}(\tilde{x}, 0) = \tilde{u}_{e0}(\tilde{x}, 0), \quad (43a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0), \quad \tilde{p}'_a(\tilde{x}, 0) = \tilde{p}'_e(\tilde{x}, 0). \quad (43b)$$

8. En admettant que les limites existent, les règles de raccord s'écrivent

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} [\tilde{u}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y})] = \lim_{\bar{y} \rightarrow 0} [\bar{u}_{a0}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{v}_{a0}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}'_{a0}(\bar{x}, \bar{y})], \quad (44a)$$

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow -\infty} [\tilde{u}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y})] = \lim_{\bar{y} \rightarrow 0} [\bar{u}_{e0}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{v}_{e0}(\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}'_{e0}(\bar{x}, \bar{y})]. \quad (44b)$$

Étant donné que $\tilde{v}_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{v}_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ et le caractère trivial des solutions extérieures à l'ordre dominant (23), les règles de raccord reviennent à appliquer aux solutions intérieures les conditions à l'infini suivantes :

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}_{a0} = 1, \quad \lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}'_{a0} = 0, \quad \lim_{\tilde{y} \rightarrow -\infty} \tilde{u}_{e0} = 0, \quad \lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{p}'_{e0} = 0. \quad (45)$$

Comme $\tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}'_{a0}(\tilde{y})$ seulement et $\tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{p}'_{e0}(\tilde{y})$ seulement, on en déduit que

$$\tilde{p}'_{a0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0, \quad \tilde{p}'_{e0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{pour tout } (\tilde{x}, \tilde{y}). \quad (46)$$

Les équations de Prandtl (38) et (39) s'écrivent donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_{a1}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}_{a0} \frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{a1} \frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \tilde{p}'_{a0} = 0, \quad (47a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_{e1}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{u}_{e0} \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_{e1} \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}} = K \frac{\partial^2 \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad \tilde{p}'_{e0} = 0, \quad (47b)$$

avec les conditions à l'infini

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} \tilde{u}_{a0} = 1, \quad \lim_{\tilde{y} \rightarrow -\infty} \tilde{u}_{e0} = 0, \quad (48)$$

et les conditions de saut

$$\tilde{v}_{a1}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_{e1}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{u}_{a0}(\tilde{x}, 0) = \tilde{u}_{e0}(\tilde{x}, 0), \quad \frac{\partial \tilde{u}_{a0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0) = \Lambda \frac{\partial \tilde{u}_{e0}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{x}, 0). \quad (49)$$

9. L'étude d'un champ de vitesse bidimensionnel d'un fluide incompressible se ramène à la recherche d'une seule fonction de courant. Les équations de Prandtl (47) conduisent, en variables dimensionnelles, aux équations (E.14). En remarquant que la condition (49i) $\frac{\partial \psi_e}{\partial x} = \frac{\partial \psi_a}{\partial x}$ s'intègre en $\psi_e = \psi_a =$ "constante" sur l'axe Ox et que l'on peut choisir la constante comme étant nulle, on constate que les conditions aux limites (48) s'expriment sous la forme (E.14c) et

que les conditions de saut (49) s'expriment sous la forme (E.14d).

DEUXIÈME PARTIE : couches limites auto-semblables (10 points)

10. En reportant les expressions (E.15)-(E.16) dans les équations aux dérivées partielles (E.14a)-(E.14b), on vérifie, directement ou par analogie avec le cours écrit [p. 280], que les fonctions $f_a(\eta_a)$ et $f_e(\eta_e)$ vérifient l'équation de Blasius

$$2f''' + ff'' = 0. \quad (50)$$

En reportant les expressions (E.15)-(E.16) dans les conditions à l'infini (E.14c), on vérifie que l'on a :

$$f'_a(+\infty) = 1, \quad f'_e(-\infty) = 0. \quad (51)$$

En reportant les expressions (E.15)-(E.16) dans les conditions aux limites (E.14di-iii), on obtient

$$f_a(0) = f_e(0) = 0, \quad f'_a(0) = f'_e(0), \quad f''_a(0) = \chi f''_e(0), \quad (52)$$

où χ est le nombre sans dimension

$$\chi = \Lambda \left(\frac{\nu_a}{\nu_e} \right)^{1/2}, \quad (53)$$

soit, compte-tenu de (E.9) est des définitions de J et K :

$$\chi = \frac{\rho_e}{\rho_a} \left(\frac{\nu_e}{\nu_a} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

11. Compte tenu de (E.13iii), (E.15ii) et (E.16ii), il vient

$$u_e = U_\infty f'_e(\eta_e), \quad (55)$$

soit

$$u_e(x, 0) = U_\infty f'_e(0), \quad (56)$$

soit, en raison de (E.19ii),

$$u_e(x, 0) = U_\infty u_*. \quad (57)$$

Compte tenu de (E.13i), (E.15i) et (E.16i), il vient :

$$u_a = U_\infty f'_a(\eta_a). \quad (58)$$

Compte tenu de (58) et (E.16ii), on peut écrire

$$\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial y}(x, 0) = \rho_a \nu_a \frac{U_\infty^{3/2}}{(\nu_a x)^{1/2}} f''_a(0), \quad (59)$$

soit, en raison de (E.19ii),

$$\rho_a \nu_a \frac{\partial u_a}{\partial y}(x, 0) = \rho_a \left(\frac{\nu_a U_\infty}{x} \right)^{1/2} U_\infty \tau_* . \quad (60)$$

Par définition, cette expression représente la contrainte de cisaillement exercée par l'air sur l'interface $y = 0$.

12. Il suffit de reporter, dans le plan $u_* - \tau_*$ (figure 5), les couples de valeurs de (u_*, τ_*) associées à chacun des profils $F'_a(\eta_a; \tau_*)$ et $F'_e(\eta_e; u_*)$ représentés sur la figure 3. Ces valeurs sont précisées dans la légende de la figure 3 :

$$(u_*, \tau_*) = (0, 332); (0, 27; 0, 30); (0, 45; 0, 25); (0, 59; 0, 20); \\ (0, 70; 0, 15); (0, 81; 0, 10); (0, 91; 0, 05); (1; 0) .$$

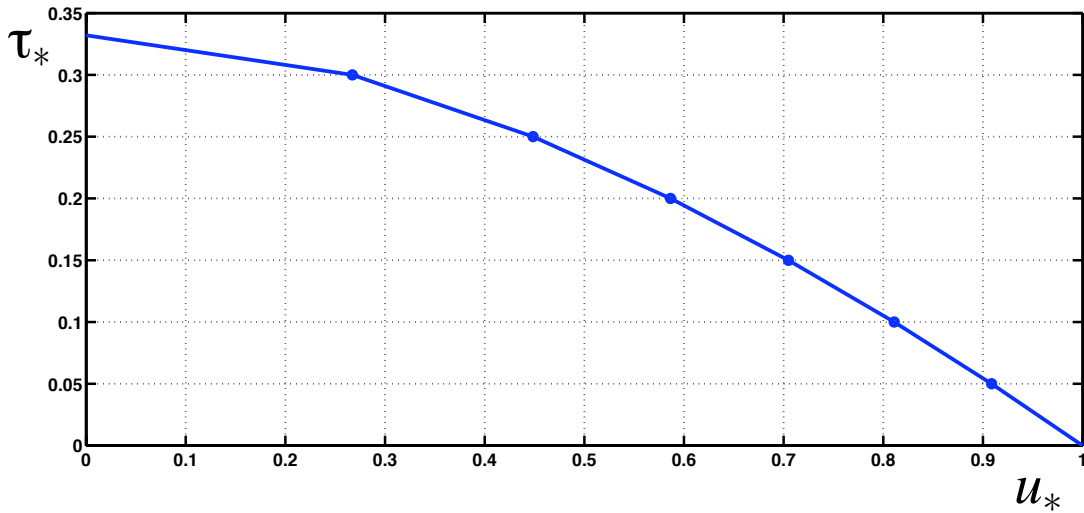


Figure 5: Allure de la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$.

13. L'identification des couples de solutions (f_a, f_e) est indiquée sur la figure 6.

La solution A ($\chi = 0$) correspond au cas où le fluide supérieur est tellement visqueux qu'il peut être assimilé à un solide en translation uniforme.

La solution E ($\chi = 1$) correspond au cas où les fluides supérieurs et inférieurs sont identiques. On obtient alors un profil continu à l'interface.

La solution I ($\chi = \infty$) correspond au cas où le fluide inférieur est tellement visqueux qu'il peut être assimilé à un solide au repos.

14. En appliquant la transformation affine (E.24) à (E.17) il vient

$$\frac{2}{AB} f''' + f f'' = 0 . \quad (61)$$

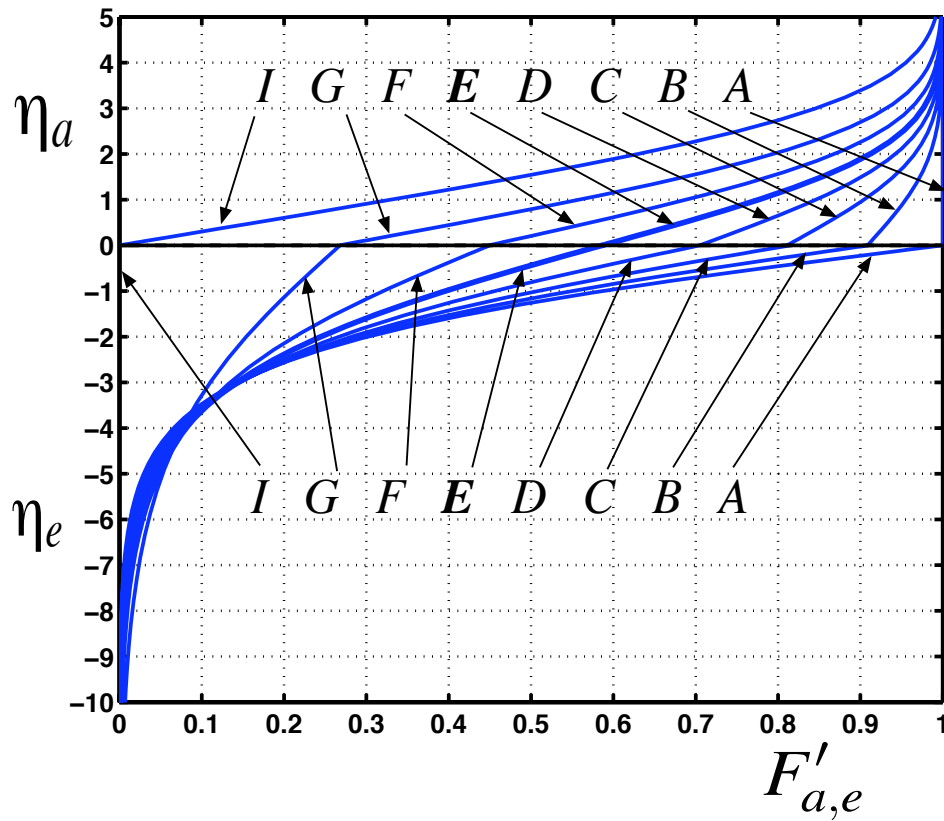


Figure 6: Identification des couples de solutions (f_a, f_e) .

Pour que (E.17) soit invariante, il faut donc que A et B vérifient

$$AB = 1. \quad (62)$$

L'équation est donc invariante par la transformation

$$f = A \hat{f}, \quad \eta = \frac{1}{A} \hat{\eta}, \quad (63)$$

soit, de façon équivalente,

$$\hat{f}(\hat{\eta}) = \frac{1}{A} f\left(\frac{\hat{\eta}}{A}\right). \quad (64)$$

On a donc également

$$\hat{f}'(\hat{\eta}) = \frac{1}{A^2} f'\left(\frac{\hat{\eta}}{A}\right), \quad (65)$$

et

$$\widehat{f}''(\widehat{\eta}) = \frac{1}{A^3} f''\left(\frac{\widehat{\eta}}{A}\right). \quad (66)$$

En appliquant (65) et (66) en $\widehat{\eta} = 0$ et après élimination de A entre les deux relations ainsi obtenues, on trouve que deux solutions f et \widehat{f} de l'équation de Blasius doivent nécessairement vérifier

$$\frac{f''(0)}{\widehat{f}''(0)} = \left[\frac{f'(0)}{\widehat{f}'(0)} \right]^{3/2}, \quad (67)$$

soit donc $\gamma = 3/2$.

En choisissant

$$f'(0) = F_e'(0; u_*), \quad f''(0) = F_e''(0; u_*), \quad (68a)$$

$$\widehat{f}'(0) = F_e'(0; 1), \quad \widehat{f}''(0) = F_e''(0; 1), \quad (68b)$$

et en tenant compte de (E.21i) et (E.22iii), il vient :

$$\frac{F_e''(0; u_*)}{0,444} = \left(\frac{u_*}{1} \right)^{3/2}, \quad (69)$$

d'où

$$F_e''(0; u_*) = 0,444 u_*^{3/2}. \quad (70)$$

15. Par construction, les fonctions $F_a(\eta_a; \tau_*)$ et $F_e(\eta_e; u_*)$ vérifient (E.17), (E.18a) et (E.18bi). La condition de saut (E.18bii) est également vérifiée si l'on choisit

$$\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*) \quad (71)$$

comme indiqué graphiquement dans la figure 5.

Il reste à appliquer la condition de saut (E.18biii), à savoir

$$F_a''(0; \tau_*) = \chi F_e''(0; u_*). \quad (72)$$

D'après (E.20iii)

$$F_a''(0; \tau_*) = \tau_*, \quad (73)$$

et $F_e''(0; u_*)$ est donné par (E.26). La condition de saut (72) entraîne donc

$$\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*) = 0,444 \chi u_*^{3/2}. \quad (74)$$

Il suffit de tracer la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$ représentée à la question **12** sur le graphe de la figure 4 (voir figure 7). Pour une valeur de χ donnée, le point d'intersection de la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$

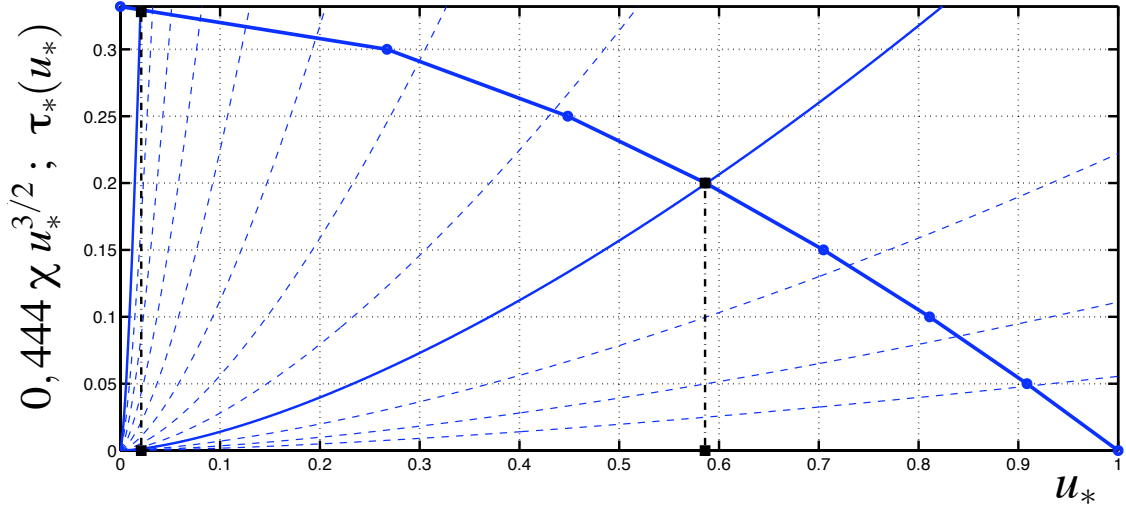


Figure 7: Résolution graphique permettant de déterminer le couple (u_*, τ_*) .

et de la courbe $\tau_* = 0,444 \chi u_*^{2/3}$ permet de déterminer le couple (u_*, τ_*) solution du problème (E.17)-(E.18).

Pour de l'air soufflant sur de l'eau, on a

$$\chi = \frac{\rho_e}{\rho_a} \left(\frac{\nu_e}{\nu_a} \right)^{1/2} = \frac{1\,000}{\sqrt{15}} \sim 258. \quad (75)$$

Le tracé de la courbe $0,444 \chi u_*^{3/2}$ correspondante est indiqué en trait gras sur la figure 7. Son point d'intersection avec la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$ conduit au couple de valeurs

$$u_* = 0,02, \quad \tau_* = 0,33. \quad (76)$$

Pour ces valeurs, le profil de vitesse a l'allure indiquée sur la figure 8a).

16. Dans ce cas, on a $\chi = 1$. Le tracé de la courbe $0,444 \chi u_*^{3/2}$ correspondant est indiqué en trait gras sur la figure 7. Son point d'intersection avec la courbe $\tau_* = \mathcal{T}_*(u_*)$ conduit au couple de valeurs

$$u_* = 0,59, \quad \tau_* = 0,20. \quad (77)$$

Pour ces valeurs, le profil de vitesse a l'allure indiquée sur la figure 8b). Dans le cadre de la précision de ces valeurs, il s'agit du couple E de la figure 3 (c'est une coïncidence).

17. D'après (64)

$$\hat{f}(\hat{\eta}) = \frac{1}{A} f \left(\frac{\hat{\eta}}{A} \right), \quad (78)$$

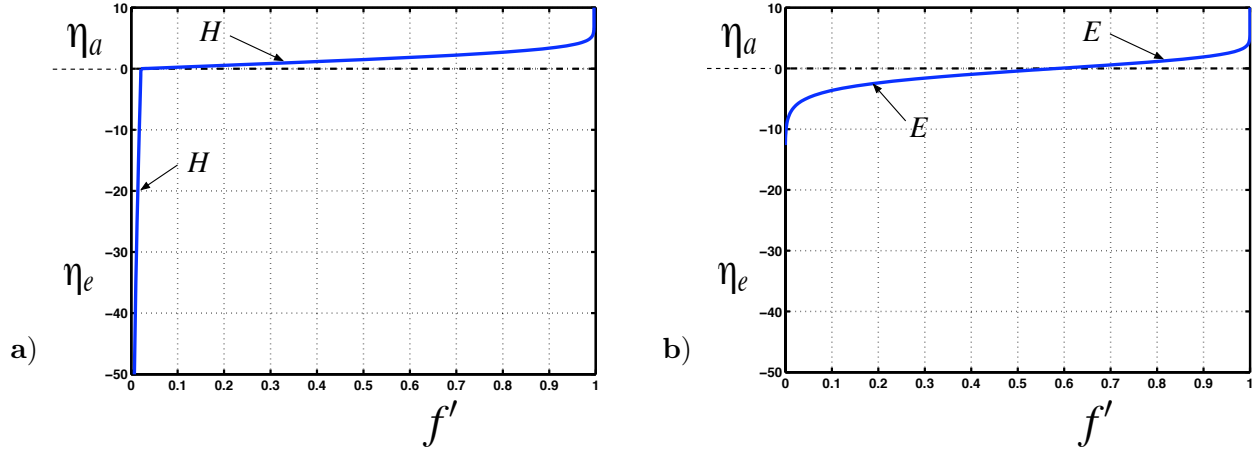


Figure 8: (a) Profils des vitesses à l'interface air-eau pour $\chi = 258$. (b) Profils des vitesses pour $\chi = 1$.

et donc

$$\widehat{f}'(\widehat{\eta}) = \frac{1}{A^2} f' \left(\frac{\widehat{\eta}}{A} \right). \quad (79)$$

En appliquant (78) en $\widetilde{\eta} = -\infty$ et (79) en $\widetilde{\eta} = 0$, et après élimination de A entre les deux relations ainsi obtenues, on trouve que deux solutions f et \widehat{f} de l'équation de Blasius doivent nécessairement vérifier :

$$\frac{f(-\infty)}{\widehat{f}(-\infty)} = \left[\frac{f'(0)}{\widehat{f}'(0)} \right]^{1/2}. \quad (80)$$

soit donc $\beta = 1/2$.

En choisissant

$$f(-\infty) = F_e(-\infty; u_*), \quad f'(0) = F'_e(0; u_*), \quad (81a)$$

$$\widehat{f}(-\infty) = F_e(-\infty; 1), \quad \widehat{f}'(0) = F'_e(0; 1), \quad (81b)$$

et en tenant compte de (E.21i) et (E.22i), il vient :

$$\frac{F_e(-\infty; u_*)}{-1,616} = \left(\frac{u_*}{1} \right)^{1/2}, \quad (82)$$

d'où

$$F_e(-\infty; u_*) = -1,616 u_*^{1/2}. \quad (83)$$

18. En reportant (55) dans la définition de $Q(x)$ et en effectuant le changement de variable (E.16ii), il vient

$$Q(x) = \rho_e (U_\infty \nu_e x)^{1/2} \int_{-\infty}^0 f_e'(\eta) d\eta, \quad (84)$$

soit

$$Q(x) = \rho_e (U_\infty \nu_e x)^{1/2} [f_e(0) - f_e(-\infty)], \quad (85)$$

soit, en tenant compte de (E.18bi) et (83)

$$Q(x) = 1,616 \rho_e (U_\infty \nu_e x)^{1/2} u_*^{1/2}, \quad (86)$$

c'est-à-dire

$$\frac{Q(x)}{\rho_a (U_\infty \nu_a x)^{1/2}} = 1,616 \chi \sqrt{u_*(\chi)}. \quad (87)$$

19. La lecture des valeurs de u_* sur la figure 7 permet de tracer le graphe de la fonction Q_* en fonction de χ (figure 9).

On constate que Q_* est une fonction croissante de χ .

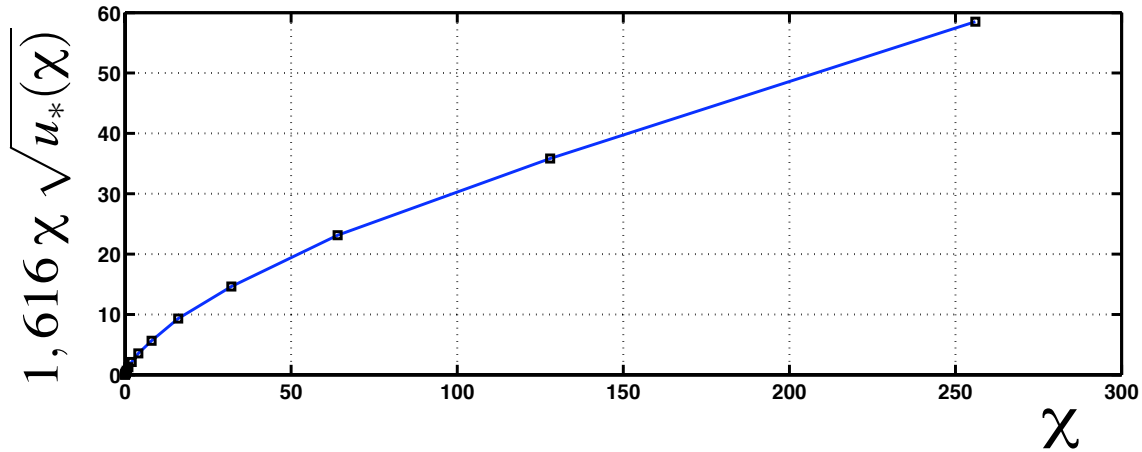


Figure 9: Tracé approximatif du graphe de Q_* en fonction de χ à partir des couples de valeurs $(\chi, u_*) = (0; 1), (1/8; 0,92), (1/4; 0,84), (1/2; 0,73), (1; 0,59), (2; 0,43), (4; 0,3), (8; 0,19), (16; 0,13), (32; 0,08), (64; 0,05), (128; 0,03), (256; 0,02)$ lues sur la figure 7.

Lorsque χ augmente, la vitesse à l'interface $U_\infty U_*(\chi)$, qui résulte de l'entraînement du fluide e par le fluide a diminue tandis le débit de masse $Q(x)$ dans le fluide e augmente.

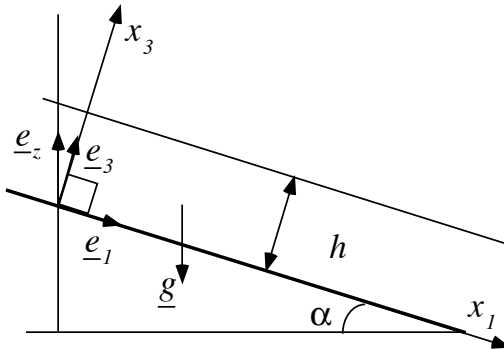
On explique ce paradoxe de la manière suivante : la taille de couche limite du fluide e augmente avec χ de sorte que $\chi \sqrt{u_*(\chi)}$ reste croissant. Les particules de la couche e vont moins vite lorsque χ est grand, mais un plus grand nombre d'entre elles sont entraînées.

EPAISSEUR DE DÉCLENCHEMENT D'UNE AVALANCHE

Version 3

Énoncé

On modélise ici le comportement d'une couche de neige ou de boue sur un plan incliné de pente constante. On cherche à déterminer la hauteur critique à partir de laquelle se déclenche une avalanche. Dans tout le problème, on néglige l'effet des changements de température, ce qui revient à se placer dans le cadre d'une modélisation isotherme.



On considère un référentiel \mathcal{R} muni d'un repère cartésien orthonormé $R = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ dans lequel le champ de gravité s'écrit $\underline{g} = -g \underline{e}_z$. Étant donné un plan incliné P_0 faisant un angle α avec l'horizontale, on définit un deuxième repère $R' = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ à l'aide des relations

$$\underline{e}_1 = \cos \alpha \underline{e}_x - \sin \alpha \underline{e}_z, \quad \underline{e}_2 = \underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{e}_3 = \sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_z. \quad (1)$$

Dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les relations

$$x_1 = X_1 + \xi_1(X_3), \quad x_2 = X_2 \quad \text{et} \quad x_3 = X_3 + \xi_3(X_3) \quad (2)$$

décrivent la transformation $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X})$ qui associe au vecteur $\underline{X} = \underline{OM}_0$ d'une configuration de référence Ω_0 le vecteur $\underline{x} = \underline{OM}$ de la configuration déformée Ω_t à l'instant t . On suppose que ξ_1 et ξ_3 sont des fonctions continues et continûment différentiables et que l'on a $\xi_3(0) = 0$.

- 1) Calculer le gradient $\underline{F}(\underline{X})$ de la transformation. Que vaut la fonction $\xi_3(X_3)$ si le milieu est incompressible ?

On suppose que le comportement rhéologique du milieu peut être modélisé par celui d'un matériau homogène, élastique, incompressible, de masse volumique ρ_0 , obéissant au modèle "Néo-Hookien" qui s'écrit, dans la configuration déformée :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mu \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} + \eta(\underline{x}) \underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad \det \underline{\underline{F}} = 1, \quad (3)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, μ est le module d'élasticité caractéristique du matériau, et $\eta(\underline{x})$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. La configuration de référence Ω_0 est libre de contraintes.

2) Donner l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ en fonction de $\eta(\underline{x})$ et $\xi_1(x_3)$.

On suppose que, dans la configuration déformée Ω_t , le matériau est compris entre le plan incliné P_0 , d'équation $x_3 = 0$ et le plan P_h d'équation $x_3 = h$. On suppose que le matériau adhère parfaitement (déplacements nuls) au plan incliné P_0 , sauf en cas de rupture, et qu'il est contact avec l'air, qui exerce une pression uniforme p_a , sur le plan P_h .

3) Écrire, pour la configuration déformée Ω_t , les conditions aux limites sur les deux plans P_0 et P_h . Préciser les conditions que doivent satisfaire ξ_1 et η .

4) Écrire l'équilibre des forces et utiliser ces conditions aux limites pour en déduire η et ξ_1 .

5) Montrer que le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit alors

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \mu \left[\Lambda^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Lambda (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \right]. \quad (4)$$

où $p(x_3)$ et $\Lambda(x_3)$ sont des fonctions que l'on précisera.

6) Donner l'expression de la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$ que l'on notera $\underline{\underline{s}}$.

On suppose qu'il y a rupture lorsque le critère de von Mises $f(\underline{\underline{s}}) = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} - k \geq 0$ est atteint, et qu'une avalanche se déclenche lorsque tous les points d'une même surface ont atteint ou dépassé ce critère. On fait croître l'épaisseur h suffisamment lentement avec le temps pour que le système soit à tout instant à l'équilibre et l'on s'intéresse au chargement critique $h = h_c$ à partir duquel une avalanche se déclenche.

7) Montrer que la rupture se produit d'abord au contact entre le matériau et le plan incliné.

8) Calculer la hauteur critique h_c pour laquelle se déclenche l'avalanche.

Corrigé

1) Le gradient de la transformation est $\underline{\underline{F}}(\underline{X}) = \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \xi_1'(X_3) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \xi_3'(X_3) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. La contrainte d'incompressibilité $\det \underline{\underline{F}} = 1$ entraîne $\xi_3'(X_3) = 0$, et donc $\xi_3(X_3) = 0$ en utilisant la condition aux limites en déplacement $\xi_3(0) = 0$.

2) Le tenseur des contraintes s'écrit alors

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mu \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} + \eta \underline{\underline{\mathbb{I}}} = [\mu + \eta(\underline{x})] \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \mu \left[\xi_1'^2(x_3) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \xi_1'(x_3) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \right]. \quad (5)$$

3) Une première condition est $\xi_1(0) = 0$. La continuité $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = -p_a \underline{n}$ des efforts surfaciques à la surface du matériau s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_1, x_2, h) \cdot \underline{e}_3 = \mu \xi_1'(h) \underline{e}_1 + [\mu + \eta(x_1, x_2, h)] \underline{e}_3 = -p_a \underline{e}_3. \quad (6)$$

On en déduit que $\xi_1'(h) = 0$ et $\eta(x_1, x_2, h) = -\mu - p_a$.

4) L'équilibre des forces entraîne

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \rho_0 \underline{g} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \mu \xi_1'' + \rho_0 g \sin \alpha \right) \underline{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} - \rho_0 g \cos \alpha \right) \underline{e}_3 = \underline{0}. \quad (7)$$

En utilisant les conditions aux limites, on en déduit

$$\eta(\underline{x}) = -\mu - p_a + (\rho_0 g \cos \alpha) (x_3 - h) \quad \text{et} \quad \xi_1(x_3) = -\frac{\rho_0 g \sin \alpha}{2\mu} x_3 (x_3 - 2h). \quad (8)$$

5) En notant $p(x_3) = p_a + (\rho_0 g \cos \alpha) (h - x_3)$ et $\Lambda(x_3) = \xi_1'(x_3) = \frac{\rho_0 g \sin \alpha}{\mu} (h - x_3)$, le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\mathbb{I}}} + \mu \left[\Lambda^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Lambda (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \right]. \quad (9)$$

6) La partie déviatorique $\underline{\underline{s}}$ est

$$\underline{\underline{s}} = \mu \left[\frac{2\Lambda^2}{3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\Lambda^2}{3} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) + \Lambda (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \right]. \quad (10)$$

7) Le critère de Von Mises $f(\underline{\underline{s}}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} - k \geq 0$ est atteint lorsque

$$\Lambda^4 + 3\Lambda^2 - \frac{3k^2}{\mu^2} \geq 0 \quad \iff \quad \Lambda^2 \geq \Lambda_c^2 = \frac{3}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4k^2}{3\mu^2}} - 1 \right). \quad (11)$$

Comme $\Lambda(x_3)$ est maximale en $x_3 = 0$, le plan P_0 est le lieu où doit se produire la rupture lorsque le seuil est atteint.

8) La hauteur maximale h_c au-delà de laquelle il y a rupture dans le milieu est alors :

$$h_c = \frac{\mu}{\rho_0 g \sin \alpha} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{4k^2}{3\mu^2}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Contrôle Classant

Mécanique des Milieux Continus, MEC 431
Sujet proposé par Olivier Thual et Patrick Le Tallec
Durée 4h

26 janvier 2006

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les trois problèmes sont indépendants. Le troisième problème devra être rédigé sur une copie distincte des deux autres.

Problème 1 Méthode des déplacements Essai triaxial en grandes transformations élastiques

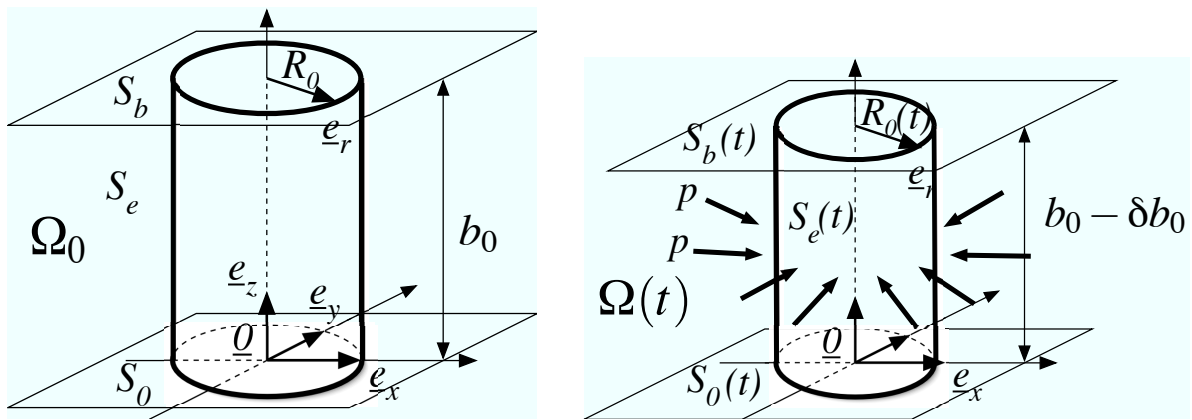


Figure 1: Géométrie de l'essai triaxial. Configuration initiale et configuration déformée.

On considère un matériau élastique compressible dont l'énergie libre, fonction de la température T et du tenseur des déformations de Green Lagrange $\underline{\underline{e}}$ entre configuration actuelle et configuration initiale, est supposée de la forme

$$\rho_0 \psi(\underline{\underline{e}}, T) = \frac{\lambda(T)}{2} \text{tr}^2 \underline{\underline{e}} + \mu(T) \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} - k(T - T_0) \text{tr} \underline{\underline{e}} + a(T)(J - \ln J) + \rho_0 \mathbf{e}_T(T).$$

Les notations sont celles du cours. En particulier, le jacobien J est égal au déterminant du gradient de déformation

$$J = \det \mathbf{F} = \sqrt{\det \underline{\underline{C}}} = \sqrt{\det (\underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{e}})},$$

et $\ln J$ dénote son logarithme népérien.

On se propose d'étudier ce matériau à l'aide d'un essai triaxial isotherme, dans lequel un échantillon cylindrique homogène de ce matériau est placé entre deux plateaux lisses sur lesquels il glisse sans frotter. Tout en maintenant la température de l'échantillon constante, les deux plateaux sont ensuite rapprochés d'une distance δb_0 , et la face latérale de l'échantillon est soumise à une pression p . La configuration initiale de l'échantillon est un cylindre Ω_0 de section circulaire, de rayon R_0 et de hauteur b_0 . La configuration déformée sera dénotée $\Omega(t)$. Les surfaces inférieure, supérieure, et latérale de l'échantillon seront respectivement dénotées par S_0 , S_b et S_e en configuration initiale et par $S_0(t)$, $S_b(t)$ et $S_e(t)$ en configuration déformée.

Les efforts de gravité et d'accélération sont négligés dans tout le problème.

1. Montrer que dans le cas isotherme $T = T_0$, la loi de comportement du matériau considéré se réduit à

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \lambda(\text{tr} \underline{\underline{e}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}} + a(J - 1) \underline{\underline{C}}^{-1}.$$

On rappelle le calcul de la dérivée du déterminant

$$\frac{\partial \det \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = (\det \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{C}}^{-1}.$$

2. On suppose que le champ de déplacement subi par le matériau dans l'essai triaxial isotherme est de la forme $\underline{\xi} = -\delta \underline{X}$. Déterminer la pression p qu'il faut imposer sur la face latérale S_e pour que ce champ de déplacement soit effectivement la solution d'équilibre observée dans l'essai.
3. Après avoir déterminé le tenseur des contraintes de Cauchy associé au champ de déplacement ci-dessus, calculer la résultante des efforts exercés par l'échantillon sur le plateau supérieur $S_b(t)$. Discuter sa limite dans des situations de compression infinie ($\delta \rightarrow 1$), de traction infinie ($\delta \rightarrow -\infty$) ou de petites transformations ($|\delta| \ll 1$), dans les deux cas $a = 0$ et $a > 0$.

Problème 2

Equations d'équilibre et critère de rupture : Faille oblique.

Représentation de Mohr et critère de Tresca

La représentation de Mohr d'un tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}$ consiste à associer à chaque vecteur unitaire \underline{n} le couple (σ, τ) du demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ où $\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ est la contrainte normale et $\tau = \|\underline{\tau}\|$ est la norme de la contrainte tangentielle $\underline{\tau} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} - (\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \underline{n}$. On note $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$ les trois valeurs propres de $\underline{\sigma}$ et on trace les trois demi-cercles qui coupent l'axe $\tau = 0$ en ces valeurs (voir la figure ??). On admettra sans démonstration que les points (σ, τ) décrivent le domaine (en grisé sur la figure) compris à l'intérieur du plus grand cercle et à l'extérieur des plus petits lorsque \underline{n} varie dans toutes les directions. On admettra de même que si \underline{e}_K et \underline{e}_L sont des vecteurs propres unitaires respectivement associés aux valeurs propres σ_K et σ_L , le couple (σ, τ) , lorsqu'il est situé sur le demi-cercle coupant l'axe $\tau = 0$ en σ_K et σ_L , est associé à une normale \underline{n} qui appartient à l'espace vectoriel engendré par $(\underline{e}_K, \underline{e}_L)$.

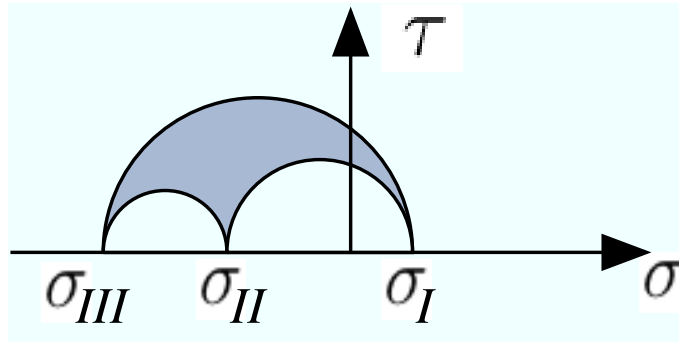


Figure 2: Représentation de Mohr d'un tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$.

Le critère de Tresca définit la frontière du domaine d'élasticité d'un matériau par la limite $f(\underline{\sigma}) = 0$, où la fonction de charge est définie par la relation $f(\underline{\sigma}) = \sup \{\sigma_K - \sigma_L - \sigma_0 \mid K, L = I, II, III\}$ dans laquelle les σ_I, σ_{II} et σ_{III} désignent les contraintes principales et σ_0 est une constante caractéristique du matériau.

1. Dans le cas où $f(\underline{\sigma}) = 0$, déduire de la représentation de Mohr de $\underline{\sigma}$ la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_0 obtenue en faisant varier la normale \underline{n} dans toutes les directions.

Etat d'équilibre d'un sol en traction latérale

On modélise ici un système de contraintes exercées dans un sol avant un tremblement de terre. On considère un référentiel \mathcal{R} muni d'un repère cartésien orthonormé $R = (O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ comme indiqué sur la Figure ???. La surface du sol est le plan horizontal d'équation $z = 0$. On s'intéresse à un domaine Ω délimité par les surfaces $z = 0$ et $z = -h$.

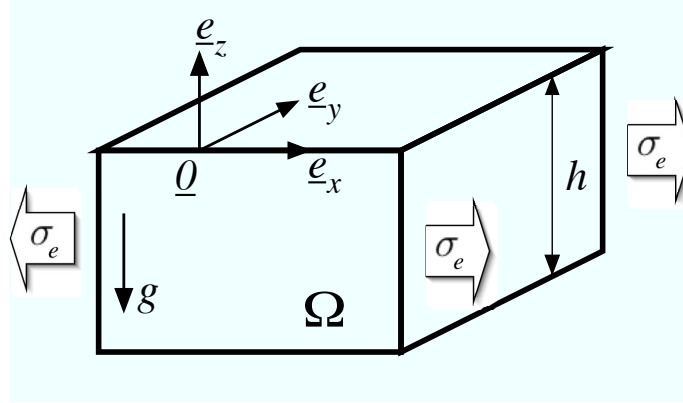


Figure 3: Géométrie du modèle de sol étudié.

Le sol est constitué d'un matériau homogène et isotrope, de masse volumique ρ . Il est soumis au champ de gravité $\underline{g} = -g \underline{e}_z$. On suppose que la surface $z = 0$ est libre de contraintes (on néglige la pression atmosphérique). On s'intéresse à l'état d'équilibre pour lequel les contraintes sont modélisées par le tenseur de Cauchy

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \sigma_e(z) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - P(z) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (1)$$

où $\sigma_e(z) = \sigma_h + \beta z$ avec $\sigma_h > 0$ et $\beta > \rho g$. On suppose que $\sigma_h = \beta h$ de sorte que $\sigma_e(z)$ reste positif pour tous les points \underline{x} de Ω .

2. Calculer $P(z)$.

Rupture ou tremblement de terre

On modélise ici l'apparition de failles obliques dans le sol lors de tremblements de terre. On suppose pour cela que la rupture est possible dès que $f(\underline{\underline{\sigma}}) \geq 0$, où f est la fonction de charge du critère de Tresca de constante caractéristique σ_0 . On suppose aussi que cette rupture se produit le long des faces soumises aux efforts de cisaillement maximum.

3. On suppose tout d'abord que $\sigma_h < \sigma_0$. Montrer que $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ sur le domaine Ω .

4. Dans le cas où σ_h devient supérieur à σ_0 , calculer la cote $z_b \leq 0$ au-dessus de laquelle la rupture est possible.

5. Pour $z = 0$, calculer le module maximum τ_m de la contrainte tangentielle $\underline{\tau}$. Pour quelles directions de \underline{n} ce maximum est-il atteint ?

6. Proposer une explication de l'angle $\pi/4$ que fait, avec \underline{e}_z , la normale au plan de la faille oblique observée sur la figure ??, ainsi que son appartenance au plan engendré par \underline{e}_x et \underline{e}_z .

7. Dans quel sens varie cet angle lorsque l'on remplace le critère de Tresca par le critère de rupture de Bylerlee qui s'écrit $\tau_m \sigma_0 / 2 + \gamma \sigma$ avec $\gamma > 0$?

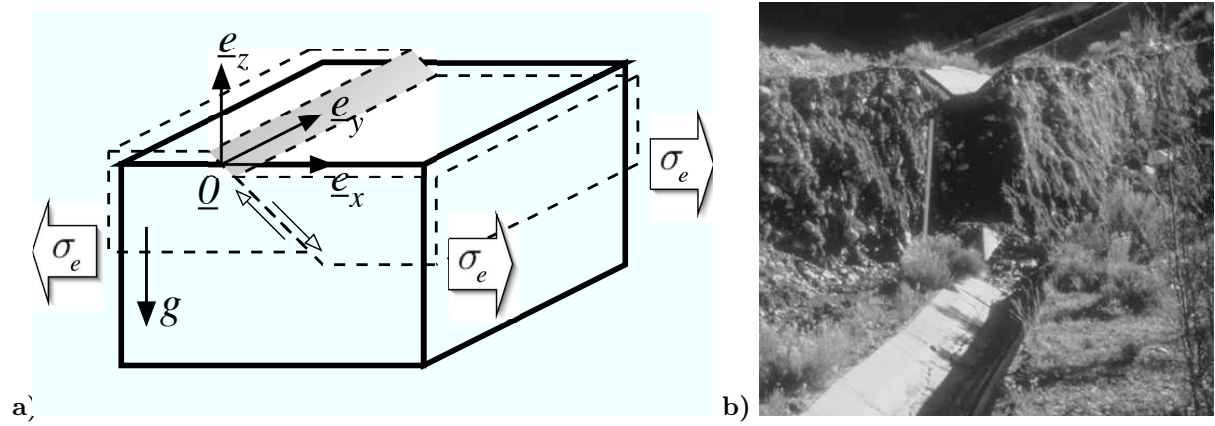


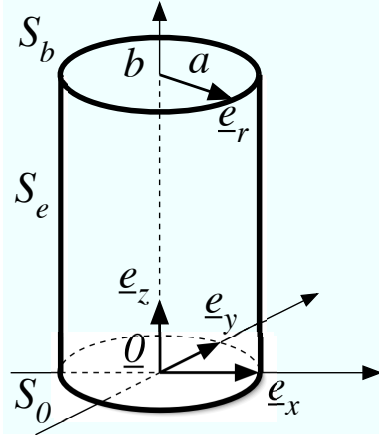
Figure 4: a) Schéma simplifié d'une faille oblique. b) Faille oblique produite par un tremblement de terre de magnitude 7,2 en 1993 (www.ngdc.noaa.gov). La route (en blanc) s'est écartée de 2m environ.

CHANGER DE COPIE

Problème 3

Méthode de Ritz : Déformation d'une pastille confinée

On étudie ici la déformation thermoélastique d'une pastille d'oxyde d'uranium dont la configuration de référence, libre de contraintes, est celle d'un cylindre Ω_0 de rayon a et de hauteur b lorsque qu'elle est portée à la température uniforme T_0 (voir la figure pour le choix du repère orthonormé $Oxyz$). On note S_0 et S_b les disques de la frontière $\partial\Omega_0$ de cotes respectives $z = 0$ et $z = b$, et S_e la surface cylindrique.



Pastilles d'oxyde d'uranium

Conditions aux limites

La pastille est confinée dans une cavité fermée (gaine), considérée ici comme indéformable, qui contraint ses configurations déformées $\Omega(t)$ à vérifier $\Omega(t) \subset \Omega_0$. Dans un premier temps, on suppose que la pastille est en contact glissant sans frottement avec la cavité sur toute sa frontière ($\Omega(t) = \Omega_0$) ce qui entraîne que les contraintes tangentielles sont nulles sur toute la surface $\partial\Omega_0$.

1. Écrire toutes les conditions aux limites (en déplacements et en efforts) de ce problème.

Approximations de Ritz et solutions exactes

Le dispositif est placé dans le coeur d'un réacteur nucléaire et l'on s'intéresse aux contraintes subies par la pastille lors des variations de température résultant de la réaction nucléaire. On suppose que le champ de température à l'intérieur de la pastille s'écrit

$$T(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{A}{2}r^2 - \frac{B}{2} \left(z - \frac{b}{2} \right)^2 \quad (2)$$

où τ_0 , A et B sont des constantes positives.

On néglige les forces de gravité, on se place dans le cadre des petites transformations autour de la configuration de référence Ω_0 de température T_0 et l'on suppose que l'évolution est quasi-statique. On suppose que le comportement rhéologique de la pastille peut être modélisé par la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}} - k (T - T_0) \underline{\underline{\mathbb{1}}}.$$

On note $\mathbf{W}(\underline{\underline{\xi}}') = \mathbf{W}_2(\underline{\underline{\xi}}') + \mathbf{W}_1(\underline{\underline{\xi}}')$ l'énergie libre permettant d'appliquer le principe du potentiel minimum en déplacements où $\mathbf{W}_2(\underline{\underline{\xi}}') = \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \lambda [\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}')]^2 + \mu \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') \right\} d\Omega_0$ est l'énergie élastique quadratique et $\mathbf{W}_1(\underline{\underline{\xi}}') = \int_{\Omega_0} -k (T - T_0) \text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') d\Omega_0$ est la contribution aux efforts intérieurs du chargement thermique.

On note $\underline{\xi}^{(A)}(\underline{x})$ et $\underline{\xi}^{(B)}(\underline{x})$ les solutions exactes des problèmes thermoélastiques correspondant aux chargements thermiques $\underline{T}(\underline{x})$ particuliers d'expressions respectives

$$T^{(A)}(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{A}{2}r^2 \quad \text{et} \quad T^{(B)}(\underline{x}) = T_0 + \tau_0 - \frac{B}{2} \left(z - \frac{b}{2} \right)^2. \quad (3)$$

2. On cherche à déterminer ou approcher $\underline{\xi}^{(A)}(\underline{x})$ dans l'espace $\mathcal{C}_h^{(A)}$ des champs de déplacements de la forme $\underline{\xi}'(\underline{x}) = U(r^3 - a^2 r) \underline{e}_r$ où U est une constante indéterminée. Justifier le choix de cet espace.
3. Calculer $\mathbf{W}(\underline{\xi}')$ pour les éléments de cet espace.
4. Déterminer le champ $\underline{\xi}_h^{(A)}(\underline{x})$ qui minimise cette énergie libre dans l'espace $\mathcal{C}_h^{(A)}$.
5. Montrer que le champ de contrainte associé au déplacement $\underline{\xi}_h^{(A)}(\underline{x})$ et à l'échauffement $T^{(A)}(\underline{x}) - T_0$ par la loi de comportement vérifie les équations d'équilibre locales écrites sur Ω_0 .
6. On considère l'espace $\mathcal{C}_h^{(B)}$ des champs de déplacements $\underline{\xi}'(\underline{x}) = V \left(z^3 - \frac{3}{2}bz^2 + \frac{b^2}{2}z \right) \underline{e}_z$ où V est une constante indéterminée. Déterminer le champ $\underline{\xi}_h^{(B)}$ de cet espace tel que le champ de contrainte associé à ce champ et à l'échauffement $T^{(B)}(\underline{x}) - T_0$ par la loi de comportement vérifie les équations d'équilibre locales écrites sur Ω_0 . Vérifier que ce champ de contraintes vérifie alors les conditions de glissement sans frottement sur le bord de Ω_0 .
7. Montrer que la solution $\underline{\xi}_h^{(B)}$ minimise l'énergie libre \mathbf{W} sur l'espace $\mathcal{C}_h^{(B)}$.
8. Montrer que le champ de contrainte associé au déplacement $\underline{\xi}_h(\underline{x}) = \underline{\xi}_h^{(A)}(\underline{x}) + \underline{\xi}_h^{(B)}(\underline{x})$ et à l'échauffement $T(\underline{x}) - T_0 = (T^{(A)}(\underline{x}) - T_0) + (T^{(B)}(\underline{x}) - T_0)$ le plus général par la loi de comportement est solution des équations d'équilibre écrites sur Ω_0 .
9. Montrer que $\underline{\xi}_h(\underline{x})$ est solution du problème dans le cas où le contact entre la pastille et la cavité est total ($\Omega(t) = \Omega_0$).

Contact unilatéral et forme de tonneau (barrel en anglais)

On envisage maintenant des situations où le contact entre la frontière $\partial\Omega(t)$ de la pastille et la cavité $\partial\Omega_0$ peut être partiel ($\Omega(t) \subset \Omega_0$) et on suppose que la surface est libre de contraintes en l'absence de contact. Une condition nécessaire pour l'existence d'un contact au point \underline{x} est donc $\underline{T}(\underline{x}) \cdot \underline{n} \leq 0$ où $\underline{T}(\underline{x})$ est le vecteur contrainte exercé sur la surface.

10. Calculer, sur chacune des faces de la pastille, le champ de vecteur contrainte $\underline{T}_h(\underline{x})$ associé au champ de déplacement $\underline{\xi}_h(\underline{x})$.
11. En déduire que la contrainte normale $\underline{T}_h(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ est négative sur toute la surface $\partial\Omega_0$ si et seulement si $\tau_0 > \tau_c$ où τ_c est une constante que l'on déterminera.
12. Expliquer, schématiquement, pourquoi la pastille prend la forme d'un tonneau pour $\tau_0 \leq \tau_c$.

CORRIGÉ

Problème 1

Méthode des déplacements: essai triaxial en grandes transformations élastiques.

Loi de comportement.

1. La loi de comportement s'obtient par un calcul direct de gradient comme indiqué en chapitre 10

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}|_T}.$$

Mais nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}^2 \underline{\underline{e}}}{\partial \underline{\underline{e}}} &= 2 \text{tr} \underline{\underline{e}} \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \\ \frac{\partial \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}}}{\partial \underline{\underline{e}}} &= 2 \underline{\underline{e}}, \\ \frac{\partial \sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\underline{\underline{e}})}}{\partial \underline{\underline{e}}} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(\underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2\underline{\underline{e}})}} \frac{\partial \det \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\underline{\underline{C}})}} (\det \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{C}}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où la formule proposée quand $T = T_0$.

Equilibre

2. On cherche maintenant à regarder si la solution $\underline{\underline{\xi}} = -\delta \underline{\underline{X}}$ peut être solution du problème d'équilibre défini par l'essai triaxial et caractérisé par les équations d'équilibre

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \Omega(t),$$

et par les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \xi_z &= -\delta Z \text{ sur } S_0(0) \cup S_b(0), \\ T_\theta &= T_r = 0 \text{ sur } S_0(t) \cup S_b(t), \\ \underline{\underline{T}} &= -p \underline{\underline{n}} \text{ sur } S_e(t). \end{aligned}$$

Par construction, le champ de déplacement proposé vérifie les conditions en déplacement imposé. Par dérivation, on trouve ensuite que le gradient de déformation est de la forme

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\xi}} = (1 - \delta) \underline{\underline{\mathbb{1}}}.$$

Sous la notation $\alpha = 1 - \delta$, les tenseurs des déformations et de contraintes sont ensuite donnés par

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \alpha^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \\ J &= \det \underline{\underline{F}} = \alpha^3, \\ \underline{\underline{e}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}) = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \\ \underline{\underline{\Sigma}} &= \left((3\lambda + 2\mu) \frac{(\alpha^2 - 1)}{2} + \frac{a}{\alpha^2} (\alpha^3 - 1) \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}}, \\ \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} = \left((3\lambda + 2\mu) \frac{(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{a}{\alpha^3} (\alpha^3 - 1) \right) \underline{\underline{\mathbb{1}}}. \end{aligned}$$

Le champ de contraintes de Cauchy ainsi calculé est homogène, donc il vérifie les équations d'équilibre. Il vérifie aussi toutes les conditions aux limites à condition que la pression soit donnée par

$$p = -\underline{e}_r \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r = (3\lambda + 2\mu) \frac{(-\alpha^2 + 1)}{2\alpha} + \frac{a}{\alpha^3}(-\alpha^3 + 1)$$

avec $\delta = \delta b_0/b_0$ et $\alpha = 1 - \delta$. Donc, pour cette valeur de pression, le champ de déplacement proposé sera solution du problème d'équilibre étudié.

Résultante

3. La force résultante est obtenue par intégration du vecteur contrainte sur la face supérieure après déformation

$$\underline{F} = \int_{S_b} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z da = -\alpha^2 \pi R_0^2 p \underline{e}_z = (3\lambda + 2\mu) \alpha \pi R_0^2 \frac{(\alpha^2 - 1)}{2} + \frac{a \pi R_0^2}{\alpha} (\alpha^3 - 1) \underline{e}_z.$$

le facteur $\alpha^2 \pi R_0^2$ correspondant à l'aire de la face supérieure après déformation.

A la limite des compressions infinies ($\alpha \rightarrow 0$ ce qui implique $J \rightarrow 0$), cette résultante est nulle si a est nul, et tend vers l'infini sinon. La première situation n'est pas réaliste. L'énergie libre construite avec $a = 0$ ne peut donc pas représenter correctement le matériau à la limite des compressions infinies. Par contre, écrite avec un terme a non nul, on obtient une force en $1/\alpha$ qui semble raisonnable.

A la limite des extensions infinies ($\alpha \rightarrow \infty$), la force tend dans les deux cas vers l'infini en $O(\alpha^3)$, ce qui semble raisonnable.

Dans le cadre des petites déformations ($\alpha = 1 - \delta, |\delta| \ll 1$), la force de traction compression devient directement proportionnelle à δ

$$\underline{F} = -\pi R_0^2 \delta (3\lambda + 2\mu + 3a) \underline{e}_z$$

ce qui est aussi raisonnable.

Problème 2 Equations d'équilibre et critère de rupture : Faille oblique.

Représentation de Mohr et critère de Tresca

1. Dans le cas $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$, on a $\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_0$ ce qui implique que $\tau_0 = (\sigma_I - \sigma_{III})/2 = \sigma_0/2$ par la construction de Mohr.

Etat d'équilibre d'un sol en traction latérale

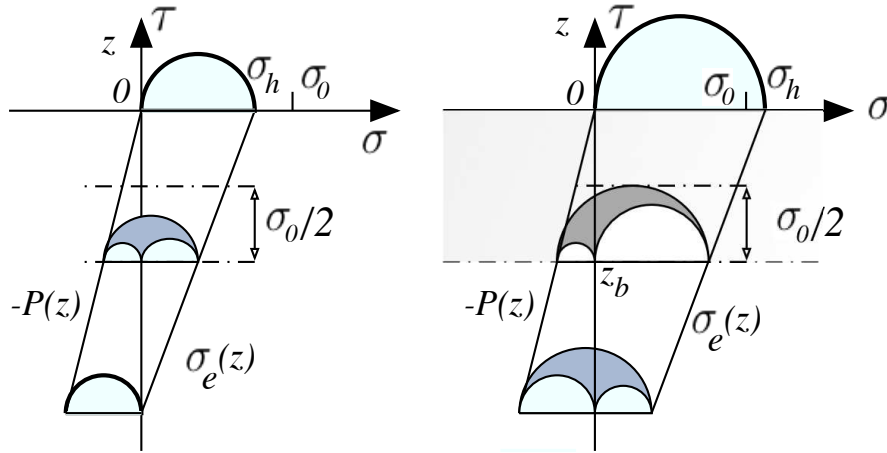
2. Les équations d'équilibre $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{g} = \underline{0}$ s'écrivent $-\frac{dP}{dz}(z) \underline{e}_z - \rho \underline{g} \underline{e}_z = \underline{0}$. En imposant $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = -P(z) \underline{e}_z = \underline{0}$ en $z = 0$, a donc $-P(z) = \rho g z \leq 0$.

Rupture ou tremblement de terre

3. Les contraintes principales σ_i appartiennent à l'ensemble $\{-P(z), 0, \sigma_e(z)\}$. Pour $z \in [-h, 0]$, on a $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_e(z) + P(z) - \sigma_0 = \sigma_h + (\beta - \rho g)z - \sigma_0 \leq 0$.

4. La fonction $f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_h + (\beta - \rho g)z - \sigma_0$ est positive pour $z_b \leq z \leq 0$ avec $z_b = -\frac{\sigma_h - \sigma_0}{\beta - \rho g}$.

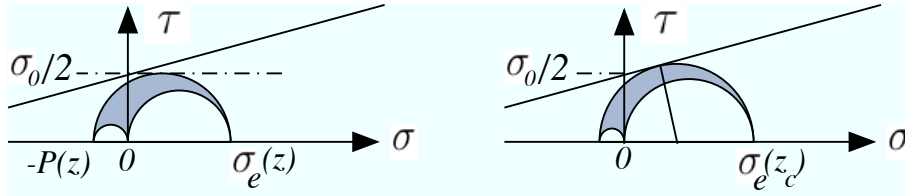
5. On a $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_h \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ en $z = 0$. Pour $\underline{n} = n_x \underline{e}_x + n_y \underline{e}_y + n_z \underline{e}_z$ de norme un, on a $\|\underline{T}\| = \left[(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})^2 - (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sigma_h [n_x^2(1 - n_x^2)]^{\frac{1}{2}}$. Cette contrainte de cisaillement est maximale pour $n_x = 1/\sqrt{2}$ et vaut $\tau_m = \sigma_h/2$.



Ce maximum est donc atteint pour les normales $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi)\underline{e}_y + \sin(\varphi)\underline{e}_z]$ où φ est un angle quelconque.

6. La valeur $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_z)$ appartient bien à la famille des normales qui maximisent la contrainte tangentielle. Il est donc naturel qu'une rupture se produise dans un tel plan. L'explication du choix de l'angle $\varphi = 0$ (ou π) est donnée par le fait que, dans la zone $z \in]z_b, 0[$, les contraintes principales sont $-P(z) < 0 < \sigma_e(z)$, respectivement associée aux directions propres $(\underline{e}_z, \underline{e}_y, \underline{e}_x)$, et que les normales qui maximisent la contrainte tangentielle sont dans le plan engendré par \underline{e}_x et \underline{e}_z d'après le résultat admis dans l'énoncé. On pourrait d'ailleurs démontrer que ces normales sont $\underline{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_x + \underline{e}_z)$.

7. La normale \underline{n} se rapproche de \underline{e}_z dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_z)$, comme le montrent les propriétés de la représentation de Mohr.



Problème 3

Méthode de Ritz : Déformation d'une pastille confinée

Conditions aux limites

1. Sous l'hypothèse d'un contact total, les conditions aux limites s'écrivent $(\xi_z^d = 0, T_x^d = 0, T_y^d = 0)$ pour S_0 et S_b , $(\xi_r^d = 0, T_\theta^d = 0, T_z^d = 0)$ pour S_e .

N.B. Sur la partie de la frontière exempte de contact, on aurait $\underline{T}^d = \underline{0}$.

Approximations de Ritz et solutions exactes

2. Sous l'hypothèse d'un contact total, les symétries du problème entraînent $\xi_z = 0$, $\xi_\theta = 0$ et $\xi_r(r)$ indépendant de θ et z , impaire en r et nulle en $r = a$. L'approximation polynomiale non triviale la plus simple répondant à ces contraintes est celle qui est proposée.

3. On a $\underline{\underline{\xi}}(\underline{\xi}') = \frac{\partial \xi_r'}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\xi_r'}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta = U(3r^2 - a^2)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + U(r^2 - a^2)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ et $\text{tr} \underline{\underline{\xi}}(\underline{\xi}') = 2U(2r^2 - a^2)$. On calcule

$$\frac{1}{2}\lambda (\text{tr} \underline{\underline{\xi}})^2 + \mu \underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}} = U^2 [(8\lambda + 10\mu)r^4 - 8(\lambda + \mu)a^2r^2 + 2(\lambda + \mu)a^4]$$

et

$$-k(T - T_0) \operatorname{tr} \underline{\underline{\epsilon}} = -2k\tau_0 U(2r^2 - a^2) + kAU(2r^4 - a^2r^2).$$

En utilisant la relation $\int_{\Omega_0} r^n d\Omega_0 = 2\pi b \frac{a^{n+2}}{n+2}$, on trouve $\mathbf{W}(\underline{\underline{\xi}}') = \frac{2\pi b a^6}{12} [4(\lambda + 2\mu)U^2 + kAU]$.

4. Dans l'espace $\mathcal{C}_h^{(A)}$, l'énergie libre $\mathbf{W}(\underline{\underline{\xi}}')$ est minimale et nulle pour $U_h = -\frac{kA}{8(\lambda+2\mu)}$. On a donc $\underline{\underline{\xi}}_h^{(A)}(\underline{\underline{x}}) = U_h (r^3 - a^2r) \underline{\underline{e}}_r$.

5. La loi de Hooke entraîne

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}') = 2\lambda U(2r^2 - a^2) \underline{\underline{1}} + 2\mu U [(3r^2 - a^2) \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + (r^2 - a^2) \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta] - k \left(\tau_0 - \frac{A}{2} r^2 \right) \underline{\underline{1}}. \quad (4)$$

On calcule alors $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{\underline{e}}_r = [8U(\lambda + 2\mu) + kA] r \underline{\underline{e}}_r$. On a donc $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h^{(A)}) = \underline{\underline{0}}$. Le champ de déplacement $\underline{\underline{\xi}}_h^{(A)}$ vérifie donc les équations d'équilibre.

6. On a $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') = \frac{\partial \xi'_z}{\partial z} \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z = V \left(3z^2 - 3bz + \frac{b^2}{2} \right) \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z$ et

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}') = V \left(3z^2 - 3bz + \frac{b^2}{2} \right) (\lambda \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) - k \left[\tau_0 - \frac{B}{2} \left(z - \frac{b}{2} \right)^2 \right] \underline{\underline{1}}. \quad (5)$$

L'équation d'équilibre $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \underline{\underline{e}}_r + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \underline{\underline{e}}_z = [6V(\lambda + 2\mu) + kB] \left(z - \frac{b}{2} \right) \underline{\underline{e}}_z = 0$ entraîne que champ de contrainte associé à $\underline{\underline{\xi}}_h^{(B)} = V_h \left(z^3 - \frac{3}{2} b z^2 + \frac{b^2}{2} \right) \underline{\underline{e}}_z$ vérifie les équations d'équilibre pour $V_h = -\frac{kB}{6(\lambda+2\mu)}$.

Par ailleurs, on remarque que le champ de contraintes obtenu est diagonal dans le repère cylindrique. Les vecteurs $\underline{\underline{e}}_r$, $\underline{\underline{e}}_\theta$ et $\underline{\underline{e}}_z$ seront donc des directions principales du tenseur des contraintes. Les faces normales à l'un de ces vecteurs ne seront donc soumises à aucun effort de cisaillement. Comme chaque frontière de Ω_0 est normale à l'un de ces vecteurs, on en déduit qu'aucune frontière n'est soumise à un effort de cisaillement pour le champ de déplacement proposé.

7. En application du principe du potentiel minimum en déplacements, le champ de déplacement cinématiquement admissible $\underline{\underline{\xi}}_h^{(B)}$ qui est solution du problème en déplacements minimise l'énergie potentielle $(\mathbf{W} - \Phi)(\underline{\underline{\xi}}')$ dans l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles, et donc en particulier dans le sous-espace $\mathcal{C}_h^{(B)}$. Ici, $\Phi(\underline{\underline{\xi}}')$ est le potentiel des efforts extérieurs. Comme $\Phi(\underline{\underline{\xi}}') = 0$ pour tous les éléments de $\mathcal{C}_h^{(B)}$, $\underline{\underline{\xi}}_h^{(B)}$ minimise l'énergie libre \mathbf{W} sur $\mathcal{C}_h^{(B)}$.

8. Le tenseur $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\xi}}_h)$ vérifie l'équation d'équilibre $\operatorname{div} [\lambda (\operatorname{tr} \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}] = k \underline{\underline{\operatorname{grad} T}}$ car c'est une équation linéaire dont le second membre vérifie $\underline{\underline{\operatorname{grad} T}} = \underline{\underline{\operatorname{grad} T}}^{(A)} + \underline{\underline{\operatorname{grad} T}}^{(B)}$.

9. Par construction, on a bien $\underline{\underline{\xi}}_h(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}} = 0$ sur toute la frontière $\partial\Omega_0$. Comme $U_h = -\frac{kA}{8(\lambda+2\mu)}$ et $V_h = -\frac{kB}{6(\lambda+2\mu)}$, on a

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h) &= -\frac{\lambda k A}{4(\lambda + 2\mu)} (2r^2 - a^2) \underline{\underline{1}} - \frac{\mu k A}{4(\lambda + 2\mu)} [(3r^2 - a^2) \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + (r^2 - a^2) \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta] + \frac{k A}{2} r^2 \underline{\underline{1}} \\ &\quad - \frac{k B}{6(\lambda + 2\mu)} \left(3z^2 - 3bz + \frac{b^2}{2} \right) (\lambda \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) + \frac{k B}{2} \left(z - \frac{b}{2} \right)^2 \underline{\underline{1}} - k \tau_0 \underline{\underline{1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

On voit facilement que $\underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h) \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0$ et $\underline{\underline{e}}_y \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h) \cdot \underline{\underline{e}}_z = 0$ sur les faces S_0 et S_b et que $\underline{\underline{e}}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h) \cdot \underline{\underline{e}}_r = 0$ et $\underline{\underline{e}}_\theta \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\xi}}_h) \cdot \underline{\underline{e}}_r = 0$ sur la face S_e . Les contraintes tangentielles sont donc nulles sur toute la frontière $\partial\Omega_0$. On en déduit donc que $\underline{\underline{\xi}}_h$ est la solution du problème.

Contact unilatéral et forme de tonneau

10. Sur la face S_e , la relation $\underline{T}_h = \underline{\sigma}|_{r=a} \cdot \underline{e}_r$ s'écrit :

$$\underline{T}_h(\underline{x}, \underline{e}_r) = -k \left[\tau_0 - \frac{A a^2}{4} - \frac{B}{(\lambda + 2\mu)} \left(\mu z^2 - \mu b z + \frac{\lambda + 6\mu}{24} b^2 \right) \right] \underline{e}_r. \quad (7)$$

Sur la face S_b , la relation $\underline{T}_h = \underline{\sigma}|_{z=b} \cdot \underline{e}_z$ s'écrit :

$$\underline{T}_h(\underline{x}, \underline{e}_z) = -k \left[\tau_0 - A \frac{4\mu r^2 + \lambda a^2}{4(\lambda + 2\mu)} - B \frac{b^2}{24} \right] \underline{e}_z \quad (8)$$

On obtient la contrainte opposée sur la face S_0 .

11. Si $\tau_0 > \tau_c = \sup \left[\frac{A a^2}{4} + \frac{B b^2 (\lambda + 6\mu)}{24(\lambda + 2\mu)}, \frac{A a^2 (\lambda + 4\mu)}{4(\lambda + 2\mu)} + \frac{B b^2}{24} \right]$, la contrainte normale $\underline{T}_h \cdot \underline{n}$ reste négative sur toutes les faces.

12. Les premiers points de la surface de la pastille à perdre le contact lorsque τ_0 devient plus petit que la valeur critique τ_c sont les arêtes d'équations $r = a$ et $z = 0, b$. On peut deviner que la pastille prend alors la forme d'un "tonneau" pour $\tau_0 < \tau_c$.

Contrôle Classant

Mécanique des Milieux Continus, MEC 431
Sujet proposé par Olivier Thual et Patrick Le Tallec
Durée 4h

Version 8 du 14 janvier 2007

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé.

Problème 1 Cisaillement entre deux cylindres

On considère un milieu continu occupant le domaine Ω compris entre deux cylindres d'axe Oz et de rayons respectifs $R_1 < R_2$. On applique à ces cylindres des déplacements ou des mouvements de rotation solide autour de leur axe et l'on suppose que le milieu continu adhère parfaitement à leurs frontières. Dans les deux exemples indépendants considérés ci-dessous, on néglige les forces de pesanteur, la température est constante et l'on suppose que le système est invariant par les translations dans la direction z . On cherchera donc des champs de déplacement, de vitesse et de contrainte indépendants de z .

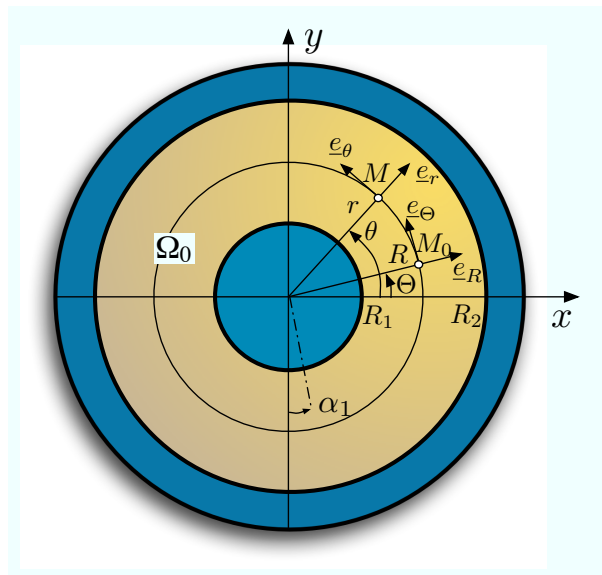


Figure 1: Milieu continu Ω_0 compris entre deux cylindres concentriques.

Petites déformations de l'acier

Le milieu continu est ici un matériau solide en petites perturbations élastiques autour de son état naturel, par exemple de l'acier. On tourne d'un petit angle fixe $\alpha_1 > 0$ le cylindre intérieur, le cylindre extérieur restant immobile. On suppose alors que le champ de déplacement dans Ω_0 est de la forme

$$\underline{\xi}(\underline{X}) = Q(R) \underline{e}_\Theta(\Theta) \quad \text{avec} \quad Q(R) = A R + B/R, \quad A = -\alpha_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \alpha_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (1)$$

1. Écrire les conditions aux limites en déplacements ou en efforts traduisant l'adhérence du milieu aux frontières des deux cylindres. Montrer que le champ de déplacement proposé est cinématiquement admissible à des termes d'ordre deux en α_1 près.

2. Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X})$ associé à ce champ de déplacement. Quel type de déformations observe-t-on ? Où est-elle maximale ? Comment varie la déformation quand l'épaisseur relative $2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$ tend vers zéro ? Jusqu'à quel angle $(\alpha_1)_{\max}$, au sens de $\alpha \ll (\alpha_1)_{\max}$, l'hypothèse des petites perturbations vous paraît-elle raisonnable ?

3. On suppose que le comportement du milieu continu est décrit par la loi de Hooke

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) = \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Donner l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de μ , B et R .

4. Calculer $\text{DIV } \underline{\underline{\sigma}}$. En déduire que le couple déplacement contrainte proposé $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ est solution du problème d'équilibre élastique posé.

5. Soient C_1 et C_2 les couples exercés par unité de longueur en z respectivement par les cylindres intérieurs et extérieurs sur le milieu continu. Calculer C_2 en fonction de μ , R_1 , R_2 et α_1 . Pourquoi dépend-il linéairement de l'angle α_1 ? Comment varie-t-il en fonction de l'épaisseur ? Que vaut $C_1 + C_2$? Commenter.

6. On suppose que la rupture du milieu élastique est régie par le critère de Von Mises

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} - k^2 = 0 \quad (3)$$

où k est une constante et $\underline{\underline{s}}$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$. Calculer l'angle critique α_c à partir duquel il y a rupture. Dans quelle région la rupture apparaît-elle en premier ? Comment faut-il faire varier l'épaisseur pour augmenter l'angle critique.

Écoulement fluide

Le milieu continu est ici un fluide visqueux incompressible. On anime le cylindre intérieur d'un mouvement de rotation solide $\alpha_1(t) = \omega_1 t$ de vitesse angulaire ω_1 , le cylindre extérieur restant immobile. On suppose alors que le champ de vitesse dans Ω est de la forme

$$\underline{U}(\underline{x}) = q(r) \underline{e}_\theta(\theta) \quad \text{avec} \quad q(r) = a r + b/r. \quad (4)$$

7. Caractériser le champ de déplacement associé. Écrire les conditions aux limites traduisant l'adhérence du milieu aux frontières des deux cylindres. En déduire les expressions de a et b en fonction de ω_1 .

8. Calculer le gradient $\underline{\underline{\text{grad}}} U$ du champ de vitesse en configuration actuelle. En déduire le champ d'accélération $\underline{\underline{\gamma}} = \frac{D}{Dt} U$ ainsi que le tenseur des taux de déformations $\underline{\underline{d}}(\underline{x})$.

9. On suppose que le comportement du fluide obéit à la loi

$$\text{div } \underline{U} = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = -p \underline{\underline{1}} + 2 \mu_n \underline{\underline{d}} \quad (5)$$

où μ_n est un coefficient constant mesurant la viscosité du fluide et p le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison d'incompressibilité $\text{div } \underline{U} = 0$. Montrer que cette liaison est satisfaite et donner l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de r , μ_n , b et $p(x)$.

10. Calculer le couple linéique exercé par le cylindre extérieur sur le milieu continu en fonction de μ_n , R_1 , R_2 et ω_1 .

11. On propose un champ de pression de la forme

$$p(r) = p_0 + \int_{R_1}^r \frac{q^2(s)}{s} ds \quad (6)$$

où p_0 est une constante arbitraire. Vérifier qu'avec ce choix de p nous obtenons une solution des équations du mouvement.

Problème 2

Boule de caoutchouc dans une enveloppe

On considère une boule sphérique S_0 de rayon R_0 en configuration initiale, constituée de caoutchouc, à l'intérieur d'une enveloppe sphérique Ω_0 d'épaisseur très fine et comprise en configuration initiale entre les rayons R_0 et R_1 , avec $\frac{R_1 - R_0}{R_0} \ll 1$.

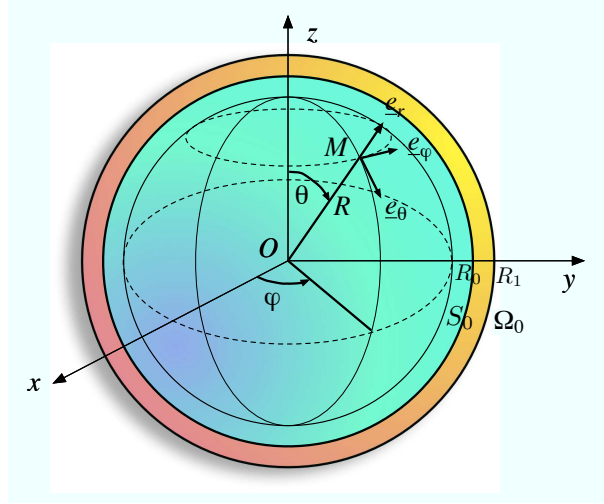


Figure 2: Sphère de caoutchouc dans une enveloppe sphérique.

On suppose que le comportement du caoutchouc obéit à la loi de Treolar :

$$\det \underline{\underline{F}} = 1 + \alpha(T - T_0), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \rho n k_B T \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} + \eta \underline{\underline{1}} \quad (7)$$

où α , ρ et n sont des coefficients positifs et constants, k_B la constante de Boltzmann, $T(\underline{x})$ le champ de température et $\eta(\underline{x})$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison de volume imposé. On suppose que le comportement du matériau constitutif de l'enveloppe est aussi régi par la loi de Treolar, mais que la dilatation thermique y est négligeable :

$$\det \underline{\underline{F}} = 1, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \rho_\Omega n_\Omega k_B T \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} + \eta_\Omega \underline{\underline{1}}. \quad (8)$$

où ρ_Ω et n_Ω sont des coefficients positifs et constants et $\eta_\Omega(\underline{x})$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison de volume imposé. On rappelle qu'il a été vu en devoir qu'une telle enveloppe mince, soumise à pression interne p_i et externe p_e , prend la forme d'une nouvelle enveloppe sphérique de rayon interne $r_0 = \lambda R_0$ avec

$$p_i - p_e \approx 2 \rho_\Omega n_\Omega k_B T \frac{R_1 - R_0}{R_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right). \quad (9)$$

On suppose que les deux pièces S_0 et Ω_0 sont libres de contraintes à la température T_0 . On néglige la pression atmosphérique à la frontière de la sphère globale.

On applique alors un rayonnement électromagnétique qui chauffe les deux milieux et transforme la sphère S_0 en une sphère S de rayon r_0 et l'enveloppe sphérique Ω_0 en l'enveloppe sphérique Ω . On suppose que le champ de température à l'équilibre est alors :

$$T(r) = T_1 + \gamma r^2 \quad (10)$$

avec $T_0 < T_1$ et $\gamma > 0$. Compte tenu de la faible épaisseur de l'enveloppe sphérique, on supposera que la température y est uniforme à la valeur $T_\Omega = T_1 + \gamma r_0^2$.

On cherche à décrire le champ de déplacement et de contrainte induit par ce chauffage. La transformation $\underline{X} \rightarrow \underline{x}$ dans la sphère est supposée être purement radiale. Autrement dit, on suppose que les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de la position actuelle \underline{x} du point matériel M sont données par

$$r = F(R), \quad \theta = \Theta, \quad \varphi = \Phi. \quad (11)$$

avec (R, Θ, Φ) les coordonnées sphériques du point en configuration initiale et $F(R)$ une fonction inconnue à identifier. Pour plus de simplicité dans les calculs, on introduira la fonction $G(r) = F^{-1}(r)$ inverse de F donnée par $R = G(r)$, de dérivée $G'(r) = \left(\frac{dF}{dR}[G(r)] \right)^{-1}$ par rapport à r .

1. Montrer que le gradient de transformation $\underline{\underline{F}}$ est donnée en fonction de r par

$$\underline{\underline{F}}(r) = \frac{1}{G'(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{r}{G(r)} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi). \quad (12)$$

2. Montrer que $G(0) = 0$ et que $G(r)$ vérifie l'équation différentielle

$$G^2(r) G'(r) = \frac{r^2}{1 + \alpha(T_1 - T_0) + \alpha \gamma r^2}. \quad (13)$$

3. En déduire, dans le cas $\alpha > 0$, $G(r)$ en fonction de l'intégrale

$$g(r) := \int_0^r \frac{s^2}{a^2 + b^2 s^2} ds = \frac{a}{b^3} \left[\frac{br}{a} - \operatorname{argth} \left(\frac{br}{a} \right) \right] \text{ avec } a = \sqrt{1 + \alpha(T_1 - T_0)} \text{ et } b = \sqrt{\alpha \gamma}. \quad (14)$$

Calculer r_0 en fonction de $g^{-1}(R_0^3/3)$. On admettra que $g(r)$ est une fonction inversible (ce qui peut se démontrer par une simple étude de fonction). Que se passe-t-il pour $\alpha = 0$?

4. Donner l'expression de $\underline{g}(\underline{x})$ en fonction de $G(r)$ et de ses dérivées, de r et de $\eta(\underline{x})$.

5. À partir des équations de l'équilibre, montrer que η ne dépend que de r et est donné par

$$\eta(r) = \beta H(r) + \eta(r_0), \quad (15)$$

où $H(r)$ est la fonction donnée par

$$H(r) = \int_r^{r_0} \left[\frac{\gamma s}{G'^2} - (T_1 + \gamma s^2) \left(\frac{s}{G^2} - \frac{1}{s G'^2} + \frac{G''}{G'^3} \right) \right] ds \quad (16)$$

et où β est un coefficient que l'on déterminera. On admettra que l'intégrale définissant la fonction $H(r)$ est bien convergente pour tout $r \geq$ (ce qui se démontre par un simple développement limité autour de $s = 0$).

6. Exprimer, en fonction de r_0 , l'intensité de la pression p_0 exercée par l'enveloppe sphérique sur la sphère de caoutchouc. En déduire la valeur $\eta_0 = \eta(r_0)$ en fonction de r_0 .

Exercice 3 Vecteur contrainte exercé par un amas de ressorts

On construit ici un modèle de description microscopique d'un milieu continu unidimensionnel, situé en configuration actuelle entre les abscisses $x = 0$ et $x = l$. Le milieu est constitué de molécules qui agissent comme des ressorts de longueur r_I orientés dans une même direction, joignant deux petites masses m . Pour simplifier, on supposera que les centres x_I des molécules sont fixes et sont distribués le long de l'axe des x avec une densité $n(x)$. On suppose que la force $\underline{E}_{I_2 I_1}(r_I)$ exercée par l'extrémité droite I_2 du ressort sur l'extrémité gauche I_1 est proportionnelle à la longueur du ressort

$$\underline{E}_{I_2 I_1}(r_I) = \alpha r_I \underline{e}_x. \quad (17)$$

On note respectivement $p_{I_1}(t) = -\frac{m}{2} \dot{r}_I(t) = -p_I(t)$ et $p_{I_2}(t) = p_I(t)$ les quantités de mouvement des masses d'extrémité de chaque ressort. On considère l'espace des phases $\mathbf{E} = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ des configurations $\{q_I\}$ d'une molécule donnée avec $q_I = (p_I, r_I)$ où $p_I \in \mathbf{R}$ et $r_I \in \mathbf{R}^+$.

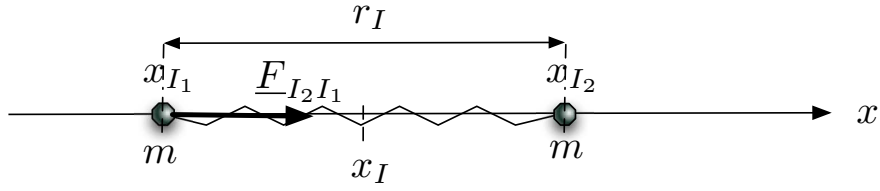


Figure 3: Molécule agissant comme un ressort.

On rappelle enfin que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^+} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \int_{\mathbf{R}^+} x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1. Justifier le choix suivant de l'énergie du système dans l'état $\{q_I\}$:

$$E(\{q_I\}) = \frac{p_I^2}{m} + \frac{\alpha r_I^2}{2} \quad (18)$$

en démontrant que les équations du mouvement

$$\dot{r}_I = \frac{\partial E}{\partial p_I} \quad \text{et} \quad \dot{p}_I = -\frac{\partial E}{\partial r_I}, \quad (19)$$

qui s'en déduisent, redonnent bien les équations classiques décrivant le mouvement des deux masses du ressort.

2. D'après le cours, la distribution d'équilibre associée à ce choix est donnée par

$$f_B(\{q_I\}) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{E(\{q_I\})}{k_B T}\right] \quad (20)$$

en fonction de la constante de Boltzmann k_B , de la température absolue du système T , la fonction de partition Z étant donnée par

$$Z = \int_{\mathbf{E}} \exp\left\{-\frac{E(\{q_I\})}{k_B T}\right\} d\mathbf{E} = \pi k_B T \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}. \quad (21)$$

En déduire la densité $\tilde{n}(x, p_I, r_I)$ de ressorts qui se trouvent dans la configuration $q_I = (p_I, r_I)$ au point x , densité mesurée par unité de volume de l'espace $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ des couples (positions, configurations). À quelle configuration correspond la température $T = 0$?

3. Calculer le vecteur contrainte

$$\underline{T}(x) da = \int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+} \underline{F}_{I_2 I_1}(r_I) \tilde{n}(x, p_I, r_I) [(r_I \underline{e}_x) \cdot \underline{e}_x] da dp_I dr_I \quad (22)$$

exercé à travers une interface élémentaire d'aire da et de normale \underline{e}_x .

N.B. La formule (22) est l'équivalent unidimensionnel de la formule donnée en bas de page 108 du cours.

4. Quel effort faut-il exercer sur le milieu continu en $x = 0$ et $x = l$ pour que le système soit en équilibre ? Comment varie cet effort en fonction de la température et de la raideur élémentaire α d'un ressort ? Commenter.

CORRIGÉ

Problème 1 Cisaillement entre deux cylindres

Petites déformations de l'acier

1. Les surfaces $R = R_1$ et $R = R_2$ sont des surfaces $S_{\underline{\xi}}$ à déplacement imposé, le déplacement du milieu continu y étant fixé à la valeur du déplacement imposé au cylindres frontières. Les conditions aux limites s'écrivent $\underline{\xi}[R_1 \underline{e}_R(\Theta)] = R_1 \sin \alpha_1 \underline{e}_\Theta(\Theta) + R_1 (\cos \alpha_1 - 1) \underline{e}_R(\Theta)$ et $\underline{\xi}[R_2 \underline{e}_R(\Theta)] = \underline{0}$ pour tout $\Theta \in [0, 2\pi]$. Au second ordre en α_1 , ce déplacement imposé s'écrit $\underline{\xi}[R_1 \underline{e}_R(\Theta)] = R_1 \alpha_1 \underline{e}_\Theta(\Theta)$ et $\underline{\xi}[R_2 \underline{e}_R(\Theta)] = \underline{0}$ pour tout $\Theta \in [0, 2\pi]$. Comme nous avons $Q(R_1) = AR_1 + B/R_1 = \alpha_1$ et $Q(R_2) = AR_2 + B/R_2 = 0$ par construction de A et B , la condition aux limites est satisfaite au second ordre en α_1 par le champ de déplacement $\underline{\xi}(\underline{X}) = Q(R) \underline{e}_\Theta(\Theta)$ proposé.

2. Le gradient du champ de déplacement est $\underline{\nabla} \underline{\xi}(\underline{X}) = -\frac{Q(R)}{R} \underline{e}_R \otimes \underline{e}_\Theta + Q'(R) \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R$. Le tenseur des déformations linéarisé est sa partie symétrique qui s'écrit

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X}) = \frac{1}{2} \left[Q'(R) - \frac{Q(R)}{R} \right] (\underline{e}_R \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R) = -\frac{B}{R^2} (\underline{e}_R \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R) . \quad (23)$$

C'est une déformation de cisaillement. Elle est maximale en $R = R_1$. Lorsque $2\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$ tend vers zéro, B tend vers l'infini. Pour rester dans le cadre des petites perturbations, les composantes de $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{X})$ doivent être petites devant un pour tout les points du domaine Ω_0 . On doit donc avoir $\frac{B}{R^2} \leq \frac{B}{R_1^2} \ll 1$, ce que l'on peut traduire par $\alpha_1 \ll (\alpha_1)_{\max}$ avec $(\alpha_1)_{\max} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2}$.

3. Comme $\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}} = 0$, on peut écrire

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) = -\frac{2\mu B}{R^2} (\underline{e}_R \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_R) . \quad (24)$$

4. On a $\text{DIV } \underline{\underline{\sigma}} = \left(\frac{\partial \sigma_{\Theta R}}{\partial R} + 2 \frac{\sigma_{R\Theta}}{R} \right) \underline{e}_\Theta = \underline{0}$. Comme les forces de pesanteur sont négligées, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donc vérifiée. Le couple $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\sigma}})$ proposé vérifie les conditions aux limites (au second ordre en α_1), les équations de l'équilibre et la loi de comportement. Il est donc solution du problème, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

5. Les forces de contact exercées par le cylindre extérieur sur le milieu continu sont égales à

$$\underline{T}(\Theta) = \underline{\underline{\sigma}}[R_2 \underline{e}_R(\Theta)] \cdot \underline{e}_R(\Theta) = -2\mu \frac{B}{R_2^2} \underline{e}_\Theta(\Theta) \quad (25)$$

dans la mesure où $\underline{n} = \underline{e}_R(\Theta)$ est la normale. Le moment de ces forces par rapport à l'axe est égal

$$\underline{C}_2 = C_2 \underline{e}_z = \int_0^{2\pi} R_2 \underline{e}_R(\Theta) \wedge \underline{T}(\Theta) R_2 d\Theta = -4\pi\mu B \underline{e}_z = -4\pi\mu \alpha_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \underline{e}_z . \quad (26)$$

Il est proportionnel à la donnée α_1 , ce qui était prévisible d'après la linéarité du problème posé. Il tend vers l'infini quand l'épaisseur tend vers zéro, ce qui traduit le fait que les déformations deviennent infinies à cette limite. Puisque le milieu est à l'équilibre, le moment des efforts appliqués sur le milieu continu Ω_0 est nul. On a donc $C_1 + C_2 = 0$.

6. Comme $\text{Tr } \underline{\underline{\sigma}} = 0$, on a $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}}$. Le critère de Von Mises est donc $f(\underline{\underline{s}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} - k^2 = \frac{4\mu^2 B^2}{R^4} - k^2$. Le matériau casse au voisinage de $R = R_1$ pour $\alpha_1 > \alpha_c$ avec

$$\alpha_c = \frac{k}{2\mu} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} . \quad (27)$$

Une augmentation de l'épaisseur relative $2\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$ a pour effet d'augmenter l'angle critique α_c .

Écoulement fluide

7. À r fixé, le champ de vitesse proposé correspond à une rotation de vitesse angulaire $q(r)/r$. La transformation entre configuration initiale ($t = 0$) et configuration actuelle correspond donc à une rotation d'angle $t q(R)/R$. Les conditions aux limites en déplacement imposé s'écrivent donc $\omega_1 t = t q(R_1)/R_1$ sur la frontière intérieure, et $0 = t q(R_2)/R_2$ sur la frontière extérieure. On doit donc avoir $q(R_1) = \omega_1 R_1$ et $q(R_2) = 0$, ce qui implique

$$a = -\omega_1 \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad b = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (28)$$

8. Par calcul de gradient en coordonnées cylindriques, on a $\underline{\underline{\text{grad}U}} = -\frac{q(r)}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + q'(r) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$, c'est-à-dire

$$\underline{\underline{\text{grad}U}} = -\left(a + \frac{b}{r^2}\right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \left(a - \frac{b}{r^2}\right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r. \quad (29)$$

Comme $\frac{\partial}{\partial t}(\underline{U}) = 0$, on a $\underline{\gamma} = \underline{\underline{\text{grad}U}} \cdot \underline{U} = -\frac{q^2(r)}{r} \underline{e}_r$, c'est-à-dire

$$\underline{\gamma} = -\left(a^2 r + \frac{2ab}{r} + \frac{b^2}{r^3}\right) \underline{e}_r. \quad (30)$$

La partie symétrique de $\underline{\underline{\text{grad}U}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{d}} = -\frac{b}{r^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r). \quad (31)$$

9. On a bien $\text{div} \underline{U} = \text{Tr} \underline{\underline{d}} = 0$. Le tenseur des contraintes s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} - \frac{2\mu_n b}{r^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r). \quad (32)$$

10. Les forces de contact exercées par le cylindre extérieur sur le milieu sont égales à

$$\underline{T}(\theta) = \underline{\underline{\sigma}}[R_2 \underline{e}_r(\theta)] \cdot \underline{e}_r(\theta) = -p \underline{e}_r(\theta) - 2\mu_n \frac{b}{R_2^2} \underline{e}_\theta(\theta), \quad (33)$$

dans la mesure où $\underline{n} = \underline{e}_r(\theta)$ est la normale. Le moment de ces forces par rapport à l'axe est égal

$$\underline{C}_2 = C_2 \underline{e}_z = \int_0^{2\pi} R_2 \underline{e}_r(\theta) \wedge \underline{T}(\theta) R_2 d\theta = -4\pi \mu_n b \underline{e}_z = -4\pi \mu_n \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \underline{e}_z. \quad (34)$$

11. Comme $\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0$, on a $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}p}$. Les équations de quantité de mouvement s'écrivent alors $\underline{\gamma} = \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = -\underline{\text{grad}p}$, ce qui entraîne, vu notre calcul d'accélération, que p ne dépend que de r et que $-q^2(r)/r = -p'(r)$. On en déduit par intégration en r

$$p(r) = p_0 + \int_{R_1}^r \frac{q^2(s)}{s} ds = p_0 + \left(\frac{a^2 r^2}{2} + 2ab \text{Ln} r - \frac{b^2}{2r^2}\right) - \left(\frac{a^2 R_1^2}{2} + 2ab \text{Ln} R_1 - \frac{b^2}{2R_1^2}\right). \quad (35)$$

Problème 2

Boule de caoutchouc dans une enveloppe

1. Le gradient de la transformation calculé en coordonnées sphériques donne $\underline{\underline{F}}(\underline{X}) = \frac{dF}{dR}(R) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \frac{F(R)}{R} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\Phi)$. Comme $\underline{e}_r = \underline{e}_R$, $\underline{e}_\theta = \underline{e}_\Theta$, $\underline{e}_\varphi = \underline{e}_\Phi$, $r = F(R)$, $R = G(r)$ et $\frac{dF}{dR}[G(r)]G'(r) = 1$, on peut écrire

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{G'(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{r}{G(r)} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) . \quad (36)$$

2. Pour garantir la bijectivité de la transformation au centre, on doit avoir $G(0) = 0$ car, sinon, le centre $r = 0$ serait l'image d'une surface $R = G(0) \neq 0$. Comme $\det \underline{\underline{F}} = \frac{r^2}{G'G^2}$ et $1 + \alpha(T - T_0) = 1 + \alpha(T_1 - T_0) + \alpha \gamma r^2$, la liaison de volume imposé $\det \underline{\underline{F}} = 1 + \alpha(T - T_0)$ s'écrit ici

$$G^2(r) G'(r) = \frac{r^2}{1 + \alpha(T_1 - T_0) + \alpha \gamma r^2} . \quad (37)$$

3. En intégrant l'équation différentielle par rapport à r on obtient $\frac{1}{3}G^3(r) = g(r) + C$. Comme $G(0) = g(0) = 0$, on en déduit que $C = 0$. Comme $g(r) \geq 0$, on peut donc écrire

$$G(r) = [3g(r)]^{\frac{1}{3}} . \quad (38)$$

On en déduit en particulier que $R_0^3 = 3g(r_0)$, ce qui donne par inversion

$$r_0 = g^{-1}(R_0^3/3) . \quad (39)$$

Pour $\alpha = 0$, la transformation se réduit à $r = R$. Il n'y a pas de déplacement car il n'y a pas, dans ce cas, de dilatation thermique.

4. Par application de la loi de Treolar, l'expression de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \rho n k_B T \underline{\underline{F}}(r) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}(r) + \eta(\underline{x}) \underline{\underline{1}}$ s'écrit

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \rho n k_B (T_1 + \gamma r^2) \left[\frac{1}{G'^2(r)} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{r^2}{G^2(r)} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \right] + \eta(\underline{X}) \underline{\underline{1}} . \quad (40)$$

5. Les équations de l'équilibre s'écrivent ici $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$, ce qui s'écrit

$$2\rho n k_B \left[\frac{\gamma r}{G'^2} - (T_1 + \gamma r^2) \left(\frac{r}{G^2} - \frac{1}{r G'^2} + \frac{G''}{G'^3} \right) \right] \underline{e}_r + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi \right) = \underline{0} . \quad (41)$$

On en déduit $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0$, ce qui entraîne que $\eta(r)$ ne dépend que de r . Les équations de l'équilibre (41) entraînent ensuite

$$\eta'(r) = 2\rho n k_B \left[(T_1 + \gamma r^2) \left(\frac{r}{G^2} - \frac{1}{r G'^2} + \frac{G''}{G'^3} \right) - \frac{\gamma r}{G'^2} \right] = 2\rho n k_B H'(r) . \quad (42)$$

On a donc $\eta'(r) = \beta H'(r)$ avec $\beta = 2\rho n k_B$. La fonction $\eta(r) = 2\rho n k_B H(r) + C$ s'obtient par intégration, avec constante d'intégration $C = \eta(r_0)$.

6. L'enveloppe exerce sur la sphère de caoutchouc le vecteur contrainte :

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}(r_0) \underline{e}_r = \left[\rho n k_B \frac{T_1 + \gamma r_0^2}{G'^2(r_0)} + \eta(r_0) \right] \underline{e}_r = \left[\rho n k_B \frac{T_\Omega}{G'^2(r_0)} + \eta(r_0) \right] \underline{e}_r . \quad (43)$$

Par ailleurs, en appliquant l'expression de l'énoncé avec $p_i = p_0$, $p_e = 0$, $T = T_\Omega$ et $\lambda = r_0/R_0$, on obtient

$$p_0 \approx 2\rho_\Omega n_\Omega k_B T_\Omega \frac{R_1 - R_0}{R_0} \left(\frac{R_0}{r_0} - \frac{R_0^7}{r_0^7} \right) . \quad (44)$$

La continuité des efforts de contact entraîne $\underline{T} = -p_0 \underline{e}_r$. On en déduit donc

$$\eta_0 = -k_B T_\Omega \left[2 \rho_\Omega n_\Omega \frac{R_1 - R_0}{R_0} \left(\frac{R_0}{r_0} - \frac{R_0^7}{r_0^7} \right) + \rho n \frac{1}{G'^2(r_0)} \right]. \quad (45)$$

Problème 3 Vecteur contrainte exercé par un amas de ressorts

1. On note $x_{I_1}(t) = x_I - \frac{1}{2}r_I(t)$ et $x_{I_2}(t) = x_I + \frac{1}{2}r_I(t)$ les positions respectives des masses m . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors $m \ddot{x}_{I_1}(t) \underline{e}_x = \underline{F}_{I_2 I_1}(r_I)$ et $m \ddot{x}_{I_2}(t) \underline{e}_x = -\underline{F}_{I_2 I_1}(r_I)$, c'est-à-dire $-\frac{m}{2} \ddot{r}_I(t) = \alpha r_I(t)$. La définition de la notation $p_I(t) = \frac{m}{2} \dot{r}_I(t)$ s'écrit bien $\dot{r}_I = \frac{\partial E}{\partial p_I} = \frac{2 p_I}{m}$. La loi fondamentale de la dynamique peut s'écrire $-\dot{p}_I = \alpha r_I = \frac{\partial E}{\partial r_I}$.

2. En appliquant la formule $\int_{\mathbf{R}^+} \exp\left(-\frac{x^2}{2\beta}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi\beta}{2}}$, on calcule

$$Z = \left[\int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{p_I^2}{m k_B T}\right) dp_I \right] \left[\int_{\mathbf{R}^+} \exp\left(-\frac{\alpha r_I^2}{2 k_B T}\right) dr_I \right] = \pi k_B T \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}. \quad (46)$$

La densité $\tilde{n}(x, p_I, r_I)$ s'écrit

$$\tilde{n}(x, p_I, r_I) = n(x) f_B(\{q_I\}) = \frac{n(x)}{\pi k_B T} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \exp\left(-\frac{p_I^2}{m k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\alpha r_I^2}{2 k_B T}\right). \quad (47)$$

La température $T = 0$ correspond à la configuration $\{q_I\}$ telle que $p_I = 0$ et $r_I = 0$, c'est à dire au cas où tous les ressorts sont immobiles et de longueur nulle.

3. Le vecteur contrainte exercé à travers une interface élémentaire da de normale \underline{e}_x est

$$\begin{aligned} \underline{T}(x) da &= \frac{n(x)}{\pi k_B T} \sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \left[\int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{p_I^2}{m k_B T}\right) dp_I \right] \left[\int_{\mathbf{R}^+} \alpha r_I^2 \exp\left(-\frac{\alpha r_I^2}{2 k_B T}\right) dr_I \right] da \underline{e}_x \\ &= n(x) k_B T da \underline{e}_x. \end{aligned} \quad (48)$$

4. Pour une extrémité d'échantillon de normale \underline{e}_x , il faut exercer une force par unité de surface $n(x) k_B T \underline{e}_x$ pour que le système soit en équilibre. Le système peut donc représenter un muscle en contraction équilibrant une traction. La force est proportionnelle à la température. Elle est indépendante de la raideur élémentaire : pour une raideur plus grande, la force élémentaire croît à allongement fixé, mais la probabilité d'observer cet allongement décroît car il nécessite plus d'énergie.

CONTRÔLE CLASSANT

Mécanique des Milieux Continus - MEC431

du Jeudi 21 janvier 2010

Sujet proposé par M. Olivier Thual

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les trois parties sont indépendantes.

* * *

Exercice (3 points) Champ d'autocontraintes dans un cylindre

On considère un solide dont la configuration d'équilibre est un cylindre de révolution Ω de hauteur h et de rayon R constitué des points \underline{x} tels que $x^2 + y^2 \leq R^2$ et $0 \leq z \leq h$ dans le repère $(0, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. On suppose que les composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$, dans ce repère et à l'équilibre, s'écrivent

$$\sigma_{xx} = -A(R^2 - x^2 - 3y^2), \quad \sigma_{xy} = -2Axy, \quad \sigma_{yy} = -A(R^2 - 3x^2 - y^2) \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (1)$$

1. Dans quelle unité s'exprime la constante A ? Calculer les forces massiques \underline{F} .

2. On note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\underline{e}_r = (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y)/r$ et $\underline{e}_\theta = (-y\underline{e}_x + x\underline{e}_y)/r$. Calculer $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_r$ et $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_\theta$. En déduire les composantes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} et $\sigma_{\theta z}$ dans le repère $(0, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ des coordonnées cylindriques.

3. Calculer les forces surfaciques \underline{T}^d exercées sur le cylindre par son extérieur. Calculer la résultante \underline{F} des forces de contact exercées par la partie $y \geq 0$ du cylindre sur le rectangle formé des points \underline{x} du cylindre tels que $0 \leq x \leq R$, $y = 0$ et $0 \leq z \leq h$.

4. On suppose que $A > 0$ mesure l'intensité du serrage qui conduit à l'état d'autocontraintes décrit par le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Quelle est la valeur maximale de A lorsque le critère de rupture du matériau est gouverné par le critère de Tresca

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sup_{K,L} (\sigma_K - \sigma_L - \sigma_0) \leq 0, \quad (2)$$

où σ_0 est une constante caractéristique du matériau et σ_K et σ_L les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}$?

Problème 1 (7 points) Compression uniaxiale d'un matériau composite anisotrope

On considère un matériau composite dont le comportement rhéologique en petites déformations est caractérisé par l'énergie libre

$$\rho_0 \psi = \rho_0 \psi_h + \frac{1}{|\Omega_0|} \sum_{n=1}^{N_a} \frac{1}{2} k_n \left(\frac{\delta l_n}{l_n} \right)^2 \quad (3)$$

où $\rho_0 \psi_h$ décrit le comportement homogène et isotrope d'un substrat de volume $|\Omega_0|$ dans lequel sont insérées N_a fibres de longueurs l_n , avec $n = 1, \dots, N_a$. On suppose que ces fibres sont toutes orientées dans la direction d'un vecteur unitaire $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ d'orientation fixée $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et que δl_n désigne leurs allongements respectifs lors d'une déformation caractérisée par le tenseur de Green Lagrange $\underline{\underline{e}}$. On suppose que les constantes de raideur k_n sont toutes égales à k_a .

Dans ce problème, on suppose que toutes les transformations sont isothermes et vérifient l'hypothèse des petites transformations. On néglige les forces de masse telles que le poids. On rappelle que la partie isotrope de la densité d'énergie libre est donnée par

$$\rho_0 \psi_h(\underline{\underline{e}}) = \frac{1}{2} \lambda_h \text{Tr}^2 \underline{\underline{e}} + \mu_h \text{Tr} \underline{\underline{e}}^2 + \rho_0 \mathbf{e}_T \quad (4)$$

Ci-dessus, λ_h et μ_h sont les coefficients de Lamé associés à l'expression de l'énergie libre homogène et isotrope et \mathbf{e}_T est constante pour une évolution isotherme.

On considérera simultanément les repères orthonormés et directs $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ et $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, leurs positionnement respectif étant ajustable en fonction des questions.

Loi de comportement anisotrope

5. Exprimer δl_n en fonction de l_n , \underline{e}_θ et du tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}$. Justifier alors l'expression

$$\rho_0 \psi(\underline{\underline{e}}) = \rho_0 \psi_h(\underline{\underline{e}}) + \gamma_a (\underline{e}_\theta \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{e}_\theta)^2 \quad (5)$$

où γ_a est une constante que l'on exprimera en fonction de N_a , $|\Omega_0|$ et k_a .

6. Expliciter l'expression des composantes S_{ij} du tenseur des contraintes de Piola $\underline{\underline{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}})$ en fonction des composantes e_{ij} du tenseur de Green Lagrange $\underline{\underline{e}}$ dans le cas particulier $\underline{e}_\theta = \underline{e}_3$. Dans le cas où $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ quelconque, montrer que l'on a

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{e}}) = \lambda (\text{Tr} \underline{\underline{e}}) \mathbb{1} + 2 \mu \underline{\underline{e}} + 2 \gamma (\underline{e}_\theta \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{e}_\theta) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (6)$$

où λ , μ et γ sont des coefficients que l'on exprimera en fonction des données du problème.

7. On définit le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{C}}}$ par la relation $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{e}}) = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{e}}$. On introduit, comme dans le cours, les tenseurs $\underline{\underline{\underline{J}}}$ et $\underline{\underline{\underline{K}}}$ définis par $\underline{\underline{\underline{J}}} : \underline{\underline{A}} = \frac{1}{3} (\text{Tr} \underline{\underline{A}}) \mathbb{1}$ et $\underline{\underline{\underline{K}}} : \underline{\underline{A}} = \text{Dev} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} (\text{Tr} \underline{\underline{A}}) \mathbb{1}$ pour tout tenseur $\underline{\underline{A}}$ d'ordre deux. Montrer que le tenseur d'élasticité $\underline{\underline{\underline{C}}}$ est donné par

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = (3\lambda + 2\mu) \underline{\underline{\underline{J}}} + 2\mu \underline{\underline{\underline{K}}} + 2\gamma \underline{\underline{\underline{U}}}(\theta) \quad (7)$$

où $\underline{\underline{\underline{U}}}(\theta)$ est un tenseur d'ordre 4 que l'on explicitera.

Méthode des déplacements

8. On considère un bloc cubique de côté h constitué de ce matériau composite et on lui impose les déplacements suivants :

- Sur la face S_0 d'équation $z = 0$: $\underline{\xi}^d = \underline{0}$.

- Sur la face S_h d'équation $z = h : \underline{\xi}^d = -\delta h \underline{e}_z$.
- Sur les autres faces : $\underline{\xi}^d = -\delta z \underline{e}_z$.

À l'aide de la méthode des déplacements, déterminer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ à l'équilibre dans le cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\underline{e}_\theta = \underline{e}_z$. Que devient, pour ces mêmes déplacements, l'expression de $\underline{\sigma}$ dans le cas $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$ quelconque ?

9. Calculer $\underline{e}_x \cdot [\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta : (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \cdot \underline{e}_z$ dans le cas $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$. Calculer, dans le cas de l'expérience de la question précédente avec θ quelconque, la densité surfacique de force de cisaillement $T_x = \underline{T} \cdot \underline{e}_x$ exercée sur la face S_h . Montrer que T_x est maximum pour $\theta = \pi/3$. Calculer la valeur du maximum de T_x pour l'application numérique $\lambda = \mu = 2$ GPa, $\gamma = 20$ GPa et $\delta = 10^{-2}$.

Méthode des contraintes

On admet que la loi de comportement obtenue s'inverse en

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{S}) = \left[-\frac{\nu_a}{E_a} \text{Tr} \underline{S} + u (\underline{e}_\theta \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_\theta) \right] \underline{\underline{1}} + \frac{1 + \nu_a}{E_a} \underline{S} + [u \text{Tr} \underline{S} - v (\underline{e}_\theta \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_\theta)] \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta. \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{2\mu [\mu (3\lambda + 2\mu) + 2\gamma (\lambda + \mu)]}{2\mu (\lambda + \mu) + \gamma (\lambda + 2\mu)} & \nu_a &= \frac{\lambda (\mu + \gamma)}{2\mu (\lambda + \mu) + \gamma (\lambda + 2\mu)} \\ u &= \frac{\gamma \lambda}{2\mu [\mu (3\lambda + 2\mu) + 2\gamma (\lambda + \mu)]} & v &= \frac{\gamma (3\lambda + 2\mu)}{2\mu [\mu (3\lambda + 2\mu) + 2\gamma (\lambda + \mu)]} \end{aligned}$$

On place à présent le bloc cubique de côté h entre deux plateaux. Le bloc peut glisser sans frotter sur les frontières supérieure S_h et inférieure S_0 . Il est libre de contrainte sur ses frontières latérales S_e . Le plateau du bas est immobile. Le plateau du haut se rapproche de δh .

10. Écrire les conditions aux limites caractérisant ce problème de compression uniaxiale.

11. On cherche le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = -T \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ où T est une constante. Exprimer le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ en fonction de T dans le cas $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$? En déduire l'expression de ϵ_{zz} en fonction de E_a, ν_a, u, v et θ .

12. Montrer que le champ de déplacement est de la forme

$$\underline{\xi} = (\epsilon_{xx} x + \epsilon_{xz} z) \underline{e}_x + \epsilon_{yy} y \underline{e}_y + (\epsilon_{xz} x + \epsilon_{zz} z) \underline{e}_z + (\xi_x^0 - r y + q z) \underline{e}_x + (\xi_y^0 + r x - p z) \underline{e}_y + (\xi_z^0 - q x + p y) \underline{e}_z. \quad (9)$$

Que représentent les constantes $\xi_x^0, \xi_y^0, \xi_z^0, p, q$ et r ? En tenant compte de la condition aux limites $\xi_z = 0$ sur S_0 , montrer que le champ de déplacement est de la forme

$$\underline{\xi} = (\epsilon_{xx} x + 2\epsilon_{xz} z) \underline{e}_x + \epsilon_{yy} y \underline{e}_y + \epsilon_{zz} z \underline{e}_z + (\xi_x^0 - r y) \underline{e}_x + (\xi_y^0 + r x) \underline{e}_y. \quad (10)$$

En déduire l'expression de la force T en fonction de E_a, ν_a, u, v, θ et δ .

13. On plante une aiguille le long de \underline{e}_z et une aiguille le long de \underline{e}_x avant de rapprocher les deux plateaux. De combien l'angle de $\pi/2$ entre les deux aiguilles varie-t-il quand on rapproche les plateaux. Ce résultat vous semble-t-il intuitif ?

Problème 2 (10 points)

Compression uniaxiale d'un matériau composite inhomogène

On considère deux matériaux élastiques homogènes et isotropes respectivement caractérisés par leurs modules de Young E_1 et E_2 et leurs coefficients de Poisson ν_1 et ν_2 . On note (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2) les coefficients de Lamé respectifs correspondants. Avec chacun de ces matériaux on fabrique des parallélépipèdes rectangles de dimensions $a \times a \times 2a$.

On cherche à décrire le comportement rhéologique de matériaux composites obtenus en collant de tels parallélépipèdes rectangles issus des matériaux homogènes 1 ou 2.

On se placera toujours dans le cadre de l'hypothèse des petites transformations, à température constante et en négligeant les forces de masse telles que le poids.

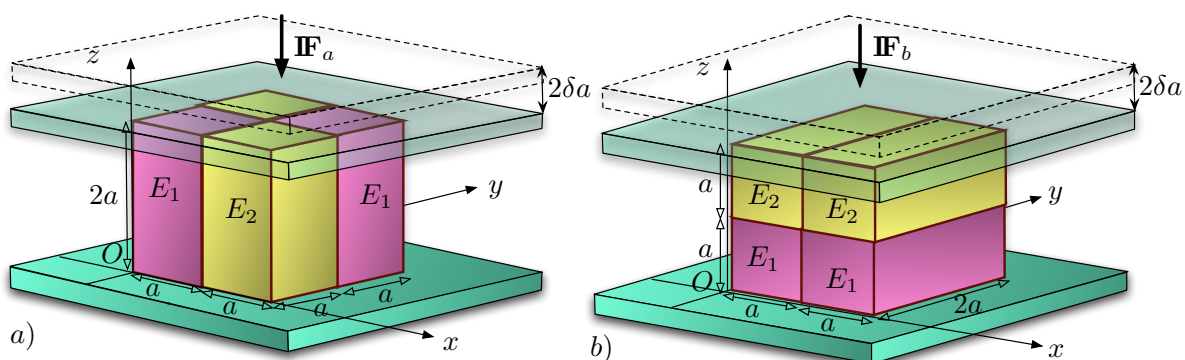


Figure 1: Déplacement imposé $-2\delta a \underline{e}_z$. a) Configuration longitudinale. b) Configuration transverse.

Configuration longitudinale dans un cas particulier

On construit un bloc cubique de côté $2a$ en collant entre eux deux parallélépipèdes rectangles issus du matériau 1 à deux parallélépipèdes rectangles issus du matériau 2 comme indiqué sur la figure 1a. Le bloc composite ainsi obtenu est posé sur un plateau dans la *configuration longitudinale*, c'est-à-dire avec les côtés de longueur $2a$ dans la direction de \underline{e}_z .

À partir de l'état initial naturel, à température constante et en l'absence de forces de masse, on comprime le bloc entre deux plateaux rigides indéformables agissant sur les surfaces S_0 ($z = 0$) et S_{2a} ($z = 2a$). Les faces horizontales glissent sans frottement sur les plateaux. Les faces verticales du bloc restent libres de contraintes.

Le plateau inférieur étant fixe, on impose un déplacement vertical $-2\delta a \underline{e}_z$ ($\delta > 0$) au plateau supérieur et on mesure la résultante $-\mathbf{F}_a \underline{e}_z$ des efforts exercés par le plateau supérieur sur la face S_{2a} avec $\mathbf{F}_a > 0$.

On cherche la solution d'équilibre de ce problème dans le *cas particulier* $\nu = \nu_1 = \nu_2$.

14. Décrire l'ensemble des champs de déplacement $\underline{\xi}'$ cinématiquement admissibles $\mathcal{C}(S_{\xi_i}, \xi_i^d)$ en explicitant les conditions aux limites en déplacement. Décrire l'ensemble des tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}'$ statiquement admissibles $\mathcal{S}(0, S_{T_i}, T_i^d)$ en explicitant les conditions aux limites en contraintes.

15. On cherche à résoudre le problème d'équilibre en petites perturbations par la méthode *des déplacements* en cherchant le champ de déplacement sous la forme

$$\underline{\xi} = \delta(\alpha x \underline{e}_x + \beta y \underline{e}_y - z \underline{e}_z) + (\xi_x^0 - r y) \underline{e}_x + (\xi_y^0 + r x) \underline{e}_y . \quad (11)$$

Que représentent les constantes ξ_x^0 , ξ_y^0 et r ? Exprimer le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ dans chacun des parallélépipèdes en fonction de δ , α et β ainsi que des coefficients de Lamé (λ_1, μ_1) ou (λ_2, μ_2) . Identifier les constantes α et β à partir des conditions aux limites en contraintes et donner leur expression en fonction de ν , E_1 et E_2 . Donner l'expression du tenseur des contraintes en fonction de δ , E_1 ou E_2 dans chacun des parallélépipèdes. Vérifier les équations d'équilibre et la continuité des forces de contact à l'interface de collage des parallélépipèdes.

16. On note $F_a = \mathbf{IF}_a/(4a^2)$ la densité d'efforts surfaciques exercée par le plateau supérieur sur la face S_{2a} et on définit le "module de Young équivalent" E_a du bloc composite dans la *configuration longitudinale* par la relation $F_a = E_a \delta$. Exprimer E_a en fonction de E_1 et E_2 .

Configuration transverse dans un cas particulier

On construit maintenant un nouveau bloc cubique de côté $2a$ en collant entre eux deux parallélépipèdes rectangles issus du matériau 1 à deux parallélépipèdes rectangles issus du matériau 2 comme indiqué sur la figure 1b. Le bloc composite ainsi obtenu est posé sur un plateau dans la *configuration transverse*, c'est-à-dire avec les côtés de longueur $2a$ dans la direction de \underline{e}_y .

On impose de nouveau un déplacement vertical $-2\delta a \underline{e}_z$ ($\delta > 0$) au plateau supérieur et on mesure la résultante $-\mathbf{IF}_b \underline{e}_z$ des efforts exercés par le plateau supérieur sur la face S_{2a} avec $\mathbf{IF}_b > 0$. On note $F_b = \mathbf{IF}_b/(4a^2)$ la densité d'effort surfacique associée.

On cherche la solution d'équilibre de ce problème dans le *cas particulier* $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2$.

17. Résoudre le problème d'équilibre en petites perturbations par la méthode des contraintes en prenant un tenseur des contraintes de la forme $\underline{\sigma} = -T \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ où T est une constante que l'on précisera. On pourra montrer que le champ de déplacement se met sous la forme

$$\underline{\xi} = (\epsilon_{xx} x \underline{e}_x + \epsilon_{yy} y \underline{e}_y + \epsilon_{zz} z \underline{e}_z) + (\xi_{ix}^0 - r_i y + q_i z) \underline{e}_x + (\xi_{iy}^0 + r_i x - p_i z) \underline{e}_y + (\xi_{iz}^0 - q_i x + p_i y) \underline{e}_z \quad (12)$$

avec $i = 1$ pour $0 \leq z \leq a$ et $i = 2$ pour $a \leq z \leq 2a$, où ξ_{ix} , ξ_{iy} , ξ_{iz} , p_i , q_i et r_i sont des constantes d'intégration. On vérifiera bien la continuité des déplacements à l'interface de collage des parallélépipèdes.

18. On définit le "module de Young équivalent" E_b du bloc composite dans la *configuration transversale* par la relation $F_b = E_b \delta$. Exprimer E_b en fonction de E_1 et E_2 .

Encadrement du module dans le cas général

On choisit maintenant au hasard le nombre de parallélépipèdes rectangles de dimension $a \times a \times 2a$ issus du matériau 1 (de zéro à quatre) ou du matériau 2 (de quatre à zéro) et on les colle dans des orientations quelconques permettant de construire un cube de côté $2a$ (voir deux exemples sur la figure 2).

On suppose que les conditions aux limites sont $T_x^d = T_y^d = 0$ et $\xi_z^d = -2\delta a$ sur la face supérieur S_{2a} , $T_x^d = T_y^d = 0$ et $\xi_z^d = 0$ sur la face inférieure S_0 et $T^d = 0$ sur les faces verticales. On suppose l'état initial naturel, la température $T = T_0$ constante et les forces de masses $\underline{F} = \underline{0}$ nulles.

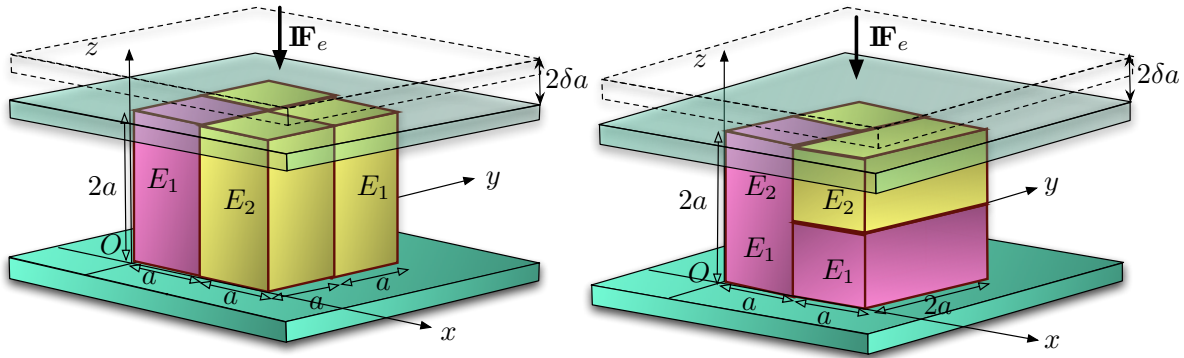


Figure 2: Exemple de cubes construits avec quatre parallélépipèdes choisis au hasard.

On mesure la résultante $-\mathbf{F}_e \underline{e}_z$ des efforts exercés par le plateau supérieur sur la face S_{2a} avec $\mathbf{F}_e > 0$ et on note $F_e = \mathbf{F}_e / (4a^2)$ la densité d'efforts surfaciques. On définit le "module de Young effectif" E_e de la configuration par la relation $F_e = E_e \delta$. On cherche à encadrer E_e dans le cas où E_1, E_2, ν_1 et ν_2 ainsi que la disposition ou la nature des parallélépipèdes du bloc cubique sont quelconques.

19. En choisissant, par convention, $\mathbf{W}_T(T_0) = 0$ dans la définition des énergies \mathbf{W} et \mathbf{W}^* en petites transformations isothermes, il a été vu en cours que les fonctionnelles d'énergie et d'énergie complémentaires sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\underline{\xi}') &= \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2} \lambda_1 \text{Tr}^2 \underline{\xi}' + \mu_1 \underline{\xi}' : \underline{\xi}' \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2} \lambda_2 \text{Tr}^2 \underline{\xi}' + \mu_2 \underline{\xi}' : \underline{\xi}' \right] d\Omega_2, \\ \mathbf{W}^*(\underline{\sigma}') &= \int_{\Omega_1} \left(\frac{1 + \nu_1}{2 E_1} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' - \frac{\nu_1}{2 E_1} \text{Tr}^2 \underline{\sigma}' \right) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \left(\frac{1 + \nu_2}{2 E_2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' - \frac{\nu_2}{2 E_2} \text{Tr}^2 \underline{\sigma}' \right) d\Omega_2, \end{aligned} \quad (13)$$

où Ω_1 est le domaine contenant le matériau 1 et Ω_2 celui qui contient le matériau 2, et où (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2) sont les coefficients de Lamé des matériaux constitutifs. Exprimer $\Phi(\underline{\xi}')$ et $\Phi^*(\underline{\sigma}')$ si $\underline{\xi}'$ est cinématiquement admissible et $\underline{\sigma}'$ est statiquement admissible. Montrer que l'on a $\mathbf{W}(\underline{\xi}) = \mathbf{W}^*(\underline{\sigma}) = 4a^3 \delta F_e$ si $\underline{\xi}$ et $\underline{\sigma}$ sont solutions du problème d'équilibre.

20. Montrer que les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}'_\Gamma = -\Gamma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, où Γ est un paramètre arbitraire, sont statiquement admissibles. En appliquant le principe du potentiel minimum à cette famille à un paramètre, trouver une borne inférieure E_{inf} pour E_e . Préciser la valeur de Γ qui optimise cette borne inférieure. Étant données deux constantes B_1 et B_2 , on pourra noter $\bar{B} = (|\Omega_1| B_1 + |\Omega_2| B_2) / |\Omega_0|$ où $|\Omega_1|$ est le volume occupé par le matériau 1 et $|\Omega_2|$ est le volume occupé par le matériau 2.

21. Montrer que les champs $\underline{\xi}'_\gamma = \delta (\gamma x \underline{e}_x + \gamma y \underline{e}_y - z \underline{e}_z)$, où γ est un paramètre arbitraire, sont cinématiquement admissibles. En appliquant le principe du potentiel minimum à cette famille à un paramètre, trouver une borne supérieure E_{sup} pour E_e . Préciser la valeur de γ qui optimise cette borne supérieure.

22. On suppose que $\lambda_1 = 2$ GPa, $\mu_1 = 2$ GPa, $\lambda_2 = 4$ GPa et $\mu_2 = 2$ GPa. Comparer numériquement les deux bornes dans le cas $|\Omega_1| = |\Omega_2|$.

CORRIGÉ

Exercice Champ d'autocontraintes dans un cylindre

1. L'unité de la constante A s'exprime en Pa/m². Puisque le système est à l'équilibre, on peut écrire $\rho \underline{F} = -\text{div } \underline{\sigma}$ où ρ est la masse volumique. On en déduit alors $\underline{F} = \underline{0}$ puisque

$$\text{div } \underline{\sigma} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \underline{e}_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) \underline{e}_y = (2Ax - 2Ax) \underline{e}_x + (-2Ay + 2Ay) \underline{e}_y = \underline{0}. \quad (14)$$

2. Le calcul des produits suivants :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r &= -\frac{Ax}{r}(R^2 - x^2 - 3y^2 + 2y^2) \underline{e}_x - \frac{Ay}{r}(R^2 - 3x^2 - y^2 + 2x^2) \underline{e}_y = -A(R^2 - r^2) \underline{e}_r \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_\theta &= \frac{Ay}{r}(R^2 - x^2 - 3y^2 - 2x^2) \underline{e}_x - \frac{Ax}{r}(R^2 - 3x^2 - y^2 - 2y^2) \underline{e}_y = -A(R^2 - 3r^2) \underline{e}_\theta \end{aligned} \quad (15)$$

permet d'écrire le tenseur des contraintes sous la forme $\underline{\sigma} = \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ avec

$$\sigma_{rr} = -A(R^2 - r^2), \quad \sigma_{\theta\theta} = -A(R^2 - 3r^2) \quad \text{et} \quad \sigma_{zz} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0. \quad (16)$$

3. Sur la face S_h d'équation $z = h$ et de normale sortante est \underline{e}_z , on a $\underline{T}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}$. Sur la face S_0 d'équation $z = 0$ et de normale sortante $-\underline{e}_z$, on a $\underline{T}^d = -\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = \underline{0}$. Sur la surface cylindrique d'équation $r = R$ et de normale sortante \underline{e}_r , on a $\underline{T}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r = -A(R^2 - R^2) \underline{e}_r = \underline{0}$. En conclusion, $\underline{T}^d = \underline{0}$ sur toute la frontière du cylindre.

En choisissant \underline{e}_y comme normale du rectangle d'équation $0 \leq x \leq R$, $y = 0$ et $0 \leq z \leq h$, on obtient une force surfacique $\underline{F} = \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_y = -A(R^2 - 3x^2) \underline{e}_y$. La résultante de cette distribution de force est

$$\underline{F} = \int_0^h \int_0^R \underline{F} dx dz = -Ah [R^2 x - x^3]_0^R \underline{e}_y = \underline{0}. \quad (17)$$

4. Les contraintes principales de $\underline{\sigma}$ sont $\sigma_I = -A(R^2 - r^2)$, $\sigma_{II} = -A(R^2 - 3r^2)$ et $\sigma_{III} = 0$. Le maximum de $|\sigma_I - \sigma_{II}| = 2Ar^2$, $|\sigma_I - \sigma_{III}| = 2A(R^2 - r^2)$ et $|\sigma_{II} - \sigma_{III}| = 2A|R^2 - 3r^2|$ pour tous les $r \in [0, R]$ est $2AR^2$. Pour éviter la rupture du solide, gouvernée par le critère de Tresca, il faut que $A \leq \sigma_0/(2R^2)$.

Problème 1 Compression uniaxiale d'un matériau composite anisotrope

Loi de comportement anisotrope

5. L'allongement de la fibre n est $\delta l_n = l_n (\sqrt{\underline{e}_\theta \cdot \underline{C} \cdot \underline{e}_\theta} - 1)$ avec $\underline{C} = \underline{1} + 2\underline{e}$. Sous l'hypothèse des petites déformations, on a $\delta l_n/l_n \approx \underline{e}_\theta \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_\theta$ et donc $\rho_0 \psi(\underline{e}) \approx \rho_0 \psi_h(\underline{e}) + \gamma_a (\underline{e}_\theta \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_\theta)^2$ avec $\gamma_a = \frac{1}{2} N_a k_a / |\Omega_0|$.

6. Dans le cas $\underline{e}_\theta = \underline{e}_3$, l'expression de l'énergie libre est

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi(\underline{e}) &= \frac{1}{2} \lambda_h (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 \\ &+ \mu_h (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + e_{12}^2 + e_{21}^2 + e_{13}^2 + e_{31}^2 + e_{23}^2 + e_{32}^2) + \gamma_a e_{33}^2 + \rho_0 \mathbf{e}_T \cdot \end{aligned} \quad (18)$$

On en déduit l'expression des composantes $S_{ij} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial e_{ij}} \psi$ qui s'écrivent

$$\begin{aligned} S_{11} &= (\lambda + 2\mu) e_{11} + \lambda e_{22} + \lambda e_{33} , & S_{23} &= S_{32} = 2\mu e_{23} , \\ S_{22} &= \lambda e_{11} + (\lambda + 2\mu) e_{22} + \lambda e_{33} , & S_{31} &= S_{13} = 2\mu e_{31} , \\ S_{33} &= \lambda e_{11} + \lambda e_{22} + (\lambda + 2\mu + 2\gamma) e_{33} , & S_{21} &= S_{12} = 2\mu e_{21} , \end{aligned} \quad (19)$$

avec $\lambda = \lambda_h$, $\mu = \mu_h$ et $\gamma = \gamma_a$. Comme la seule composantes non nulle de $\underline{B} = (\underline{e}_3 \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_3) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$ est $B_{33} = e_{33}$, on voit que $\underline{S}(\underline{e}) = \lambda (\text{Tr } \underline{e}) \underline{\mathbb{1}} + 2\mu \underline{e} + 2\gamma (\underline{e}_3 \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_3) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$. Si \underline{e}_θ est de direction quelconque, on peut choisir le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de telle sorte que \underline{e}_3 coïncide avec \underline{e}_θ et on retrouve l'expression intrinsèque (6) de $\underline{S}(\underline{e})$ en changeant \underline{e}_3 en \underline{e}_θ .

7. On retrouve, lorsque $\gamma = 0$, la formule du cours. Pour $\gamma \neq 0$, on a $\underline{\underline{U}}(\theta) = \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$ dans la mesure où $(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) : \underline{e} = (\underline{e}_\theta \cdot \underline{e} \cdot \underline{e}_\theta) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$.

Méthode des déplacements

8. L'hypothèse des petites transformations permet d'écrire $\underline{\underline{\sigma}} \approx \underline{S}$ et $\underline{\underline{\epsilon}} \approx \underline{e}$. On cherche un champ de déplacement sous la forme $\xi = -\delta z \underline{e}_z$ dont le tenseur des petites déformations associé est alors $\underline{\underline{\epsilon}} = -\delta \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. En remplaçant \underline{e} et par $\underline{\underline{\epsilon}}$ et \underline{S} par $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la loi de comportement (6) et en choisissant $\underline{e}_3 = \underline{e}_z$, on obtient

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\delta [\lambda \underline{\mathbb{1}} + 2(\mu + \gamma) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z] . \quad (20)$$

Dans le cas $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$, l'identité $\underline{e}_\theta \cdot (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \cdot \underline{e}_\theta = (\underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_z)^2 = \sin^2 \theta$ permet d'écrire

$$\underline{\underline{\sigma}} = -\delta [\lambda \underline{\mathbb{1}} + 2\mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + 2\gamma \sin^2 \theta (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta)] , \quad (21)$$

9. On a $\underline{\underline{U}}(\theta) : (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) = (\underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_z)^2 (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta)$ avec $\underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_z = \sin \theta$. Comme $\underline{e}_x \cdot (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \cdot \underline{e}_z = (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_\theta) (\underline{e}_z \cdot \underline{e}_\theta)$, on en déduit que $\underline{e}_x \cdot [\underline{\underline{U}}(\theta) : (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)] \cdot \underline{e}_z = \sin^3 \theta \cos \theta$. La force surfacique de cisaillement exercée sur la face S_h est $T_x = \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z = -2\gamma \delta \sin^3 \theta \cos \theta = 2\gamma \delta f(\sin \theta)$ avec $f(s) = s^3 (1 - s^2)^{1/2}$. Comme $f'/f = \frac{3}{s} + \frac{-2s}{2(1-s^2)} = \frac{3-4s^2}{s(1-s^2)}$, $f(s)$ est maximale pour $s = \sqrt{3}/2$ et T_x est maximale pour $\theta = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$. La valeur maximale de T_x est alors $T_m = 2f(\sqrt{3}/2) \gamma \delta = \frac{3\sqrt{3}}{8} \gamma \delta$. Pour $\gamma = 20$ GPa et $\delta = 10^{-2}$, on a $T_m = 0,13$ GPa.

Méthode des contraintes

10. Les conditions aux limites sont

- Sur la face S_0 d'équation $z = 0$: $\xi_z^d = 0$, $-\underline{e}_x \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_z = T_x^d = 0$, $-\underline{e}_y \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_z = T_y^d = 0$.
- Sur la face S_h d'équation $z = h$: $\xi_z^d = -\delta h$, $\underline{e}_x \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_z = T_x^d = 0$, $\underline{e}_y \cdot \underline{S} \cdot \underline{e}_z = T_y^d = 0$.

- Sur les autres faces de normale \underline{N} sortante : $\underline{S} \cdot \underline{N} = \underline{T}^d = \underline{0}$.

11. L'hypothèse des petites transformations permet d'écrire $\underline{\sigma} \approx \underline{S}$ et $\underline{\epsilon} \approx \underline{e}$. Pour un champ de contrainte $\underline{\sigma} = -T \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$, dans le cas $\underline{e}_\theta = \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_z$, l'utilisation de (8) en remplaçant \underline{e} par $\underline{\epsilon}$ et \underline{S} par $\underline{\sigma}$ permet d'écrire

$$\underline{\epsilon} = -T \left[\left(-\frac{\nu_a}{E_a} + u \sin^2 \theta \right) \underline{\mathbb{1}} + \frac{1 + \nu_a}{E_a} (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) + (u - v \sin^2 \theta) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \right]. \quad (22)$$

On en déduit

$$\epsilon_{zz} = -T \left[\frac{1}{E_a} + u \sin^2 \theta + (u - v \sin^2 \theta) (\underline{e}_z \cdot \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \cdot \underline{e}_z) \right] = -T \left(\frac{1}{E_a} + 2u \sin^2 \theta - v \sin^4 \theta \right). \quad (23)$$

12. Comme $\underline{\epsilon}$ est constant et que $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0$, on peut écrire sous la forme (9) où $\xi_x^0 \underline{e}_x + \xi_y^0 \underline{e}_y + \xi_z^0 \underline{e}_z$ est un déplacement infinitésimal et $p \underline{e}_x + q \underline{e}_y + r \underline{e}_z$ un vecteur rotation infinitésimal. La condition aux limites $\xi_z = \epsilon_{xz} x + \epsilon_{zz} z + \xi_z^0 - q x + p y = 0$ pour tout x et tout y sur la face S_0 d'équation $z = 0$ entraîne $q = \epsilon_{xz}$, $p = 0$ et $\xi_z^0 = 0$. Le champ est donc de la forme (10). La condition aux limites $\xi_z = -\delta h$ sur la face S_h d'équation $z = h$ entraîne $\epsilon_{zz} = -\delta$. En utilisant l'expression (23) de ϵ_{zz} , on obtient finalement

$$T = \delta \left(\frac{1}{E_a} + 2u \sin^2 \theta - v \sin^4 \theta \right)^{-1}. \quad (24)$$

13. L'angle recherché est l'angle de glissement des directions \underline{e}_x et \underline{e}_z qui vérifie $\Gamma = 2\epsilon_{xz}$ et vaut donc

$$\Gamma = -2T(u - v \sin^2 \theta) \cos \theta \sin \theta = 2\delta \left(\frac{1}{E_a} + 2u \sin^2 \theta - v \sin^4 \theta \right)^{-1} (v \sin^2 \theta - u) \cos \theta \sin \theta. \quad (25)$$

Il n'est pas évident d'imaginer l'existence d'un tel angle de glissement lors d'une compression uniaxiale, l'intuition initiale provenant du cas homogène pour lequel il n'y a pas de glissement. Le mécanisme expliquant pourquoi l'insertion de fibres orientées dans le matériau génère un angle de glissement n'est pas intuitif dans la mesure où le calcul montre que cet angle peut être négatif (θ proche de 0) ou positif (θ proche de $\pi/2$).

Problème 2

Compression uniaxiale d'un matériau composite inhomogène

Configuration longitudinale dans un cas particulier

14. Les champs de déplacement $\underline{\xi}'$ cinématiquement admissibles vérifient les conditions aux limites :

- Sur la face S_0 d'équation $z = 0$: $\xi'_z = 0$.
- Sur la face S_{2a} d'équation $z = 2a$: $\xi'_z = -2\delta a$.

Les champs de contraintes statiquement admissibles $\underline{\sigma}'$ vérifient $\text{div } \underline{\sigma}' = \underline{0}$ ainsi que les conditions aux limites :

- Sur les faces S_0 et S_{2a} : $T_x^d = \underline{e}_x \cdot \underline{\sigma}' \cdot \underline{e}_z = 0$ et $T_y^d = \underline{e}_y \cdot \underline{\sigma}' \cdot \underline{e}_z = 0$.
- Sur les autres faces : $\underline{T}^d = \underline{\sigma}' \cdot \underline{n} = \underline{0}$.

15. Le vecteur $\xi_x^0 \underline{e}_x + \xi_y^0 \underline{e}_y$ représentent un petit déplacement arbitraire dans le plan horizontal permis par les conditions aux limites. Le vecteur déplacement $-r y \underline{e}_x + r x \underline{e}_y$ résulte d'une petite rotation arbitraire d'axe \underline{e}_z permise par les conditions aux limites. On en déduit le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \delta \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \beta \delta \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \delta \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. En utilisant la loi de Hooke, on a $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda_i (\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2 \mu_i \underline{\underline{\epsilon}}$ avec $i = 1$ pour le matériau 1 et $i = 2$ pour le matériau 2. Les conditions aux limites en contraintes sur les faces de normale \underline{e}_x ou \underline{e}_y s'écrivent respectivement

$$\lambda_i \delta (\alpha + \beta - 1) + 2 \mu_i \delta \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i \delta (\alpha + \beta - 1) + 2 \mu_i \delta \beta = 0, \quad (26)$$

pour $i = 1, 2$. On en déduit

$$\alpha = \beta = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)} = \nu. \quad (27)$$

On en déduit $\underline{\underline{\sigma}} = -E_1 \delta \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ pour le matériau 1 et $\underline{\underline{\sigma}} = -E_2 \delta \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ pour le matériau 2. L'équilibre est satisfait dans la mesure où $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$. Comme les surfaces de collage sont de normales \underline{e}_x ou \underline{e}_y et que $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_y = \underline{0}$, on a bien continuité des forces de contact à travers ces interfaces.

16. Comme la normale à la surface S_{2a} pointant vers l'extérieur du cube est \underline{e}_z , on a

$$-\mathbf{F}_a \underline{e}_z = \int_{S_{2a}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z \, dA = -\frac{1}{2}(E_1 + E_2) (4a^2 \delta) \underline{e}_z. \quad (28)$$

On en déduit que $E_a = F_a/\delta = \mathbf{F}_a/(4a^2 \delta)$ et donc $E_a = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$.

Configuration transverse dans un cas particulier

17. La forme $\underline{\underline{\sigma}} = -T \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$ proposé pour le tenseur des contraintes conduit à

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{\nu_i}{E_i} (\text{Tr } \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + \frac{1 + \nu_i}{E_i} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{T}{E_i} (\nu_i \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \nu_i \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (29)$$

avec $i = 1$ pour le matériau 1 et $i = 2$ pour le matériau 2. On en déduit le champ de déplacement

$$\underline{\underline{\xi}} = \frac{T}{E_i} [\nu_i (x \underline{e}_x + y \underline{e}_y) - z \underline{e}_z] + (\xi_{ix}^0 - r_i y + q_i z) \underline{e}_x + (\xi_{iy}^0 + r_i x - p_i z) \underline{e}_y + (\xi_{iz}^0 - q_i x + p_i y) \underline{e}_z \quad (30)$$

avec $i = 1$ pour $0 \leq z \leq a$ et $i = 2$ pour $a \leq z \leq 2a$, où ξ_{ix} , ξ_{iy} , ξ_{iz} , p_i , q_i et r_i sont des constantes d'intégrations. La continuité du champ de déplacement à l'interface est possible dans la mesure où $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2$. Elle impose $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$, $\xi_{1x}^0 = \xi_{2x}^0$, $\xi_{1y}^0 = \xi_{2y}^0$ et $\xi_{1z}^0 - (T/E_1)a = \xi_{2z}^0 - (T/E_2)a$. La condition aux limites ξ_z en $z = 0$ impose $\xi_{1z}^0 = 0$, $p_1 = q_1 = 0$ et donc $p_2 = q_2 = 0$. La condition aux limites $\xi_z = -2\delta a$ en $z = 2a$ impose $\xi_{2z}^0 - (T/E_2)(2a) = -2\delta a$. On a donc

$$-\frac{T}{E_1} a = \xi_{2z}^0 - \frac{T}{E_2} a \quad \text{et} \quad \xi_{2z}^0 - 2a \frac{T}{E_2} = -2\delta a \quad \implies \quad T = 2\delta \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)^{-1}. \quad (31)$$

18. Comme la normale à la surface S_{2a} pointant vers l'extérieur du cube est \underline{e}_z , on a $F_b = -\underline{e}_z \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z$. Comme $-F_b = E_b/\delta$ on a donc $E_b = \left[\frac{1}{2} (E_1^{-1} + E_2^{-1}) \right]^{-1}$.

Encadrement du module dans le cas général

19. Comme les forces extérieures \underline{F} sont nulles et que les conditions aux limites en contraintes sont toutes nulles, on a $\Phi(\underline{\xi}') = 0$. En tenant compte de la condition aux limites $\xi_z^d = -2a\delta$ sur S_{2a} , on peut écrire

$$\Phi^*(\underline{\sigma}') = -2a\delta \int_{S_{2a}} \underline{e}_z \cdot \underline{\sigma}' \cdot \underline{e}_z dA. \quad (32)$$

La formule de Clapeyron $\mathbf{W}(\underline{\xi}) = \mathbf{W}^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2}\Phi(\underline{\xi}) + \frac{1}{2}\Phi^*(\underline{\sigma})$, valable lorsque $\underline{\xi}$ et $\underline{\sigma}$ sont solutions du problème d'équilibre, s'écrit ici

$$\mathbf{W}(\underline{\xi}) = \mathbf{W}^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2}\Phi^*(\underline{\sigma}) = -a\delta \int_{S_{2a}} \underline{e}_z \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z dA = a\delta \mathbf{F}_e = a\delta F_e (4a^2) = 4a^3 \delta F_e. \quad (33)$$

20. Comme on a ici $\Phi(\underline{\xi}') = 0$ et $\mathbf{W}(\underline{\xi}) = \mathbf{W}^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2}\Phi^*(\underline{\sigma}) = 4a^3 \delta F_e$, le principe de minimum s'écrit

$$-\mathbf{W}^*(\underline{\sigma}') + \Phi^*(\underline{\sigma}') \leq -\mathbf{W}^*(\underline{\sigma}) + \Phi^*(\underline{\sigma}) = \mathbf{W}(\underline{\xi}) = 4a^3 \delta F_e \leq \mathbf{W}(\underline{\xi}') \quad (34)$$

pour tous les tenseurs de contraintes $\underline{\sigma}'$ statiquement admissibles et tous les champs de déplacement $\underline{\xi}'$ cinématiquement admissibles, $\underline{\sigma}$ et $\underline{\xi}$ désignant la solution d'équilibre. La famille de tenseurs des contraintes $\underline{\sigma}'$ paramétrée par Γ est statistiquement admissible car elle vérifie trivialement $\text{div } \underline{\sigma}' = 0$ ainsi que les conditions aux limites. On peut écrire

$$\mathbf{W}^*(\underline{\sigma}'_\Gamma) = \Gamma^2 \int_{\Omega_1} \left(\frac{1+\nu_1}{2E_1} - \frac{\nu_1}{2E_1} \right) d\Omega_1 + \Gamma^2 \int_{\Omega_2} \left(\frac{1+\nu_2}{2E_2} - \frac{\nu_2}{2E_2} \right) d\Omega_2 = \frac{1}{2} \Gamma^2 |\Omega_0| \overline{E^{-1}} = 4a^3 \Gamma^2 \overline{E^{-1}}.$$

Comme $\Phi^*(\underline{\sigma}'_\Gamma) = 8a^3 \delta \Gamma$, la première inégalité du principe de minimum s'écrit

$$-4a^3 \Gamma^2 \overline{E^{-1}} + 8a^3 \delta \Gamma \leq 4a^3 \delta F_e = 4a^3 \delta^2 E_e \iff -(\Gamma/\delta)^2 \overline{E^{-1}} + 2(\Gamma/\delta) \leq E_e. \quad (35)$$

Le maximum du membre de gauche de cette inégalité est obtenu pour $\Gamma = E_{inf} \delta$ où $E_{inf} = \left(\overline{E^{-1}} \right)^{-1}$ est donc une borne inférieure pour E_e .

21. On a $\underline{\xi}'_\gamma = \delta [\gamma(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) - \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z]$ pour la famille de champs de déplacement $\underline{\xi}'_\gamma$ paramétrée par γ . On peut donc écrire

$$\mathbf{W}(\underline{\xi}'_\gamma) = \delta^2 \int_{\Omega_1} \left[\frac{1}{2} \lambda_1 (1-2\gamma)^2 + \mu_1 (1+2\gamma^2) \right] d\Omega_1 + \delta^2 \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{2} \lambda_2 (1-2\gamma)^2 + \mu_2 (1+2\gamma^2) \right] d\Omega_2.$$

Le minimum de cette énergie $\mathbf{W}(\underline{\xi}'_\gamma) = \delta^2 |\Omega_0| \left[\frac{1}{2} \bar{\lambda} (1-2\gamma)^2 + \bar{\mu} (1+2\gamma^2) \right]$ est atteint lorsque $\gamma = \nu_{sup}$ et vaut $\mathbf{W}(\underline{\xi}'_{\nu_{sup}}) = 4a^3 \delta^2 E_{sup}$ avec $\nu_{sup} = \frac{\bar{\lambda}}{2(\bar{\lambda} + \bar{\mu})}$ et $E_{sup} = \frac{\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}$. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le principe du potentiel minimum à un matériau homogène de coefficients de Lamé $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ et d'écrire que le minimum de $\mathbf{W}(\underline{\xi}'_\gamma)$ est atteint pour la solution exacte $\underline{\xi} = \delta (\nu_{sup} x \underline{e}_x + \nu_{sup} y \underline{e}_y - z \underline{e}_z)$.

22. Comme $E_1 = \frac{\mu_1(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{\lambda_1 + \mu_1} = 5$ Gpa et $E_2 = \frac{\mu_2(3\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_2 + \mu_2} = \left(5 + \frac{1}{3}\right) = 5.33$ Gpa, on a $E_{inf} = \left[\frac{1}{2} (E_1^{-1} + E_2^{-1}) \right]^{-1} = \left(5 + \frac{1}{31}\right) = 5.03$ Gpa. Comme $\bar{\lambda} = 3$ GPa et $\bar{\mu} = 2$ GPa, on a $E_{sup} = \frac{\bar{\mu}(3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\bar{\lambda} + \bar{\mu}} = \left(5 + \frac{1}{5}\right) = 5.2$ Gpa. L'intervalle $[E_{inf}, E_{sup}] = [5.03, 5.2]$ est inclus dans l'intervalle $[E_1, E_2] = [5, 5.33]$.

Contrôle Classant

Dynamique de l'atmosphère et des océans, MEC 433
Sujet proposé par Olivier Thual
Durée 3h

Vendredi 6 juillet 2007

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les notations sont celles du cours. Chaque question est notée sur 1 point. Pour les applications numériques, on pourra utiliser les valeurs simplifiées $a = 6 \cdot 10^6$ m, $\rho_r = 1$ kg/m³ pour l'atmosphère, $\rho_r = 1000$ kg/m³ dans l'océan et considérer que le périmètre de la terre est de 36 000 km.

Préambule : Approximations à l'échelle planétaire (1 point)

On considère les équations d'échelle planétaire suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a \cos \phi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ \frac{Du}{Dt} - \operatorname{tg} \phi \frac{uv}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2 \Omega v \sin \phi, \\ \frac{Dv}{Dt} + \operatorname{tg} \phi \frac{u^2}{a} &= -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho_r \gamma s, \quad \frac{Ds}{Dt} = \frac{F_e}{T}, \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + v \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}$.

- 1) Quelles sont, dans la liste ci-dessous, les approximations qui ont été utilisées pour écrire ces équations : B) approximation de Boussinesq, CM) approximation de couche mince, G) approximation géostrophique, F) approximation des frottements visqueux nuls ou H) approximation hydrostatique.

Problème 2 : Cellules de Hadley (10 points)

On suppose ici que l'écoulement est stationnaire et qu'il représente la moyenne temporelle de la circulation atmosphérique pour les mois de décembre à février (hiver boréal). On définit le débit massique $\mathbf{Q}(\phi, r) = Q_v \mathbf{j} + Q_w \mathbf{k}$ de cet écoulement par les relations

$$Q_v = 2 \pi \rho_r a \cos \phi [v], \quad Q_w = 2 \pi \rho_r a \cos \phi [w], \quad (2)$$

la moyenne zonale $[b]$ d'un champ atmosphérique quelconque b étant définie par la relation

$$[b](\phi, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\lambda, \phi, r) d\lambda. \quad (3)$$

- 2) Montrer que $\frac{1}{a} \frac{\partial Q_v}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_w}{\partial r} = 0$. Interpréter cette relation.

La figure 1a) représente les isolignes de la fonction de courant $\psi(\phi, r)$ définie par les relations

$$Q_v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad Q_w = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (4)$$

- 3) Indiquer, de manière très approchée, la distance $y_{20N} - y_{10S}$ entre les latitudes 20°N et 10°S . À quelles altitudes $r - a$ notées z_{1000} , z_{800} et z_{200} correspondent à peu près les niveaux de pression $P = 1000$ hPa, $P = 800$ hPa et $P = 200$ hPa ? Quel est l'ordre grandeur de l'erreur sur ψ effectuée lorsque l'on considère qu'une particule virtuelle advectée par l'écoulement en moyenne zonale passe par les points suivants de la figure 1a) : $A(\phi_A=10^\circ\text{S}, P_A=800$ hPa), $B(\phi_B=10^\circ\text{S}, P_B=200$ hPa), $C(\phi_C=20^\circ\text{N}, P_C=200$ hPa) et $D(\phi_D=20^\circ\text{N}, P_D=1000$ hPa).
- 4) À partir de la figure 1a), estimer les valeurs de ψ en $\phi=10^\circ\text{N}$ aux niveaux de pression $P=1000$ hPa puis $P=800$ hPa. En déduire une approximation grossière du gradient $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ sur le chemin DA . En déduire une estimation de la moyenne zonale $[v]$ sur ce chemin.
- 5) Donner une estimation grossière du gradient $\frac{1}{a} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$ à partir des valeurs de ψ lues sur la figure 1a) au niveau $P=500$ hPa et entre les latitudes $\phi = 15^\circ\text{N}$ et $\phi = 25^\circ\text{N}$. En déduire une estimation grossière de la moyenne zonale $[w]$ sur le chemin CD .
- 6) En déduire une estimation approximative du nombre de jours que met une particule pour effectuer la boucle $ABCD$ en effectuant les hypothèses suivantes :
- sur les chemins AB et CD : $[v] = 0$ et $[w] = w_0$ constant.
 - sur les chemins BC et DA : $[w] = 0$ et $[v] = v_0$ constant.

En notant $\tilde{u} = u - [u]$, $\tilde{v} = v - [v]$ et $\tilde{w} = w - [w]$, on définit la grandeur M_u par la relation

$$\frac{M_u}{a \rho_r \cos \phi} = -\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi} - \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{\text{tg} \phi}{a} \tilde{u} \tilde{v} . \quad (5)$$

- 7) Montrer que l'on peut écrire $\left[\frac{Du}{Dt}\right] = \left[\frac{D}{Dt}\right] [u] + \left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \phi}\right] + \left[\tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right]$ où $\tilde{u} = u - [u]$ est l'écart du champ de vitesse u à sa moyenne zonale et $\left[\frac{D}{Dt}\right] = \frac{\partial}{\partial t} + [v] \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + [w] \frac{\partial}{\partial r}$.
- 8) En déduire que $\left[\frac{D}{Dt}\right] [m_a] = [M_u]$ où m_a est le moment cinétique de l'atmosphère.
- 9) À partir de la figure 1b), estimer grossièrement les valeurs respectives de la moyenne zonale $[m_a]$ du moment cinétique aux points A , B , C et D . On pourra se servir de la table 1 sans interpolation.
- 10) En supposant que $[M_u]$ prend respectivement des valeurs constantes sur chacun des chemins AB , BC , CD et DA et en reprenant les hypothèses de la question 6), donner une estimation, en Pascals, de $[M_u]$ sur chacun de ces quatre chemins.
- 11) Commenter brièvement les phénomènes qui pourraient expliquer les signes obtenus pour les différentes valeurs de $[M_u]$.

$\phi \setminus u$	-5 m/s	0 m/s	5 m/s	10 m/s	15 m/s	20 m/s	25 m/s	30 m/s
0°	462	467	472	477	482	487	492	497
10°	448	452	457	462	467	472	477	482
20°	407	412	417	421	426	431	435	440
30°	346	350	354	359	363	367	372	376
40°	270	274	278	281	285	289	293	297

Table 1: Abaque pour la fonction $\frac{m_a}{a \rho_r} = \cos \phi (u + \Omega a \cos \phi)$.

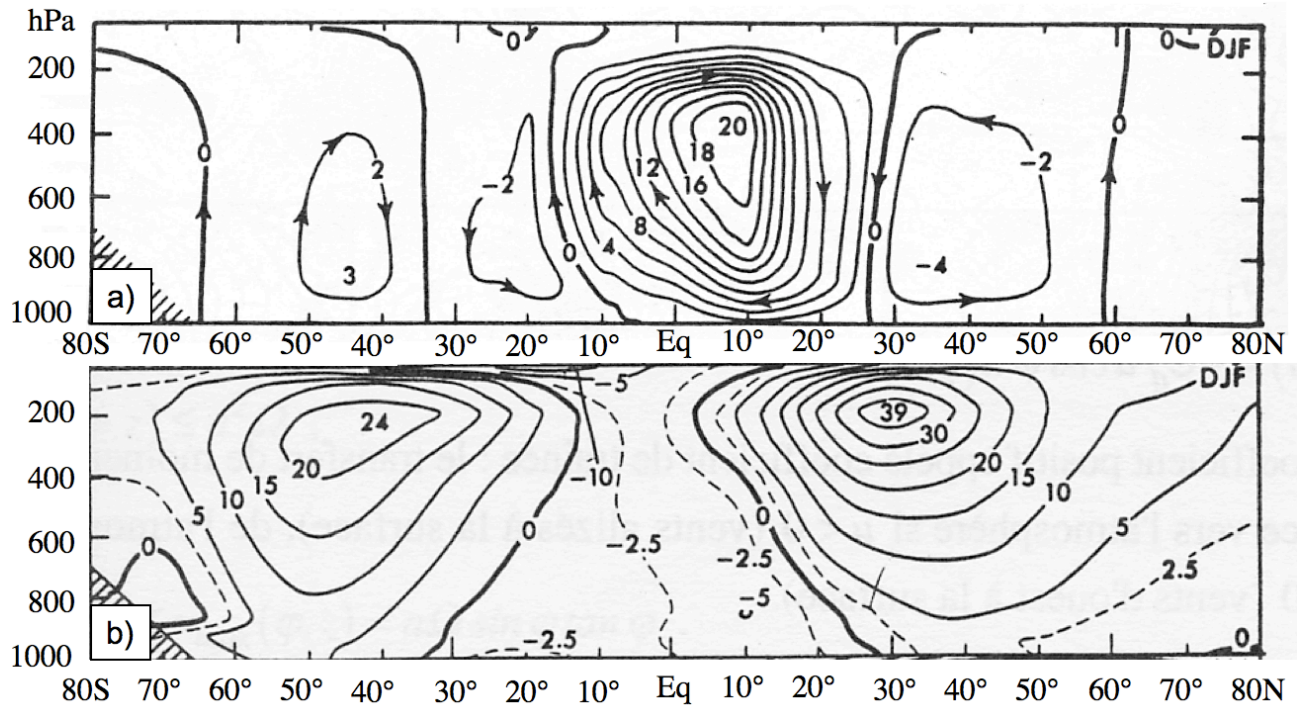


Figure 1: Moyenne de l'hiver boréal. a) Fonction de courant ψ de l'écoulement en moyenne zonale exprimée en débit massique (10^{10} kg/s). b) Vent zonal $[u]$ (5 m/s).

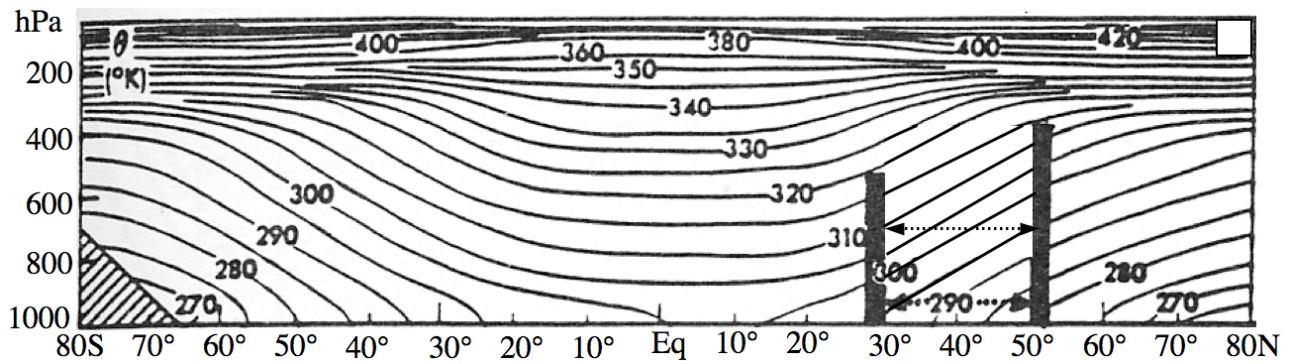


Figure 2: Moyenne annuelle et zonale de la température potentielle θ ($^{\circ}\text{K}$).

Problème 3 : Vent thermique et jet d'ouest (4 points)

On suppose ici que l'écoulement est stationnaire et qu'il représente la moyenne annuelle de la circulation atmosphérique. On suppose qu'entre $\phi = 30^\circ\text{N}$ et $\phi = 50^\circ\text{N}$ cet écoulement peut être décrit avec les approximations suivantes : $F_e = 0$ et l'écoulement est zonal, c'est-à-dire $v = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0$ pour tout champ b .

- 12) Dédire de cette approximation et de conditions aux limites évidentes que $w = 0$. Écrire les équations d'équilibre dans le cadre de cette approximation.
- 13) En déduire une relation entre u , $\frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ où θ est la température potentielle. On considérera que l'atmosphère est un gaz parfait pour éliminer C_p des équations.
- 14) On effectue maintenant l'approximation qui consiste à négliger u devant $2a\Omega \cos \phi$. À partir des valeurs observées de la figure 1b), estimer l'erreur relative sur $\frac{\partial u}{\partial r}$ induite par cette approximation.
- 15) À partir de la figure 2, donner une estimation grossière du gradient $\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ pour la boîte définie par $30^\circ\text{N} \leq \phi \leq 50^\circ\text{N}$ et $400 \text{ hPa} \leq P \leq 1000 \text{ hPa}$. En déduire, de manière approximative, la valeur du vent u au niveau $P = 200 \text{ hPa}$ en supposant que u est nul au sol. On pourra utiliser la valeur numérique simplifiée $g = 10 \text{ m/s}^2$. Comparer avec la figure 1b).

Problème 4 : Courant antarctique circumpolaire (5 points)

On modélise l'océan antarctique circumpolaire par une couche sphérique comprise entre les latitudes $\phi = 70^\circ\text{S}$ et $\phi = 50^\circ\text{S}$ et les altitudes $r = a - H$ et $r = a - H + h(\phi)$ où $H = 4 \text{ km}$ est une profondeur constante et h est la hauteur de la surface libre. On suppose que l'on peut faire ici les approximations suivantes : $F_e = 0$, l'écoulement est zonal et stationnaire, c'est-à-dire $v = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0$ et $\frac{\partial b}{\partial t}$ pour tout champ b .

- 16) On néglige le terme d'accélération $\frac{tg\phi}{a} u^2$ devant l'accélération de Coriolis. En supposant que u est au plus égal à 1 m/s , estimer l'ordre de grandeur de l'erreur relative induite par cette approximation. En déduire la relation de l'équilibre géostrophique en faisant intervenir la pression totale $P = P_r(r) + p$ avec $\frac{dP_r}{dr}(r) = -\rho_r g$.
- 17) On suppose que la température $T(\phi)$ et la salinité $r_s(\phi)$ ne dépendent pas de r et λ dans le domaine étudié et que leur variation est monotone. En utilisant l'approximation hydrostatique, exprimer la pression totale $P(\phi, r)$ en fonction de $\rho(\phi)$ et $h(\phi)$ en supposant que la pression atmosphérique P_a est constante à la surface en $r = a - H + h(\phi)$.
- 18) On considère maintenant la condition aux limites au fond $u = 0$ pour $r = a - H$. En déduire que le produit $\rho(\phi) h(\phi)$ ne dépend pas de ϕ . En déduire l'expression de $u(\phi, r)$ en fonction de $\frac{d\rho}{d\phi}$.
- 19) Les observations permettent de choisir les valeurs approximatives $T(50^\circ\text{S}) = 276^\circ\text{K}$, $T(70^\circ\text{S}) = 273^\circ\text{K}$, $r_s(50^\circ\text{S}) = 34,4 \text{ g/kg}$ et $r_s(70^\circ\text{S}) = 34,5 \text{ g/kg}$. Calculer la variation relative de masse volumique $\delta\rho/\rho_r$ avec $\delta\rho = \rho(50^\circ\text{S}) - \rho(70^\circ\text{S})$ en utilisant la loi d'état linéaire de l'eau de mer où $A = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et $B = 7,6 \cdot 10^{-4} \text{ (g/kg)}^{-1}$. En déduire la valeur en m du dénivelé approximatif $\delta h = h(50^\circ\text{S}) - h(70^\circ\text{S})$ que l'on supposera petit.
- 20) À l'aide des approximations $\sin \phi \sim -1$ et $h \sim H$ dans la couche sphérique considérée, estimer la valeur maximale de la vitesse ainsi que le débit approximatif de l'océan antarctique circumpolaire. Comparer avec la valeur de 130 Sv mesurée au niveau du Détroit de Drake et commenter.

CORRIGÉ

Préambule : Approximations à l'échelle planétaire

1) Les approximations B), CM), H) et F) ont été utilisées pour écrire le système d'équations.

Problème 2 : Cellules de Hadley

2) En invoquant l'équation de conservation de la masse du système (1) et la relation $\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} d\lambda = 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial Q_v}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_w}{\partial r} = \rho_r \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial(v \cos \phi)}{\partial \phi} + a \cos \phi \frac{\partial w}{\partial r} \right] d\lambda = 0. \quad (6)$$

Cette relation montre que la moyenne zonale d'un écoulement isochore est isochore.

3) Une distance d'environ $y_{20N} - y_{10S} \sim 3000$ km sépare les latitudes 10°S et 20°N . Les niveaux de pression $P = 1000$ hPa, $P = 800$ hPa et $P = 200$ hPa correspondent respectivement aux altitudes $z_{1000} \sim 0$ m, $z_{800} \sim 1000$ m et $z_{200} \sim 10\,000$ m. Les points A, B, C et D sont à peu près sur l'iso-valeur $\psi = 2 \cdot 10^{10}$ kg/s. Dans la mesure où la trajectoire d'une particule advectée par l'écoulement en moyenne zonale est une iso- ψ , on fait une erreur d'environ $\delta\psi = 10^{10}$ kg/s en affirmant que ces quatre points sont sur une même trajectoire.

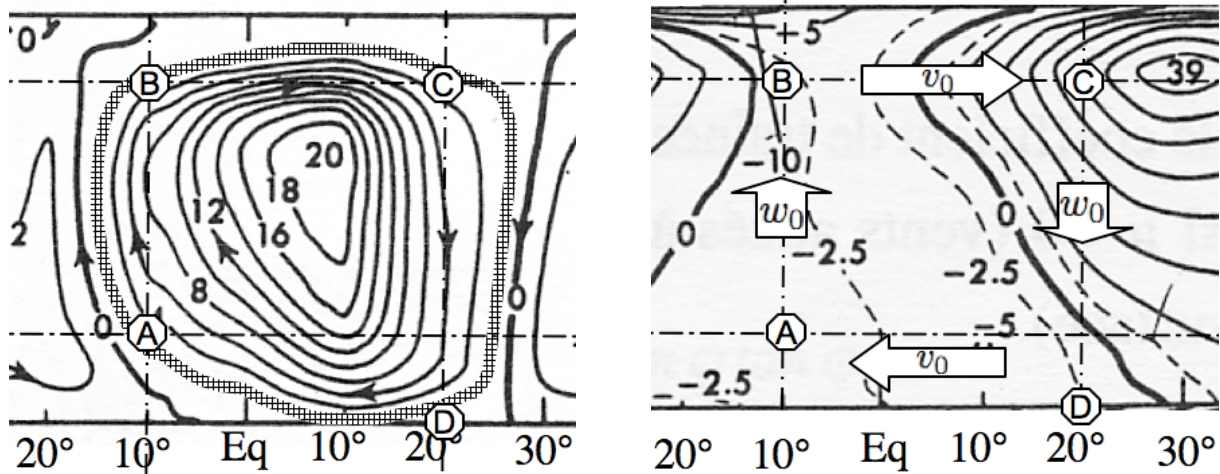


Figure 3: Points A, B, C et D. a) Isoligne $\psi = 2 \cdot 10^{10}$ kg/s en grisé. b) Schématisation de la circulation de Hadley le long de la boucle ABCD. Valeurs approchées $u_A = u_B = u_D \sim 0$ m/s et $u_C \sim 25$ m/s.

4) Pour $\phi = 10^\circ\text{N}$, on lit sur la figure 1a) $\psi_{800} \sim 14 \cdot 10^{10}$ kg/s au niveau de pression $P = 800$ hPa et $\psi_{1000} \sim 2 \cdot 10^{10}$ kg/s au niveau de pression $P = 1000$ hPa. On en déduit une estimation de

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \sim \frac{\psi_{800} - \psi_{1000}}{z_{800} - z_{1000}} = 12 \cdot 10^7 \text{ kg/(ms)}. \quad (7)$$

Comme $Q_v = 2\pi \rho_r a \cos \phi [v] = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, on peut écrire

$$[v] = -\frac{1}{2\pi \rho_r a \cos \phi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \sim 3 \text{ m/s}. \quad (8)$$

5) Au niveau de pression $P=500$ hPa, on lit sur la figure 1a) $\psi_{15N} \sim 12 \cdot 10^{10}$ kg/s pour $\phi=15^\circ\text{N}$ et $\psi_{25N} \sim 2 \cdot 10^{10}$ kg/s pour $\phi=25^\circ\text{N}$. En notant $y_{25N} - y_{15N} \sim 1000$ km la distance entre les latitudes 15°N et 25°N , on peut estimer

$$\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \sim \frac{\psi_{25N} - \psi_{15N}}{y_{25N} - y_{15N}} = 10^5 \text{ kg}/(\text{ms}) . \quad (9)$$

Comme $Q_w = 2\pi\rho_r a \cos\phi [w] = \frac{\partial\psi}{\partial\phi}$, on peut écrire

$$[w] = -\frac{1}{2\pi\rho_r a \cos\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} . \quad (10)$$

6) Le temps τ que met une particule à parcourir la boucle $ABCD$ est

$$\tau = 2 \frac{y_{20N} - y_{10S}}{v_0} + \frac{z_{200} - z_{1000}}{w_0} + \frac{z_{200} - z_{800}}{w_0} \sim 10^7 \text{ s} \sim 120 \text{ jours} . \quad (11)$$

7) Comme $[\tilde{b}] = 0$, on remarque que $[b_1 b_2] = [b_1][b_2] + [\tilde{b}_1 \tilde{b}_2]$ pour deux champs b_1 et b_2 quelconques. Comme $\tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\lambda} \tilde{u}^2$, on peut écrire $[\tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\lambda}] = 0$. On en déduit donc $[\frac{Du}{Dt}] = [\frac{D}{Dt}][u] + [\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\phi}] + [\tilde{w} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}]$.

8) Comme $\frac{Dm_a}{Dt} = 0$, on a

$$0 = \left[\frac{D}{Dt} \right] [m_a] + \left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial\tilde{m}_a}{\partial\phi} \right] + \left[\tilde{w} \frac{\partial\tilde{m}_a}{\partial r} \right] \quad (12)$$

avec $m_a = \rho_r a \cos\phi (u + \Omega a \cos\phi)$ et $\tilde{m}_a = \rho_r a \cos\phi \tilde{u}$. On calcule alors

$$\frac{\partial\tilde{m}_a}{\partial\phi} = \rho_r a \cos\phi \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\phi} - \frac{\text{tg}\phi}{a} \tilde{u} \right) . \quad (13)$$

On obtient finalement

$$0 = \left[\frac{D}{Dt} \right] [m_a] + \rho_r a \cos\phi \left(\left[\tilde{v} \frac{1}{a} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\phi} \right] - \frac{\text{tg}\phi}{a} [\tilde{u}\tilde{v}] + \left[\tilde{w} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} \right] \right) , \quad (14)$$

ce qui s'écrit bien $[\frac{D}{Dt}][m_a] = [M_u]$.

9) On lit, sur la figure 1b), les valeurs approximatives $u_A = u_B = u_D \sim 0$ m/s et $u_c \sim 25$ m/s. À partir de la table 1, on en déduit que

$$[m_a]_A = [m_a]_B = 2,71 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} , \quad [m_a]_C = 2,61 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad \text{et} \quad [m_a]_D = 2,47 \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} . \quad (15)$$

10) On note $\tau_{BC} = \tau_{DA} = (y_{20N} - y_{10S})/v_0$, $\tau_{AB} = (z_{200} - z_{800})/w_0$ et $\tau_{CD} = (z_{200} - z_{1000})/w_0$ les temps que met une particule à parcourir respectivement les chemins BC , DA , AB et CD . En supposant que $[M_u]$ est constant sur chacun des chemins, on peut écrire

$$\begin{aligned} [m_a]_B - [m_a]_A &= \tau_{AB} [M_u]_{AB} , & [m_a]_C - [m_a]_B &= \tau_{BC} [M_u]_{BC} , \\ [m_a]_D - [m_a]_C &= \tau_{CD} [M_u]_{CD} , & [m_a]_A - [m_a]_D &= \tau_{DA} [M_u]_{DA} . \end{aligned} \quad (16)$$

On en déduit

$$[M_u]_{AB} = 0 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{BC} = -50 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{CD} = -40 \text{ Pa} , \quad [M_u]_{DA} = 120 \text{ Pa} . \quad (17)$$

11) Les trois valeurs non nulles de $[M_u]$ traduisent des phénomènes qui s'opposent à la circulation de Hadley. La valeur sur DA traduit le frottement dans les couches limites de surface que l'on devrait

modéliser par un terme de flux turbulent de vitesse. Les valeurs sur BC et CD traduisent le transfert de quantité de mouvement vers la cellule de Ferrel (transport par les fluctuations).

Problème 3 : Vent thermique et jet d'ouest

12) L'équation de conservation de la masse entraîne $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$. On en déduit que w est constant, donc nul compte tenu de la géométrie. L'équation de quantité de mouvement pour v s'écrit ici

$$\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u^2 = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial p}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (18)$$

13) En dérivant par rapport à ϕ la relation hydrostatique et par rapport à r cette relation d'équilibre, l'élimination de la pression conduit à la relation

$$2 \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u + \Omega \sin \phi \right) \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma}{a} \frac{\partial s}{\partial \phi} . \quad (19)$$

En utilisant les définitions $s = C_p \operatorname{Ln} \theta$ et $\gamma = g/C_p$ pour un gaz parfait, on obtient

$$2 \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u + \Omega \sin \phi \right) \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{a} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} . \quad (20)$$

14) Comme $2 a \Omega \cos \phi \sim 800$ m/s avec $|u| \leq 40$ m/s pour $\phi = 30^\circ \text{N}$ et $2 a \Omega \cos \phi \sim 600$ m/s avec $|u| \leq 30$ m/s pour $\phi = 50^\circ \text{N}$, on peut négliger $\operatorname{tg} \phi \frac{u}{a}$ devant $\Omega \sin \phi$ dans l'équation (20) en faisant une erreur relative de 5%.

15) À partir de la lecture de la figure 2, on peut estimer un écart de température $\delta \theta \sim -15$ °K entre $\phi = 30^\circ \text{N}$ et $\phi = 50^\circ \text{N}$. Comme la distance $y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}$ entre les deux latitudes est d'environ 2000 km, on peut estimer

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \sim \frac{\delta \theta}{y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}} \sim -7,5 \cdot 10^{-6} \text{ °K/m} . \quad (21)$$

En approximant θ par la valeur moyenne $\theta_m \sim 300$ °K et en utilisant la relation du vent thermique $2 \Omega \sin \phi \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{a} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ (à 5% près), cette équation entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial r} \sim -\frac{g}{2 \Omega \sin \phi} \frac{1}{\theta_m} \frac{\delta \theta}{y_{50\text{N}} - y_{30\text{N}}} \sim 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} . \quad (22)$$

En supposant que $\frac{\partial u}{\partial r}$ est constant et en utilisant $z_{200} \sim 10^4$ m, on trouve que la vitesse pour $\phi = 40^\circ \text{N}$ et $P = 200$ hPa est $u(\phi = 40^\circ \text{N}, P = 200 \text{ hPa}) \sim 27$ m/s. Cette valeur est proche de la valeur d'environ 25 m/s que l'on peut lire sur la figure 1b).

Problème 4 : Courant antarctique circumpolaire

16) Le rapport $u/(2 a \Omega \cos \phi)$ entre $\frac{\operatorname{tg} \phi}{a} u^2$ et $2 \Omega u \sin \phi$ est maximal pour $\phi = 70^\circ$ et $u = 1$ m/s et vaut environ $3 \cdot 10^{-3}$. L'erreur relative maximale est donc de l'ordre de 0,3 %. Comme on a $\frac{\partial P_r}{\partial \phi} = 0$ on peut écrire l'équilibre géostrophique sous la forme

$$0 = -\frac{1}{a \rho_r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (23)$$

17) La relation hydrostatique $\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g$ pour la pression totale entraîne

$$P(\phi, r) = P_a - \rho(\phi) g [r - a + H - h(\phi)] . \quad (24)$$

18) L'équilibre géostrophique s'écrit

$$0 = \frac{g}{a \rho_r} \frac{d}{d\phi} [\rho(\phi) (r - a + H) - \rho(\phi) h(\phi)] - 2 \Omega u \sin \phi . \quad (25)$$

Comme $u = 0$ pour $r = a - H$, on en déduit que $\frac{d}{d\phi}[\rho(\phi) h(\phi)] = 0$. On en déduit

$$u = \frac{g}{2 a \rho_r \Omega \sin \phi} \frac{d\rho}{d\phi} (r - a + H) . \quad (26)$$

19) En appliquant la loi d'état linéaire de l'eau de mer, on obtient

$$\delta\rho/\rho_0 = -A[T(50S) - T(70S)] + B[r_s(50S) - r_s(70S)] \sim 5,8 \cdot 10^{-4} . \quad (27)$$

À la précision de ce calcul, on a $\delta\rho/\rho_r \sim \delta\rho/\rho_0$. La relation $\frac{d}{d\phi}[\rho(\phi) h(\phi)] = 0$ peut être approximée par la relation

$$\frac{\delta h}{H} \sim \frac{\delta\rho}{\rho_r} \sim 5 \cdot 10^{-4} . \quad (28)$$

On trouve donc $\delta h \sim 2$ m.

20) En notant $y_{50S} - y_{70S} \sim 2000$ km la largeur de l'océan, on peut écrire

$$u = \frac{g}{2 a \rho_r \Omega \sin \phi} \frac{d\rho}{d\phi} (r - a + H) \sim -\frac{g}{2 \Omega \sin \phi} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{r - a + H}{y_{50S} - y_{70S}} . \quad (29)$$

Avec les valeurs $\sin \phi \sim -1$ et $h \sim H$, la valeur maximale u_{max} de u est obtenue à la surface libre en $r = a - H + h \sim a$ et vaut

$$u_{max} \sim \frac{g}{2 \Omega} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{H}{y_{50S} - y_{70S}} \sim 0,1 \text{ m/s} . \quad (30)$$

Le débit volumique de l'océan antarctique circumpolaire est

$$D \sim \int_{a-H}^a \int_{70S}^{50S} u(\phi, r) a d\phi dr = \frac{g}{2 \Omega} \frac{\delta\rho}{\rho_r} \frac{H^2}{2} \sim 300 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{s} = 300 \text{ Sv} . \quad (31)$$

L'absence de prise en compte des frottements de diverses natures constitue un début d'explication de cette sur-estimation du débit dans ce modèle très simple.

Contrôle Classant

Dynamique de l'atmosphère et des océans, MEC 433
Sujet proposé par Olivier THUAL et Hervé LE TREUT,
Durée 3h

Vendredi 4 juillet 2008

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les notations sont celles du cours. Chaque question est notée sur 1 point. La convention d'Einstein, qui consiste à sommer les indices répétés, ne s'applique pas dans ce problème. On pourra choisir $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ pour simplifier les applications numériques.

Problème 1 : Ondes de Rossby stationnaires (6 points)

On considère le modèle de Saint-Venant quasi-géostrophique

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \eta_{sv,qq} = 0 \quad \text{avec} \quad \eta_{sv,qq} = f + \nabla_H^2 \psi - \frac{f_0^2}{c^2} \psi + \frac{f_0}{h_r} h_{inf} \quad \text{et} \quad \psi = -\bar{u} y + \frac{g(h - h_r)}{f_0} \quad (1)$$

où $\left(\frac{D}{Dt}\right)_g = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_g \cdot \nabla_H$, $\mathbf{U}_g = \mathbf{k} \wedge \nabla_H \psi$, $\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $c^2 = g h_r$ et $f = f_0 + \beta(y - y_0)$.

- 1) Quelle est la géométrie de l'écoulement ? Que représentent les grandeurs h_{inf} , h_r , f_0 et β ? L'écoulement décrit par le modèle (1) est-il barotrope ? Indiquer le contexte qui favorise, pour les fluides géophysiques, l'existence d'écoulements barotropes. Exprimer les composantes u_g et v_g de la vitesse géostrophique \mathbf{U}_g en fonction de \bar{u} et h .

On suppose que la topographie est de la forme $h_{inf} = 0 + \tilde{h}_{inf}$ où $\tilde{h}_{inf}(x, y)$ est petit devant h_r . On suppose que la réponse à cette topographie est *stationnaire* et qu'elle est de la forme $\psi = -\bar{u} y + \tilde{\psi}$ où $\tilde{\psi}(x, y)$ est une petite perturbation de l'écoulement zonal de vitesse \bar{u} . On suppose que $f_0 \tilde{\psi}/c^2$ et \tilde{h}_{inf}/h_r sont du même ordre de grandeur.

- 2) Linéariser l'équation de conservation de la vorticité potentielle quasi-géostrophique (1) en négligeant les termes quadratiques en $\tilde{\psi}$ et \tilde{h}_{inf} . Montrer que le modèle linéarisé est de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\nabla_H^2 + B) \tilde{\psi} + C \tilde{h}_{inf} \right] = 0, \quad (2)$$

où B et C sont des constantes que l'on précisera.

- 3) On suppose que $\tilde{h}_{inf} = \tilde{h}_m \cos(kx)$ où \tilde{h}_m et k sont des constantes réelles strictement positives. On cherche alors des solutions sous la forme

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_m \cos(kx + \varphi). \quad (3)$$

Exprimer $\tilde{\psi}_m$ et φ en fonction des données du problème.

- 4) On suppose que $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 2.3 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, ce qui correspond à une latitude d'environ 45°N . On suppose que $h_r = 10 \text{ km}$, ce qui correspond à un modèle barotrope de l'atmosphère. On

suppose enfin que $\bar{u} = 30$ m/s. Comparer les valeurs numériques de β/\bar{u} et f_0^2/c^2 . En déduire que l'on peut définir la longueur L_c par la relation

$$L_c = 2\pi \left(\frac{\beta}{\bar{u}} - \frac{f_0^2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (4)$$

et donner la valeur numérique de cette longueur. On note $L = 2\pi/k$ la longueur d'onde du relief périodique. Exprimer $\tilde{\psi}_m/\tilde{h}_m$ en fonction de f_0, h_r, L et L_c .

- 5) On suppose que $L < L_c$. Écrire l'équation des courbes iso- ψ dans le plan Oxy . Quelle est leur relation avec le champ de vitesse ? Tracer, sur un même diagramme, les lignes de courant de l'écoulement quasi-géostrophique ainsi que le lieu des extrema de la topographie (lignes de crête et talwegs). Même question pour $L_c < L$. Que se passe-t-il lorsque L et L_c sont proches ?
- 6) En estimant la largeur caractéristique des Rocheuses rencontrées par la circulation zonale de l'hémisphère Nord, tracer l'allure typique du champ de pression associé à l'onde de Rossby générée à l'aval de ce relief. Préciser, en particulier, la position des anticyclones et des dépressions.

Problème 2 : Modèles à M couches (14 points)

On considère le jeu d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} + \nabla_H \cdot \mathbf{U}_H &= 0, & \frac{D\mathbf{U}_H}{Dt} + f \mathbf{k} \wedge \mathbf{U}_H &= -\frac{1}{\rho_r} \nabla_{HP}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial z} + \gamma s & \text{et} & \quad \frac{Ds}{Dt} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

- 7) Indiquer la loi de conservation exprimée par chacune de ces quatre équations du système (5). Quelles sont, dans la liste ci-dessous, les approximations ou hypothèses qui ont été utilisées pour écrire ce système d'équations : A) hypothèse adiabatique, B) approximation de Boussinesq, CM) approximation de couche mince, I) approximation d'incompressibilité, G) approximation géostrophique, F) hypothèse des frottements visqueux nuls, QG) approximation quasi-géostrophique et/ou QH) approximation quasi-hydrostatique.

On considère le jeu d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} + \nabla_H \cdot \mathbf{U}_H &= 0, & \frac{D\mathbf{U}_H}{Dt} + f \mathbf{k} \wedge \mathbf{U}_H &= -\frac{1}{\rho_r} \nabla_{HP}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -(\rho_r + \delta\rho) g & \text{et} & \quad \frac{Ds}{Dt} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

qui décrit un océan à surface libre dont les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} w &= \frac{Dh}{Dt} & \text{et} & \quad P = P_a & \text{en } z &= h(x, y, t), \\ w &= 0 & & & \text{en } z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

- 8) En considérant le champ de masse volumique $\rho = \rho_r + \delta\rho$ relié à l'entropie $s = S - S_r$ par la relation $\delta\rho = -\rho_r \gamma s/g$ et le profil de pression de référence $P_r(z) = P_r(0) - \rho_r g z$, montrer que le système (6) est équivalent au système (5). Montrer que si $\bar{p} = \rho_r [1 + \chi(h_r - z)/h_r]$, où χ est une constante positive, le carré N_0^2 de la fréquence de *Brunt-Vaisala* est constant et donner son expression en fonction des constantes du problème. Quelle valeur de χ correspond aux valeurs $N_0 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $h_r = 4\,000$ m.

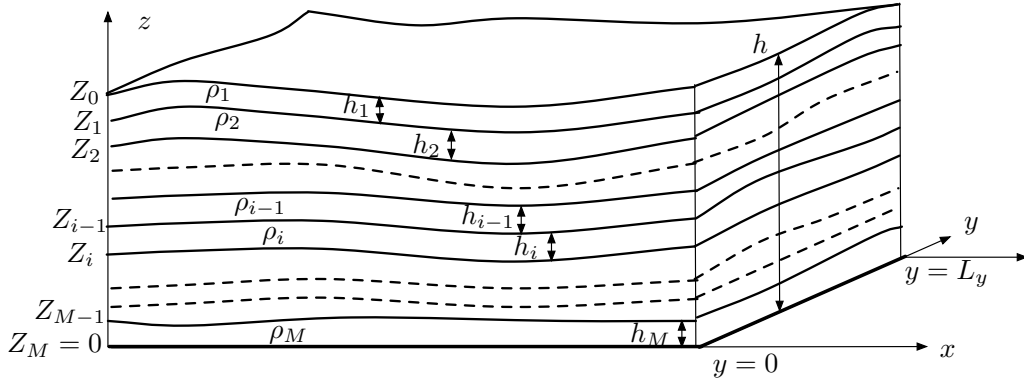


Figure 1: modèle à M couches.

On suppose que cet océan est composé de M couches d'épaisseurs variables $h_i(x, y, t)$ pour $i = 1, 2, \dots, M$, telles que $h = \sum_{i=1}^M h_i$, dans lesquelles les masses volumiques ρ_i sont constantes (figure 1). On suppose que les écarts de masse volumique $\rho_{i+1} - \rho_i$ entre deux couches adjacentes sont constants et que l'on peut écrire $\rho_i = \rho_r(1 + \chi i/M)$ où χ est une constante positive.

9) On note $Z_i = \sum_{j=i+1}^M h_j$ pour $i = 0, 1, \dots, M-1$ et $Z_M = 0$. Justifier que l'on a

$$w = \sum_{j=i+1}^M \frac{Dh_j}{Dt} \quad \text{en } z = Z_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M-1 \quad \text{et} \quad w = 0 \quad \text{en } z = Z_M. \quad (8)$$

On suppose que la vitesse horizontale dans la couche i est constante et on la note \mathbf{U}_{Hi} . Justifier que l'on peut écrire

$$\frac{Dh_i}{Dt} + h_i \nabla_H \cdot \mathbf{U}_{Hi} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

10) Exprimer le champ de pression $P_i(x, y, z, t)$ dans la couche i en fonction de z et des épaisseurs $h_j(x, y, t)$. En déduire que l'on peut écrire, pour $i = 1, 2, \dots, M$, le système d'équations

$$\frac{D\mathbf{U}_{Hi}}{Dt} + f \mathbf{k} \wedge \mathbf{U}_{Hi} + g \nabla_H \left[\sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{\chi}{M} j\right) h_j + \sum_{j=i+1}^M \left(1 + \frac{\chi}{M} i\right) h_j \right] = 0. \quad (10)$$

11) On considère l'état d'équilibre $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \dots = \bar{h}_M = h_r/M$. On note alors $h_i = \bar{h}_i + \tilde{h}_i$ et $\mathbf{U}_{Hi} = \mathbf{0} + \tilde{\mathbf{U}}_{Hi}$ les petites perturbations de l'équilibre. Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} + \frac{h_r}{M} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{Hi}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} + g \nabla_H \sum_{j=1}^M A_{ij} \tilde{h}_j = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

où A_{ij} sont des constantes que l'on explicitera en fonction des indices i et j .

12) On s'intéresse tout d'abord au cas $M = 1$. En notant u_1 et v_1 les composantes de \mathbf{U}_{H1} , on suppose que $h_1 = \bar{h}_1 + \tilde{h}_1$, $u_1 = 0 + \tilde{u}_1$ et $v_1 = 0 + \tilde{v}_1$ où \tilde{h}_1 , \tilde{u}_1 et \tilde{v}_1 sont des petites perturbations autour de l'équilibre $\bar{h}_1 = h_r$. Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t} + h_r \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - f \tilde{v}_1 + g_r \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} + f \tilde{u}_1 + g_r \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

où g_r est une constante que l'on exprimera.

- 13) On suppose que $f = f_0$ est constant et l'on cherche donc des solutions ondulatoires complexes sous la forme

$$\tilde{h}_1 = \hat{h}_1 e^{ikx + il y - i\omega t}, \quad \tilde{u}_1 = \hat{u}_1 e^{ikx + il y - i\omega t} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_1 = \hat{v}_1 e^{ikx + il y - i\omega t}. \quad (13)$$

Écrire le système linéaire couplant les trois amplitudes complexes \hat{h} , \hat{u}_1 et \hat{v}_1 . Par quelle transformation peut-on se ramener au cas $l = 0$? En déduire que la relation de dispersion vérifie, dans le cas général l quelconque, la relation

$$\omega (\omega^2 - f_0^2 - c_0^2 K^2) = 0 \quad (14)$$

où $K^2 = k^2 + l^2$ est le carré du nombre d'onde et c_0 est une constante positive que l'on précisera.

- 14) À quelle famille d'équilibres correspond le cas $\omega = 0$. On appelle "ondes d'inertie gravité" les ondes correspondant au cas $\omega \neq 0$. Calculer la vitesse de phase c_φ d'une onde d'inertie gravité monochromatique de longueur d'onde $L = 10\,000$ km en supposant que $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et $h_r = 4\,000$ m.

- 15) On suppose, dans cette question, que l'écoulement est confiné entre deux parois verticales parallèles respectivement situées en $y = 0$ et $y = L_y$ où L_y est une distance constante. Pour satisfaire la condition aux limites $\tilde{v}_1 = 0$ en $y \in \{0, L_y\}$ ainsi introduites, on cherche des solutions complexes de la forme

$$\tilde{h}_1 = \hat{h}_1 e^{ikx - \alpha y - i\omega t}, \quad \tilde{u}_1 = \hat{u}_1 e^{ikx - \alpha y - i\omega t} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_1 = 0. \quad (15)$$

Montrer que ces ondes sont non triviales pour

$$f_0^2 = a^2 c_0^2 \quad \text{et} \quad \omega^2 = c_0^2 k^2 \quad (16)$$

où a et c_0 sont des constantes que l'on exprimera.

- 16) Justifier l'appellation "d'ondes de Kelvin de bord" de ces solutions en développant l'analogie avec les ondes de Kelvin équatoriales. Décrire les trajectoires de l'écoulement associé à ces ondes. Calculer la vitesse de phase de ces ondes pour une profondeur $h_r = 4\,000$ m.

- 17) On s'intéresse au cas $M \geq 2$ et on suppose que χ est petit devant un. On considère la matrice \underline{B} , de dimension $M \times M$, définie par ses composantes $B_{ij} = 1 + j\chi/M$ si $j \leq i$ et $B_{ij} = 1 + i\chi/M$ si $i \leq j$. On admet, sans démonstration, que ses valeurs propres μ_n sont positives et distinctes, ce qui permet de les classer dans l'ordre $\mu_0 > \mu_1 > \dots > \mu_{M-1} > 0$. On note $\underline{\Phi}^{(n)}$ ses vecteurs propres qui vérifient donc, pour $n = 0, 1, \dots, M-1$, les relations

$$\sum_{j=1}^M B_{ij} \Phi_j^{(n)} = \mu_n \Phi_i^{(n)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M, \quad (17)$$

et on choisit la normalisation $\Phi_M^{(n)} = 1$. En utilisant la décomposition

$$\tilde{h}_i = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{n+1}{M} \tilde{h}^{(n)}(x, y, t) \Phi_i^{(n)} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_{Hi} = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{U}_H^{(n)}(x, y, t) \Phi_i^{(n)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

montrer que l'on peut mettre le système (11) sous la forme

$$\frac{\partial \tilde{h}^{(n)}}{\partial t} + h'_n \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}_H^{(n)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} + g'_n \nabla_H \tilde{h}^{(n)} = 0 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (19)$$

où $h'_n = h_r/(n+1)$ et g'_n est une constante que l'on exprimera en fonction des valeurs propres μ_n et des autres paramètres du problème.

- 18) On s'intéresse au cas $M = 2$ et on suppose que $\chi = (\rho_2 - \rho_1)/(2\rho_r)$ est petit devant 1. Montrer que l'on peut alors mettre le système, à l'ordre dominant du petit paramètre χ , sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}^{(0)}}{\partial t} + h_r \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} + g \nabla_H \tilde{h}^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{h}^{(1)}}{\partial t} + h'_1 \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} + g'_1 \nabla_H \tilde{h}^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

où $h'_1 = h_r/2$ et g'_1 est une constante que l'on exprimera en fonction de g et χ . Montrer que l'on peut alors écrire, à l'ordre dominant du petit paramètre χ , les relations

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \frac{1}{2} \tilde{h}^{(0)} \Phi_1^{(0)} + \tilde{h}^{(1)} \Phi_1^{(1)}, & \tilde{\mathbf{U}}_{H1} &= \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} \Phi_1^{(0)} + \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} \Phi_1^{(1)}, \\ \tilde{h}_2 &= \frac{1}{2} \tilde{h}^{(0)} \Phi_2^{(0)} + \tilde{h}^{(1)} \Phi_2^{(1)}, & \tilde{\mathbf{U}}_{H2} &= \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} \Phi_2^{(0)} + \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} \Phi_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (21)$$

avec $\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)} = 1$ et $\Phi_1^{(1)} = -\Phi_2^{(1)} = -1$. Décrire les structures verticales des modes barotropes et baroclines.

- 19) On suppose que $h_r = 4\,000$ m et $\chi = 4 \cdot 10^{-4}$. En déduire, pour ce modèle à deux couches, la vitesse de phase c_0 des ondes de Kelvin de bord du mode barotrope et la vitesse de phase c_1 des ondes de Kelvin de bord du mode barocline en supposant que $f = f_0$ est constant.

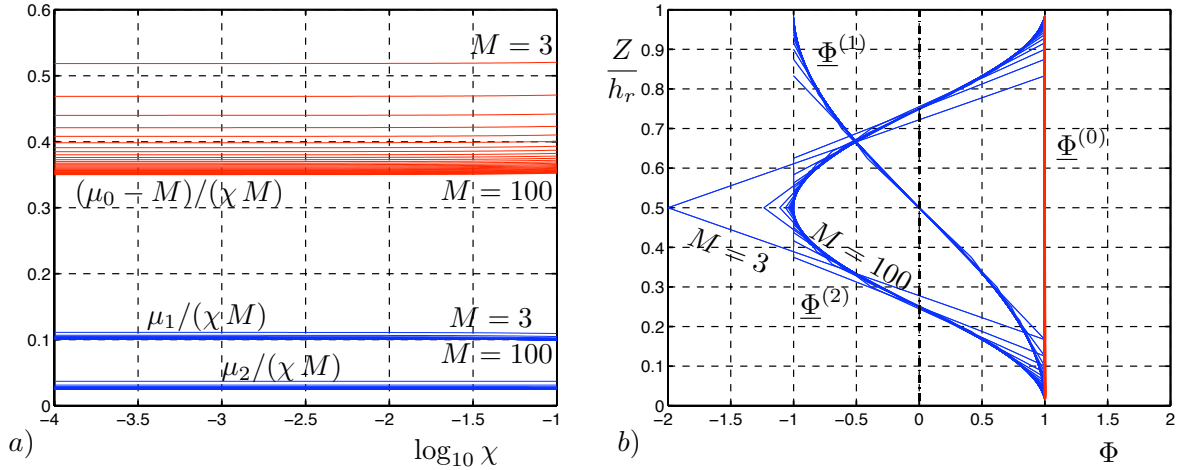


Figure 2: Valeurs propres μ_0 , μ_1 et μ_2 et vecteurs propres $\underline{\Phi}^{(0)}$, $\underline{\Phi}^{(1)}$ et $\underline{\Phi}^{(2)}$ de la matrice \underline{B} pour M variant de 3 à 100. a) Courbes $\frac{\mu_0 - M}{\chi M}$, $\frac{\mu_1}{\chi M}$ et $\frac{\mu_2}{\chi M}$ en fonction de χ . b) Composantes des vecteurs $\underline{\Phi}^{(0)}$, $\underline{\Phi}^{(1)}$ et $\underline{\Phi}^{(2)}$, normalisés par la contrainte $\Phi_M^{(n)} = 1$, tracées en fonction des altitudes Z_i/h_r .

- 20) La figure 2 représente les plus grandes valeurs propres de \underline{B} en fonction de χ et de M ainsi que les trois vecteurs propres associés. Déterminer graphiquement les trois plus grandes vitesses des ondes de Kelvin de bord du modèle linéaire à M couches pour $M = 3$, $\chi = 4 \cdot 10^{-4}$ et $h_r = 4\,000$ m en supposant que $f = f_0$ est constant. Décrire les structures verticales de ces ondes. Comparer ces vitesses et ces structures verticales avec celles du modèle à $M = 2$ couches puis avec celles des modèles à M couches pour $M > 3$.

CORRIGÉ

Problème 1 : Ondes de Rossby stationnaires (6 points)

1) Il s'agit de l'écoulement d'une couche mince à surface libre qui peut représenter l'atmosphère ou l'océan. La hauteur h_{inf} est l'altitude du fond de la couche. La hauteur h_r est la moyenne de $h - h_{inf}$ ou encore l'épaisseur de la couche à l'équilibre. Le paramètre de Coriolis f est approximé par la fonction linéaire $f = f_0 + \beta(y - y_0)$ où f_0 est la valeur de f pour une latitude de référence $y = y_0$ autour de laquelle est effectuée la linéarisation (approximation du β -plan). Les équations sont celles du modèle de Saint-Venant qui suppose que la vitesse horizontale ne dépend pas de l'altitude, ce qui correspond à un écoulement barotrope. Le contexte favorable à une description barotrope d'un fluide géophysique est le suivant : absence de forçage thermique géographiquement variable, ce qui conduit à un champ d'entropie uniforme sur l'horizontale, stratification stable, ce qui correspond à un gradient vertical d'entropie positif, et mouvement de rotation rapide. Les composantes de la vitesse géostrophique sont

$$u_g = \bar{u} - \frac{g}{f_0} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_g = \frac{g}{f_0} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (22)$$

2) Les équations stationnaires et linéarisées s'écrivent

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(f + \nabla_H^2 \tilde{\psi} - \frac{f_0^2}{c^2} \tilde{\psi} + \frac{f_0}{h_r} \tilde{h}_{inf} \right) + \tilde{v}_g \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

où $\tilde{v}_g = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}$ est la perturbation de la vitesse géostrophique selon y . On en déduit

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla_H^2 \tilde{\psi} - \frac{f_0^2}{c^2} \tilde{\psi} + \frac{f_0}{h_r} \tilde{h}_{inf} \right) + \beta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nabla_H^2 + B) \tilde{\psi} + C \tilde{h}_{inf} \right] = 0 \quad (24)$$

avec $B = -f_0^2/c^2 + \beta/\bar{u}$ et $C = f_0/h_r$.

3) En reportant dans l'équation (24), on obtient, pour tout x , la relation

$$(-k^2 + B) \tilde{\psi}_m \cos(kx + \varphi) + C \tilde{h}_m \cos(kx) = 0. \quad (25)$$

On en déduit que $\varphi = 0$ et

$$\tilde{\psi}_m = \frac{C}{k^2 - B} \tilde{h}_m = \frac{f_0}{h_r} \frac{1}{k^2 + f_0^2/c^2 - \beta/\bar{u}} \tilde{h}_m. \quad (26)$$

4) On a $\beta/\bar{u} \sim 7.6 \cdot 10^{-13}$ et $f_0^2/c^2 = 10^{-13}$. On en déduit que $\beta/\bar{u} - f_0^2/c^2$ est positif et que $L_c \sim 7\,700$ km. On peut alors écrire

$$\frac{\tilde{\psi}_m}{\tilde{h}_m} = \frac{f_0}{h_r} \frac{1}{k^2 - (\beta/\bar{u} - f_0^2/c^2)} = \frac{f_0}{4\pi^2 h_r} \frac{1}{1/L^2 - 1/L_c^2} = \frac{f_0}{4\pi^2 h_r} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L_c^2} \right)^{-1}. \quad (27)$$

5) Les iso- ψ sont les lignes de courant de l'écoulement. Comme ce dernier est stationnaire, ce sont aussi les trajectoires. Comme $\psi(x, y) = -\bar{u}y + \tilde{\psi}_m \cos(2\pi x/L)$, les trajectoires sont les courbes d'équations

$$y = y_0 + \frac{\tilde{\psi}_m}{\bar{u}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = y_0 + \frac{f_0 \tilde{h}_m}{4\pi^2 \bar{u} h_r} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{L_c^2} \right)^{-1} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (28)$$

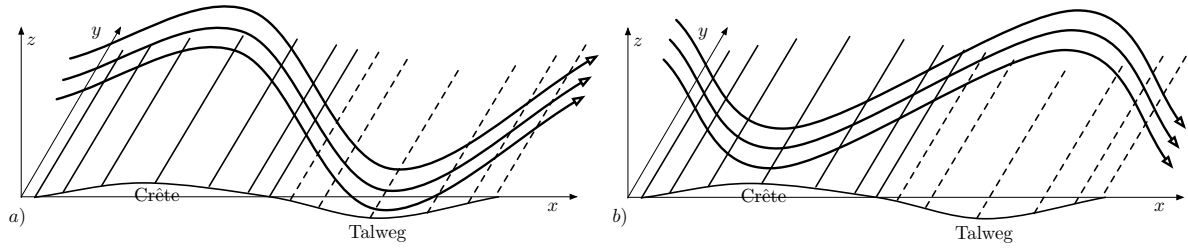


Figure 3: Trajectoires géostrophiques sur un relief périodique pour $f_0 \bar{u} > 0$. a) cas $L < L_c$. b) cas $L > L_c$.

où y_0 est une constante arbitraire. L'allure de ces trajectoires est représentée sur la figure 3. Dans les cas $L < L_c$, les trajectoires sont déviées vers le Nord en traversant une crête (figure 3a) et vers le Sud en traversant un talweg (figure 3b). C'est le contraire dans le cas $L > L_c$. Lorsque $L \sim L_c$ l'amplitude de l'onde de Rossby devient très grande ; on est proche de la résonance $L = L_c$.

6) En estimant à $L \sim 1\,000$ km la largeur des Rocheuses et en utilisant la valeur $L_c \sim 7\,700$ km, on voit que l'on est dans le cas $L < L_c$. Les trajectoires de l'onde stationnaire générée à l'aval de la chaîne de montagnes sont représentées sur la figure 4.

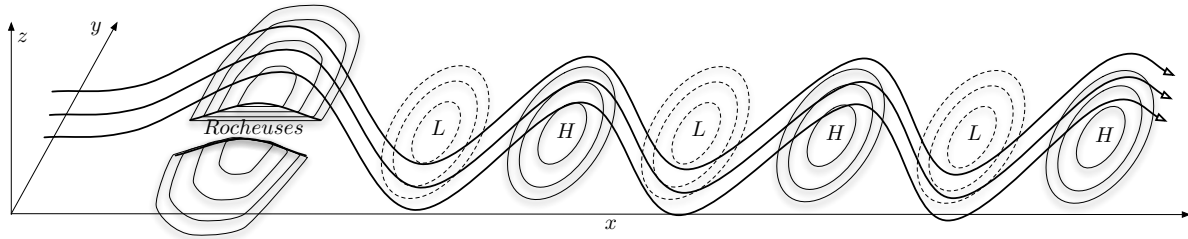


Figure 4: Onde de Rossby stationnaire générée à l'aval d'une montagne dans l'Hémisphère Nord dans le cas $L < L_c$. Relief, trajectoires et courbes de pression. Position des anticyclones (H) et des dépressions (L).

Problème 2 : Modèles à M couches (13 points)

7) Ces quatre équations expriment respectivement la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement projetée sur le plan horizontal, la conservation de la quantité de mouvement projetée sur la verticale et la conservation de l'énergie. Les hypothèses ou approximations A), B), CM), I), F) et QH) ont été utilisées pour écrire le système d'équations.

8) L'équation de conservation de la masse est inchangée. Comme $P = P_r + p$ par définition de p , on a $\nabla_H p = \nabla_H P$, ce qui permet de justifier la deuxième forme de la projection horizontale de l'équation de conservation de la masse. Comme $P_r(z) = P_r(0) - \rho_r g z$, on a $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_r g + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_r g + \rho_r \gamma s$. Comme $s = -g \delta \rho / (\gamma \rho_r)$, on a finalement $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_r g - \delta \rho g$, ce qui constitue la troisième équation du nouveau système. L'équation de conservation de l'énergie est inchangée. La fréquence de Brunt-Vaisala est définie par la relation

$$\bar{N}^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz} = -\frac{g}{\rho_r} \frac{d\bar{\rho}}{dz} = \frac{g\chi}{h_r}. \quad (29)$$

Elle est donc constante et on note $N_0^2 = g \chi / h_r$. Si $N_0 = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $h_r = 4\,000 \text{ m}$, on a $\chi = N_0^2 h_r / g = 4 \cdot 10^{-4}$.

9) La condition cinématique associée à la surface libre d'équation $F_i = z - Z_i(x, y, t) = 0$ est $\frac{DF_i}{Dt} = w - \frac{DZ_i}{Dt} = 0$ en $z = Z_i$. Comme $Z_i = \sum_{j=i+1}^M h_j$ pour $i = 1, 2, \dots, M-1$, on a bien $w = \sum_{j=i+1}^M \frac{Dh_j}{Dt}$ en $z = Z_i$. Pour $i = M$, on a $w = 0$ en $z = Z_M = 0$. En intégrant l'équation de conservation de la masse sur la couche i d'épaisseur h_i , on obtient

$$\int_{Z_i}^{Z_{i-1}} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \nabla_H \cdot \mathbf{U}_{Hi} \right) dz = \left[w \right]_{Z_i}^{Z_{i-1}} + h_i \nabla_H \cdot \mathbf{U}_{Hi} = 0 \quad (30)$$

en utilisant le fait que \mathbf{U}_{Hi} est indépendant de z . En utilisant les conditions $w = DZ_i/Dt$ en $z = Z_i$ et $h_i = Z_{i-1} - Z_i$, on obtient bien $\frac{Dh_i}{Dt} + h_i \nabla_H \cdot \mathbf{U}_{Hi} = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, M$.

10) La continuité du champ de pression aux interfaces, un raisonnement par récurrence et la relation $\frac{\partial P_i}{\partial z} = -\rho_i g = -\rho_r (1 + \chi i/M) g$ entraînent que

$$P_i - P_a = \sum_{j=1}^i \rho_j g h_j - \rho_i g (z - Z_i) = \rho_r g \sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{\chi}{M} j \right) h_j - \rho_r g \left(1 + \frac{\chi}{M} i \right) \left(z - \sum_{j=i+1}^M h_j \right). \quad (31)$$

On en déduit que

$$-\frac{1}{\rho_r} \nabla_H P = g \nabla_H \left[\sum_{j=1}^i \left(1 + \frac{\chi}{M} j \right) h_j + \sum_{j=i+1}^M \left(1 + \frac{\chi}{M} i \right) h_j \right] = 0, \quad (32)$$

et donc l'équation (10) recherchée.

11) La linéarisation de l'équation de conservation de la masse dans la couche i conduit à

$$\frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} + \bar{h}_i \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} = \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} + \frac{h_r}{M} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} = 0. \quad (33)$$

La linéarisation de l'équation (10) s'obtient en remplaçant $\frac{D}{Dt}$ par $\frac{\partial}{\partial t}$, \mathbf{U}_{Hi} par $\tilde{\mathbf{U}}_{Hi}$ et h_j par \tilde{h}_j . On obtient alors

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{Hi}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} + g \nabla_H \sum_{j=1}^M A_{ij} \tilde{h}_j = 0 \quad (34)$$

avec $A_{ij} = 1 + j \chi/M$ si $j \leq i$ et $A_{ij} = 1 + i \chi/M$ si $i \leq j$.

12) Dans le cas $M = 1$, le système linéarisé s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t} + h_r \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{H1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{H1}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_{H1} + g (1 + \chi) \nabla_H \tilde{h}_1 = 0 \quad (35)$$

où $(1 + \chi) = \rho_1 / \rho_r$. On en déduit le système d'équations (12) avec $g_r = g (1 + \chi)$.

13) En reportant l'expression des solutions recherchées, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -i\omega & i h_r k & i h_r l \\ g_r i k & -i\omega & -f_0 \\ g_r i l & f_0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

En tournant les axes dans le plan (x, y) , on se ramène au cas $l = 0$. Le relation de dispersion, qui s'obtient en annulant le déterminant du système linéaire (36), s'écrit, dans le cas $l = 0$:

$$\begin{vmatrix} -i\omega & i h_r k & 0 \\ g_r i k & -i\omega & -f_0 \\ 0 & f_0 & -i\omega \end{vmatrix} = i\omega (\omega^2 - f_0^2 - g_r h_r k^2) = i\omega (\omega^2 - f_0^2 - c_0^2 K^2) = 0, \quad (37)$$

avec $c_0^2 = g_r h_r$. Cette dernière égalité recouvre aussi le cas général $l \neq 0$ dans la mesure où $K^2 = k^2 + l^2$, le carré du nombre d'onde, est invariant par rotation dans le plan Oxy .

14) Le cas $\omega = 0$ correspond aux ondes stationnaires solutions des équations $-f_0 \tilde{v}_1 + g_r \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial x} = 0$ et $f_0 \tilde{u}_1 + g_r \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial y} = 0$. Il s'agit de la famille des équilibres géostrophiques où, à un champ \tilde{h}_1 quelconque, correspond un champ de vitesse $(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ géostrophique. La vitesse de phase des ondes d'inertie gravité est

$$c_\varphi = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{f_0^2}{K^2} + c_0^2} = \sqrt{\frac{f_0^2 L^2}{4\pi^2} + c_0^2} \sim 256 \text{ m s}^{-1}. \quad (38)$$

15) En reportant la forme des solutions cherchées dans les équations (12) on obtient

$$-i\omega \hat{h}_1 + ik h_r \hat{u}_1 = 0, \quad ik g_r \hat{h}_1 - i\omega \hat{u}_1 = 0 \quad \text{et} \quad -\alpha g_r \hat{h}_1 + f_0 \hat{u}_1 = 0. \quad (39)$$

Ce système linéaire homogène à deux inconnues et trois équations admet des solutions triviales si et seulement si les deux déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} -i\omega & ik h_r \\ ik g_r & -i\omega \end{vmatrix} = -\omega^2 + g_r h_r k^2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} ik g_r & -i\omega \\ -\alpha g_r & f_0 \end{vmatrix} = i g_r (f_0 k - \omega \alpha) = 0. \quad (40)$$

En combinant ces deux égalités, on obtient $\omega^2 = c_0^2 k^2$ puis $f^2 = \alpha^2 c_0^2$ où $c_0 = \sqrt{g_r h_r}$. On a donc $a = \alpha$.

16) Comme pour les ondes de Kelvin équatoriales, la vitesse du fluide est identiquement nulle dans une direction. Alors que l'enveloppe des ondes de Kelvin équatoriales est une gaussienne dans cette direction, c'est une exponentielle pour les ondes de Kelvin de bord, ce qui nécessite de borner le domaine par une frontière rectiligne. Les trajectoires sont donc des segments de droites parallèles à l'autre direction qui est aussi celle de la vitesse de phase. La vitesse de phase de ces ondes de Kelvin de bord est $c_0 = 200 \text{ m/s}$.

17) En reportant la décomposition (18) dans le système (11) on obtient, pour $i = 1, 2, \dots, M$, les relations

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{n+1}{M} \frac{\partial \tilde{h}^{(n)}}{\partial t} + \frac{h_r}{M} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} \right] \Phi_i^{(n)} = 0 \\ \text{et} \quad & \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} \right] \Phi_i^{(n)} + g \nabla_H \sum_{j=1}^M A_{ij} \left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{n+1}{M} \tilde{h}^{(n)} \Phi_j^{(n)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

On remarque tout d'abord que $B_{ij} = A_{ij}$. Comme $\underline{\Phi}^{(n)}$ est le vecteur propre de \underline{B} associé à la valeur propre μ_n ses composantes $\Phi_i^{(n)}$ vérifient

$$\sum_{j=1}^M A_{ij} \Phi_j^{(n)} = \sum_{j=1}^M B_{ij} \Phi_j^{(n)} = \mu_n \Phi_i^{(n)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, M. \quad (42)$$

On peut alors mettre le système d'équation sous la forme

$$\sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{\partial \tilde{h}^{(n)}}{\partial t} + \frac{h_r}{n+1} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} \right] \Phi_i^{(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^M \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} + g \mu_n \frac{n+1}{M} \nabla_H \tilde{h}^{(n)} \right] \Phi_i^{(n)} = 0. \quad (43)$$

Comme les vecteurs propres $\underline{\Phi}^{(n)}$ forment une base (valeurs propres distinctes), on peut écrire

$$\frac{\partial \tilde{h}^{(n)}}{\partial t} + h'_n \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} + g'_n \nabla_H \tilde{h}^{(n)} = 0 \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (44)$$

avec $h'_n = h_r/(n+1)$ et $g'_n = g\mu_n(n+1)/M$.

18) Pour $M = 2$ le système d'équations (11) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}_1}{\partial t} + \frac{h_r}{2} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{H1} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{H1}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_{H1} + g \nabla_H \left[\left(1 + \frac{\chi}{2}\right) \tilde{h}_1 + \left(1 + \frac{\chi}{2}\right) \tilde{h}_2 \right] = 0 \\ \frac{\partial \tilde{h}_2}{\partial t} + \frac{h_r}{2} \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{H2} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{H2}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_{H2} + g \nabla_H \left[\left(1 + \frac{\chi}{2}\right) \tilde{h}_1 + (1 + \chi) \tilde{h}_2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

On peut utiliser le résultat de la question précédente en calculant les valeurs propres de la matrice $\underline{\underline{B}}$ que l'on obtient en écrivant

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\chi}{2} & 1 + \frac{\chi}{2} \\ 1 + \frac{\chi}{2} & 1 + \chi \end{pmatrix} \implies \det(\underline{\underline{B}} - \mu \underline{\underline{I}}) = \mu^2 - \mu [2 + O(\chi)] + \frac{\chi}{2} + O(\chi^2) = 0. \quad (46)$$

On en déduit $\mu_0 = 2 + O(\chi)$ et $\mu_1 = \chi/4 + O(\chi^2)$. On obtient $g'_1 = g\mu_1 \frac{2}{2} = g\chi/4$ à l'ordre dominant en χ . Le vecteur propre associé à la valeur propre μ_0 vérifie $\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(1)} = 1$ à l'ordre dominant en χ . Le vecteur propre associé à la valeur propre μ_1 vérifie $\Phi_1^{(1)} = -\Phi_2^{(1)} = -1$ à l'ordre dominant en χ . On peut donc écrire

$$\tilde{h}_i = \sum_{n=0}^1 \frac{n+1}{2} \tilde{h}^{(n)} \Phi_i^{(n)} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{Hi} = \sum_{n=0}^1 \tilde{\mathbf{U}}_H^{(n)} \Phi_i^{(n)} \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad (47)$$

ce qui correspond au système (21). Avec ce changement de variable, le modèle à 2 couches linéarisé s'écrit donc, à l'ordre dominant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}^{(0)}}{\partial t} + h_r \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(0)} + g \nabla_H \tilde{h}^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{h}^{(1)}}{\partial t} + h'_1 \nabla_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} = 0 & \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{U}}_H^{(1)} + g'_1 \nabla_H \tilde{h}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

avec $h'_1 = h_r/2$ et $g'_1 = g\chi/4$. La structure verticale du mode barotrope est uniforme : les perturbations dans les deux couches sont homogènes. La structure verticale du mode barocline correspond à mouvement en opposition de phase des deux couches.

19) La vitesse de phase des ondes de Kelvin de bord du mode barotrope est $c_0 = \sqrt{g\overline{h_r}} = 200$ m/s. Pour le mode barotrope, on a $c_1 = \sqrt{g'_1 h'_1} = 1.4$ m/s où $h'_1 = 2000$ m est l'épaisseur de chacune des couches et $g'_1 = 10^{-3}$ m s⁻² est la gravité réduite.

20) La lecture de la figure 2a) pour $M = 3$ montre que $\frac{\mu_0-3}{3\chi} \sim 0.52$, $\frac{\mu_1}{3\chi} \sim 0.1$ et $\frac{\mu_3}{3\chi} \sim 0.025$. En notant $c_n^2 = (g h_r) \mu_n/M$, on en déduit $c_0 \sim \sqrt{g\overline{h_r}} = 200$ m/s, $c_1 \sim c_0 \sqrt{0.1\chi} \sim 1.3$ m/s et $c_2 \sim \sqrt{0.025\chi} \sim 0.6$ m/s. Ce sont les vitesses des ondes de Kelvin de bord correspondant aux trois premiers modes verticaux du modèle. Leurs structures verticales peuvent se lire sur la figure 2b). Le profil vertical du premier mode est uniforme : $\Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)} = \Phi_3^{(0)} = 1$. Les oscillations de toutes les couches sont en phase pour ce mode barotrope. Le profil vertical du second mode est tel que $\Phi_1^{(1)} = -\Phi_3^{(1)} = -1$ et $\Phi_2^{(1)} = 0$. Ce premier mode barocline correspond à une opposition de phase entre la première et la troisième couche, la couche du milieu restant immobile. Le profil vertical du troisième mode est tel que $\Phi_1^{(2)} = \Phi_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\Phi_2^{(2)} = 1$. Ce deuxième mode barocline correspond à une opposition de phase des couches adjacentes avec une amplitude double pour la couche du milieu. Lorsque $M > 3$, la structure du mode barotrope est, bien entendu, homogène, tandis que celles des deux premiers modes baroclines tendent respectivement vers les fonctions $\cos(\pi z/h_r)$ et $\cos(2\pi z/h_r)$. Les vitesses associées tendent vers $c_0 = \sqrt{g\overline{h}}$ pour le mode barotrope, $c_1 = c_0 \sqrt{0.1\chi} \sim 1.3$ m/s et $c_2 = c_0 \sqrt{0.025\chi} \sim 0.6$ m/s pour les deux premiers modes baroclines. Le modèle à 3 couches capture donc bien ces trois vitesses.

Contrôle Classant

Dynamique de l'atmosphère et des océans, MEC 433
Sujet proposé par Olivier THUAL,
Durée 3h

Vendredi 3 juillet 2009

L'usage des supports de cours et des notes personnelles est autorisé. Les notations sont celles du cours.

Problème 1 : Perturbations de moyenne latitude (8 points)

On considère le modèle atmosphérique constitué des équations

$$f_0 \underline{k} \wedge \underline{U}_H + \frac{1}{\rho_r} \nabla_H p = 0 \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_r \gamma s \quad (1)$$

où $P = P_r(z) + p$ est le champ de pression, $S = S_r + s$ est le champ d'entropie, \underline{U}_H est le champ de vitesse horizontale, $f_0 > 0$ le paramètre de Coriolis supposé constant et ρ_r la masse volumique constante. On ne s'intéresse pas ici à la vitesse verticale. On suppose que $z \in [0, H]$ où $H = 8\,000$ m est la hauteur de la tropopause.

On donne les valeurs numériques approchées suivantes : $P_r(0) = P_0 = 1\,000$ hPa, $f_0 = 10^{-4}$ s⁻¹, $\rho_r = 1$ kg/m³, $R = 300$ J kg⁻¹ K⁻¹, $C_v = 700$ J kg⁻¹ K⁻¹, $g = 10$ m s⁻². On rappelle que $P'_r(z) = -\rho_r g$, $C_p = C_v + R$ et $\gamma = g/C_p$. Les applications numériques pourront être effectuées avec une précision de l'ordre de 10%.

- 1) Indiquer les hypothèses et approximations qui permettent de modéliser ainsi la circulation de grande échelle de l'atmosphère aux latitudes tempérées.
- 2) On suppose que l'on peut décomposer les champs sous la forme $s = \bar{s}(z) + \tilde{s}$, $p = \bar{p}(z) + \tilde{p}$, où $\bar{s}(z)$ et $\bar{p}(z)$ sont solutions du modèle pour $\underline{U}_H = 0$. En supposant que $N_0^2 = \gamma \frac{d\bar{s}}{dz}$ est constant avec $N_0 = 10^{-2}$ s⁻¹, $\bar{s}(0) = 0$ et $\bar{p}(0) = 0$, calculer $\bar{s}(z)$ et $\bar{p}(z)$. Indiquer la valeur numérique de la pression $\bar{P} = P_r + \bar{p}$ pour $z = H$.
- 3) On rappelle que la température potentielle θ est définie par la relation $\theta = T(P/P_0)^{-R/C_p}$ avec $P_0 = 1\,000$ hPa où T est la température et que $S = C_p \text{Ln } \theta + \text{Cste}$. On suppose que $\bar{T}(0) = 20^\circ\text{C}$ au sol. Calculer $\bar{\theta}(H)$ et $\bar{T}(H)$ à la tropopause correspondant à la solution $\bar{p}(z)$ et $\bar{s}(z)$. Que valent ces températures en degrés Celsius et sont-elles représentatives de la réalité?
- 4) On définit ψ par la relation $\tilde{p} = \rho_r f_0 \psi$. On note $\zeta = \nabla_H^2 \psi$ et $\eta = \bar{\eta} + \tilde{\eta}$ avec $\bar{\eta} = \frac{d\bar{s}}{dz} f_0$ et $\tilde{\eta} = \frac{d\tilde{s}}{dz} \zeta + \frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} f_0$. Que représentent les champs ψ , ζ et η ? On suppose, dans la suite du problème, que $\tilde{\eta} = 0$ pour $z \in [0, H]$. Justifier brièvement cette hypothèse.
- 5) On suppose que le champ de pression obéit à la relation $\tilde{p} = p_m \lambda |z_m| F(x, y, z)$ avec $F(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + \lambda^2(z - z_m)^2}$ où z_m et λ sont des constantes. Calculer la valeur de λ permettant de satisfaire l'hypothèse $\tilde{\eta} = 0$. On rappelle que $\nabla^2(1/r) = 0$ pour $r > 0$ en coordonnées sphériques.
- 6) On suppose que $p_m < 0$ et $z_m < 0$. Calculer $\tilde{s}(0, 0, 0)$ et indiquer son signe. Tracer (schématiquement) l'allure des champs de pression P , de température T et de vent au sol dans le plan Oxy . Justifier le fait qu'une dépression au sol correspond à une anomalie chaude près de la surface.
- 7) On suppose $p_m < 0$ et $z_m > H$. Déterminer le signe de $\tilde{s}(0, 0, H)$. Tracer (schématiquement) l'allure des champs de pression \tilde{p} et d'entropie \tilde{s} dans le plan vertical Oxz pour $y = 0$. Justifier le fait qu'une dépression à la tropopause correspond à une anomalie froide en altitude.

8) Montrer que le champ de pression au sol peut s'écrire sous la forme $\bar{p}(x, y, 0) = f(r)$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $f(r) = p_m (r^2/L^2 + 1)^{-1/2}$. Exprimer L en fonction de z_m et λ . Calculer la valeur $r = r_*$ pour laquelle $f(r)$ présente un point d'inflexion. Utiliser ce résultat pour estimer grossièrement, à partir de la figure 1, les valeurs de p_m et z_m permettant de modéliser les champs synoptiques de la tempête du 24 janvier 2009 lors de son passage sur la France.

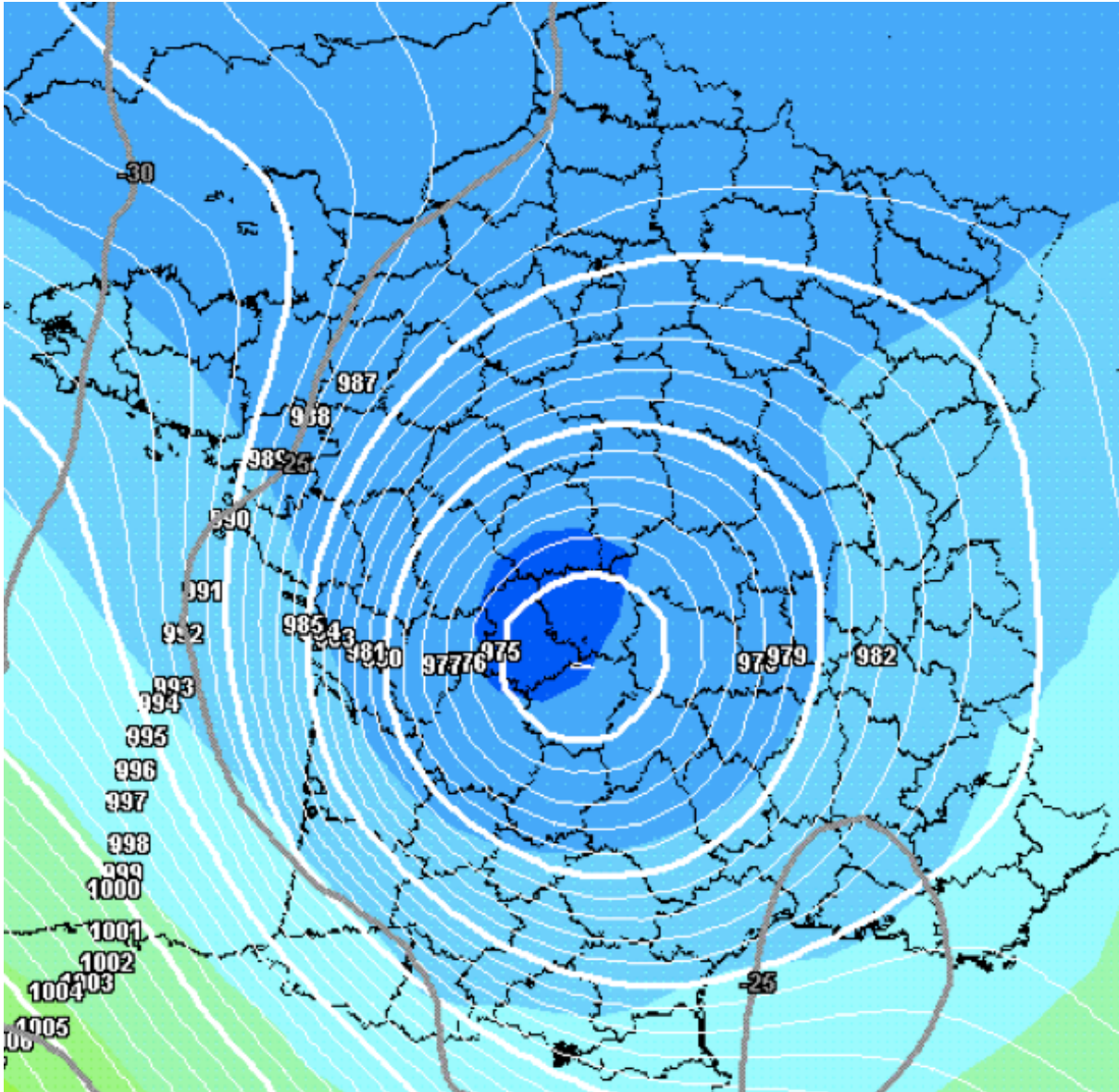


FIG. 1 – Tempête du 24 janvier 2009. Isobares (P , lignes blanches, $\delta P = 1$ hPa) au sol ($z = 0$). Isohypses (ψ , champ coloré, $\delta\psi = 40$ m) et isothermes (T , lignes grises, $\delta T = 1^\circ\text{C}$) pour $P = 500$ hPa.

Problème 2 : Circulation thermohaline (12 points)

On s'intéresse à la circulation thermohaline dans les océans. On n'étudie dans ce problème que les mouvements liés aux perturbations de masse volumique et on néglige systématiquement les effets du vent sur l'océan.

On considère un modèle simplifié cartésien pour l'étude de la circulation convective des océans, le modèle de Stommel-Arons. L'océan occupe un domaine à fond plat de dimensions horizontales L_x et L_y (voir figure 2) avec une description à deux couches de masses volumiques constantes et d'épaisseurs variables. On suppose que les frontières sont ouvertes sauf sur le bord EST, en $x = L_x$, où la vitesse zonale est nulle. La couche inférieure d'épaisseur $h_1(x, y) > 0$ correspond à un fluide de masse volumique ρ_1 . La couche supérieure d'épaisseur $h_2(x, y) > 0$ correspond à un fluide de masse volumique ρ_2 .

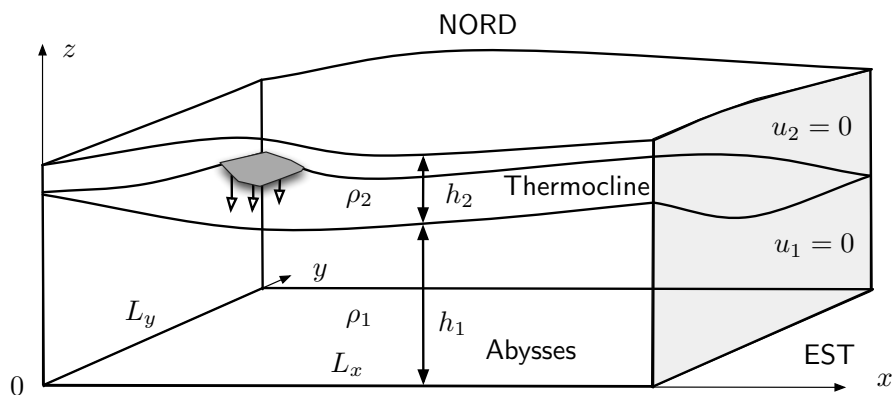


FIG. 2 – Modèle de Stommel-Arons pour la circulation convective.

On suppose l'existence d'une source très localisée à haute latitude (représentée en gris foncé sur la figure), qui transforme le fluide de masse volumique ρ_2 en un fluide de masse volumique ρ_1 . Cela produit un flux de matière de la couche 2 vers la couche 1. On suppose que le régime est permanent (stationnaire). Le flux de masse à travers l'interface entre les deux domaines doit donc être nul. Ainsi, on introduit un flux de matière $q^*(x, y)$ à travers l'interface stationnaire d'équation $z = h_1$ (thermocline) pour compenser le flux de matière associé à la source localisée. La masse volumique des particules fluides qui transitent ainsi de la couche 1 vers la couche 2 est transformée de ρ_1 en ρ_2 .

- 9) Rappeler le rôle de la concentration en sel et de la température dans la circulation thermohaline et la conséquence principale de ce double forçage.
- 10) On suppose que les composantes de la vitesse horizontale sont indépendantes de z et on les note $u_2(x, y)$ et $v_2(x, y)$ pour la couche 2 et $u_1(x, y)$ et $v_1(x, y)$ pour la couche 1. On modélise le flux de matière de la couche 1 vers la couche 2 (à l'extérieur de la source localisée) par les équations

$$\rho_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial y} = q^* \quad \text{et} \quad \rho_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial y} = -q^*. \quad (2)$$

Quelle loi physique représentent ces équations? Calculer la valeur de la divergence du champ horizontal de composantes (Q_x, Q_y) défini par $Q_x = \rho_1 h_1 u_1 + \rho_2 h_2 u_2$ et $Q_y = \rho_1 h_1 v_1 + \rho_2 h_2 v_2$. Que peut-on en conclure sur le bilan de masse à travers les frontières du domaine?

- 11) On suppose que l'approximation hydrostatique est vérifiée et que la pression atmosphérique P_a sur la surface libre d'équation $z = h_1 + h_2$ est constante. La pression varie continuellement au travers de l'interface des deux couches. En déduire l'expression des pressions respectives $P_1(x, y, z)$ et $P_2(x, y, z)$ dans les deux couches.

12) On modélise la circulation océanique par les équations

$$-f v_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x}, \quad f u_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial y}, \quad (3)$$

$$-f v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad f u_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial y}, \quad (4)$$

où $f(y)$ est le paramètre de Coriolis. Indiquer les hypothèses et les approximations qui permettent de modéliser ainsi la circulation océanique. Remplacer P_1 et P_2 par leurs expressions en fonction de h_1 et h_2 .

13) En déduire que l'on peut écrire

$$\beta h_2 v_2 = -f q^*/\rho_2 + B_2 J(h_1, h_2) \quad \text{et} \quad \beta h_1 v_1 = f q^*/\rho_1 + B_1 J(h_1, h_2) \quad (5)$$

où $\beta(y) = f'(y)$, $J(h_1, h_2) = \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial y}$ et où B_1 et B_2 sont des constantes que l'on précisera.

14) En déduire que $Q_y = 0$. En invoquant la nullité des vitesses zonales u_1 et u_2 à l'est de la boîte ($x = L_x$), en déduire que $Q_x = 0$. Montrer que l'on a $h_2 \nabla_H P_2 + h_1 \nabla_H P_1 = 0$.

15) En déduire que $C_2(h_1, h_2) \nabla h_2 + C_1(h_1, h_2) \nabla h_1 = 0$ où C_2 et C_1 sont des fonctions de h_1 et h_2 que l'on précisera. En déduire que $\rho_1 h_1^2 + 2 \rho_2 h_1 h_2 + \rho_2 h_2^2$ est un champ constant.

16) En déduire que $J(h_1, h_2) = 0$ ainsi que les relations $\beta v_2 = -f q^*/(\rho_2 h_2)$ et $\beta v_1 = f q^*/(\rho_1 h_1)$. Comment peut-on nommer ces relations ?

17) On suppose que $q^* = q_0 > 0$ est une constante et que $\tilde{h}_1 = h_1 - h_{1r}$ et $\tilde{h}_2 = h_2 - h_{2r}$ sont petits devant les épaisseurs de référence h_{1r} et h_{2r} . On approxime f et β par les constantes f_0 et β_0 . Montrer alors que l'on a $\tilde{h}_2 = -\tilde{h}_1(1 + D)$ où D est une constante que l'on exprimera en fonction de $(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$ et $h_{1r}/(h_{1r} + h_{2r})$.

18) En déduire la cote $z = z_{therm}$ de la thermocline lorsque la surface libre est à une cote $z = z_{libre}$ telle que $z_{libre} - (h_{1r} + h_{2r}) = 7$ cm. On supposera que $h_{2r} = 500$ m, $h_{1r} = 3\,500$ m, $\rho_1 = 1\,028$ kg/m³ et $\rho_2 = 1\,024$ kg/m³.

19) Montrer que v_1, v_2 sont des constantes que l'on exprimera en fonction de $\rho_1, \rho_2, h_{1r}, h_{2r}, f_0, \beta_0$ et q_0 . En utilisant les équations de conservation de la masse et les conditions aux limites, en déduire que u_2 et u_1 sont des fonctions affines de x que l'on explicitera.

20) On prend $f_0 = 10^{-4}$ s⁻¹ et $\beta_0 = f_0/a$ avec $a = 6.4 \cdot 10^3$ km. On suppose que $q_0 = 10^{-3}$ kg m⁻² s⁻¹ et on choisit $h_{2r} = 500$ m, $h_{1r} = 3\,500$ m et $L_x = L_y = 4\,000$ km. Estimer, en Sverdrup, les débits volumiques dans chaque couche aux frontières du domaine ainsi qu'à l'interface entre les deux couches.

21) Représenter sur un schéma, pour chacune des couches, les champs de vitesses horizontaux ainsi que la projection des trajectoires des particules fluides sur un plan horizontal. Commenter en comparant la direction des vitesses avec la structure de la circulation thermohaline réelle.

CORRIGÉ

Problème 1 : Perturbations de moyenne latitude (8 points)

1) (0.5 point)

Les hypothèses et approximations constitutives de ce modèle sont : équilibre hydrostatique, équilibre géostrophique, stationnarité, incompressibilité ou hypothèse de Boussinesq.

2) (1 point)

Comme $\frac{d\bar{s}}{dz} = N_0^2/\gamma$ et $\frac{d\bar{p}}{dz} = \rho_r \gamma \bar{s}$, l'intégration de ces équations avec les conditions aux limites $\bar{s}(0) = 0$ et $\bar{p}(0) = 0$ conduit à $\bar{s}(z) = N_0^2 z/\gamma$ et $\bar{p}(z) = \rho_r N_0^2 z^2/2$. De même, l'intégration de $P_r'(z) = -\rho_r g$ avec $P_r(0) = P_0$ conduit à $P_r(z) = P_0 - \rho_r z$. On en déduit que la pression à la tropopause est $\bar{P}(H) = P_r(H) + \bar{p}(H) = P_0 - \rho_r g H + \rho_r N_0^2 H^2/2 = 232$ hPa.

3) (1 point)

Comme $\bar{p}(0) = 0$, on a $\bar{\theta}(0) = \bar{T}(0)$. On peut écrire $\bar{S}(H) - \bar{S}(0) = \bar{s}(H) = C_p \text{Ln} [\bar{\theta}(H)/\bar{\theta}(0)]$. En utilisant $\bar{s}(H) = N_0^2 H/\gamma$, on obtient finalement $N_0^2 H/\gamma = C_p \text{Ln} \left[\frac{\bar{\theta}(H)}{\bar{T}(0)} \right]$ et donc $\bar{\theta}(H) = \bar{T}(0) \exp \left[\frac{N_0^2 H}{\gamma C_p} \right]$. Comme $\frac{N_0^2 H}{\gamma C_p} \sim 8 \cdot 10^{-2}$, on peut faire l'approximation $\bar{\theta}(H) = \bar{T}(0)(1 + 8 \cdot 10^{-2}) = 316$ K. La température potentielle est donc de 43°C à la tropopause. On en déduit $\bar{T}(H) = \bar{\theta}(H) [\bar{P}(H)/P_0]^{R/C_p} = 204$ K. La température est donc de -69°C à la tropopause. Les valeurs $\bar{\theta}(H) = 43^\circ\text{C}$ et $\bar{T}(H) = -69^\circ\text{C}$ sont conformes aux figures du cours qui montrent les moyennes zonales et annuelles de ces grandeurs.

4) (1 point)

Dans la mesure où $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ et $v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, le champ $\psi(x, y, z)$ à z fixé agit comme une fonction de courant. Le champ ζ est la vorticité geostrophique. Le champ η est la vorticité potentielle quasi-geostrophique. Dans le cadre de l'approximation quasi-geostrophique, ce champ est invariant. Comme $\tilde{\eta}$ est nul pour l'équilibre $\underline{U}_H = 0$, $p = \bar{p}$ et $s = \bar{s}$, on peut supposer $\tilde{\eta} = 0$ pour le régime perturbé.

5) (1 point)

Comme la fonction $1/r$, où r est la distance à l'origine, vérifie $\nabla^2(1/r) = 0$ pour $r > 0$, on en déduit facilement que $\lambda^2 \nabla_H^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$. Comme on peut écrire $\gamma \tilde{\eta} = N_0^2 \nabla_H^2 \psi + f_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$, on voit qu'il faut choisir $\lambda = N_0/f_0$ pour que $\tilde{p} = \rho_r f_0 \psi$ soit solution du modèle.

6) (1.5 point)

On a $\tilde{s} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}/(\rho_r \gamma) = |z_m| p_m (z_m - z) \lambda^3 F^3/(\rho_r \gamma)$. Dans le cas $f_0 > 0$, $p_m < 0$ et $z_m < 0$, on a $\tilde{s}(0, 0, 0) = p_m/(\rho_r \gamma z_m) > 0$. Les isobares au sol sont des cercles de centre $(x, y) = (0, 0)$ avec une dépression d'intensité p_m au centre (figure 3). Les vents sont geostrophiques et donc parallèles aux isobares. Dans la mesure où $f_0 > 0$ (hémisphère nord), les trajectoires circulaires des particules fluides tournent dans le sens trigonométrique. Les isothermes au sol sont des cercles avec un maximum en $(x, y) = (0, 0)$. Pour une solution générale $\psi(x, y, z)$ vérifiant $N_0^2 \nabla_H^2 \psi + f_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$, un minimum au sol correspond à une valeur de $\nabla_H^2 \psi$ (vorticité) positive et donc une valeur de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ négatif. On en déduit que $\frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} = \frac{f_0}{\gamma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ est négative, en donc que \tilde{s} est maximum au sol. Une dépression au sol correspond donc à une anomalie chaude au sol.

7) (1 point)

Dans le cas $f_0 > 0$, $p_m < 0$ et $z_m > H$, on a $\tilde{s}(0, 0, H) = p_m/[\rho_r \gamma (z_m - H)] < 0$. Les isobares et les isentropes sont des portions de cercles de centre $(x, z) = (0, z_m)$ dans le demi-plan vertical $z \leq H$ avec un minimum de pression et un maximum de température en $(x, z) = (0, H)$ dans ce domaine (figure 4). Un

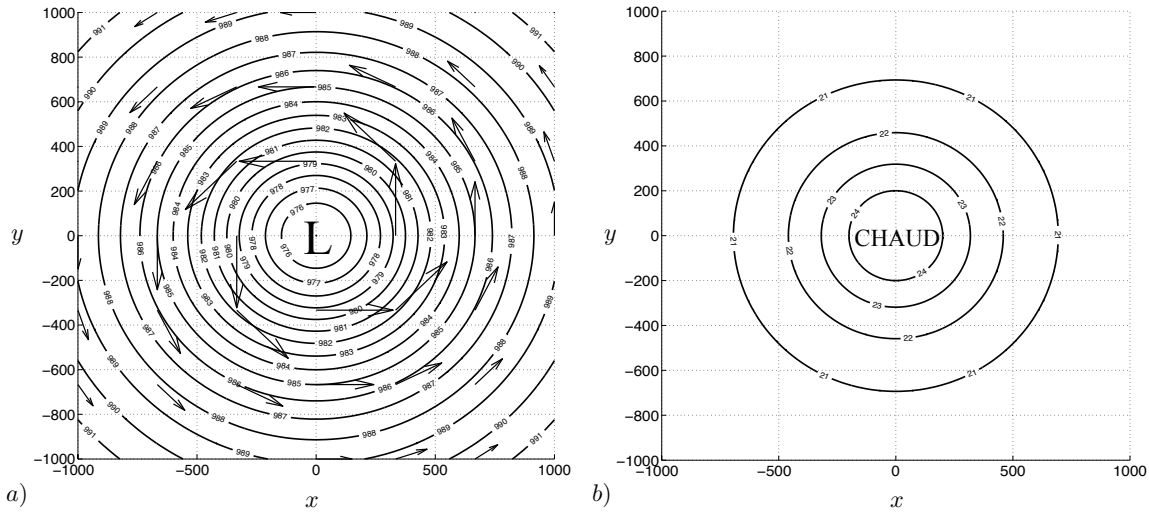


FIG. 3 – Champs au sol. a) Isobares P avec une dépression au centre et champ de vent. b) Isothermes T avec un maximum au centre.

raisonnement identique à celui effectué pour la question précédente permet d'affirmer qu'une dépression à la tropopause correspond, dans ce cas et dans le cas général, à une anomalie froide à la tropopause.

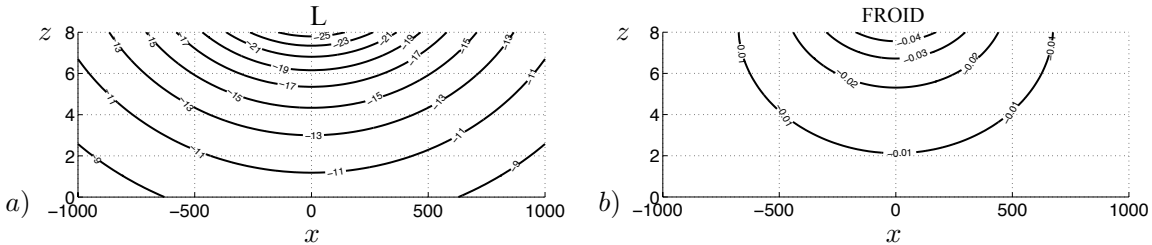


FIG. 4 – Coupe verticale en $y = 0$. a) Isobares \tilde{p} avec une dépression en $(x, z) = (0, H)$. b) Isentropes \tilde{s} avec un minimum en $(x, z) = (0, H)$.

8) (1 point)
 On a $L = \lambda |z_m|$ et $r_* = L\sqrt{2}$. En lisant sur la carte que le minimum de pression est de l'ordre de $P = 975$ hPa, on peut poser $p_m = -25$ hPa. En observant sur la carte, on peut estimer l'existence d'un point d'inflexion pour $r_* \sim 500$ km. On a donc $L = 350$ km et $z_m = -L/\lambda \sim -3\,500$ m.

Problème 2 : Circulation thermohaline (12 points)

9) (0.5 point)
 Une augmentation de la salinité ou une diminution de la température augmente la masse volumique. Cette augmentation génère une plongée des eaux de surface vers les abysses en quelques régions très localisées des hautes latitudes. Ce processus alimente la circulation thermohaline des océans.

10) **(0.5 point)**

Les équations (2) traduisent la conservation de la masse. En sommant ces deux équations, on obtient que $\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$. La divergence du champ horizontal (Q_x, Q_y) est donc nulle. Le flux de masse à travers les frontières du domaine est nul.

11) **(1 point)**

La relation hydrostatique $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$, la condition aux limites $P = P_a$ pour $z = h_1 + h_2$ et la continuité de la pression à travers l'interface $z = h_1$ entraînent

$$P_2(x, y, z) = P_a - \rho_2 g z + g(\rho_2 h_1 + \rho_2 h_2) \quad \text{et} \quad P_1(x, y, z) = P_a - \rho_1 g z + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2). \quad (6)$$

12) **(1 point)**

Les hypothèses du modèle sont : approximation hydrostatique, équilibre géostrophique, stationnarité, frottements négligeables, absence de forçage diabatique. En remplaçant les pressions P_2 et P_1 en fonction de leurs expressions, le modèle s'écrit

$$-f v_2 = -\frac{g}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_2 h_1 + \rho_2 h_2), \quad f u_2 = -\frac{g}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_2 h_1 + \rho_2 h_2), \quad (7)$$

$$-f v_1 = -\frac{g}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2), \quad f u_1 = -\frac{g}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial y} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2). \quad (8)$$

13) **(1.5 point)**

En multipliant respectivement par h_1 ou h_2 les équations dans chaque couche, en dérivant par rapport à y les équations pour $h v$ et par rapport à x les équations pour $h u$ qui en résultent, puis en retranchant deux à deux les équations ainsi obtenues dans chaque couche, on obtient

$$\begin{aligned} f(y) \left[\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial y} \right] + h_2 v_2 f'(y) &= -\frac{1}{\rho_2} J(h_2, P_2), \\ f(y) \left[\frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial y} \right] + h_1 v_1 f'(y) &= -\frac{1}{\rho_1} J(h_1, P_1). \end{aligned} \quad (9)$$

En utilisant les équations de la masse (2), on obtient

$$\beta h_2 v_2 = -f q^*/\rho_2 + g J(h_1, h_2) \quad \text{et} \quad \beta h_1 v_1 = f q^*/\rho_1 - g(\rho_2/\rho_1) J(h_1, h_2). \quad (10)$$

On a donc $B_2 = g$ et $B_1 = -g \rho_2/\rho_1$.

14) **(1 point)**

En sommant les deux équations (10) on obtient $Q_y = \rho_1 h_1 v_1 + \rho_2 h_2 v_2 = 0$. Comme la divergence du champ (Q_x, Q_y) est nulle, on obtient $\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$. En utilisant les conditions aux limites $u_1 = u_2 = 0$ pour $x = L_x$, on en déduit que $Q_x = \rho_1 h_1 u_1 + \rho_2 h_2 u_2 = 0$. En multipliant les équations (7) et (8) respectivement par h_2 et h_1 et en les sommant deux à deux, on obtient $h_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} + h_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0$ et $h_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} + h_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} = 0$, d'où $h_2 \nabla_H P_2 + h_1 \nabla_H P_1 = 0$.

15) **(1 point)**

En remplaçant P_1 et P_2 par leurs expressions en fonction de h_1 et h_2 dans la relation $h_2 \nabla_H P_2 + h_1 \nabla_H P_1 = 0$ on en déduit $\rho_2 h_2 \nabla h_2 + \rho_2 h_2 \nabla h_1 + \rho_2 h_1 \nabla h_2 + \rho_1 h_1 \nabla h_1 = 0$ que l'on peut aussi écrire $C_2(h_1, h_2) \nabla h_2 + C_1(h_1, h_2) \nabla h_1 = 0$ avec $C_2(h_1, h_2) = \rho_2 h_1 + \rho_2 h_2$ et $C_1(h_1, h_2) = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$. En intégrant, on démontre que la quantité $\rho_1 h_1^2 + 2 \rho_2 h_1 h_2 + \rho_2 h_2^2$ ne dépend pas de l'espace : c'est donc une constante.

16) **(0.5 point)**

Dans la mesure où l'on peut écrire $J(h_1, h_2) = (\nabla h_1 \wedge \nabla h_2) \cdot \underline{k}$, on voit que $J(h_1, h_2) = 0$. Les relations $\beta v_2 = -f q^*/(\rho_2 h_2)$ et $\beta v_1 = f q^*/(\rho_1 h_1)$ qui en découlent peuvent être vues comme des équations

de Sverdrup intégrées sur la verticale en assimilant les expressions q^*/ρ à des vitesses et les expressions $\pm q^*/(\rho h)$ à des gradients verticaux de vitesse.

17) (1 point)

En linéarisant la relation $\rho_1 h_1^2 + 2\rho_2 h_1 h_2 + \rho_2 h_2^2 = \text{Cste}$, on obtient $(\rho_1 h_{1r} + \rho_2 h_{2r})\tilde{h}_1 + (\rho_2 h_{1r} + \rho_2 h_{2r})\tilde{h}_2 = 0$. On obtient donc $\tilde{h}_2 = -(1 + D)\tilde{h}_1$ avec $D = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{h_{1r}}{h_{1r} + h_{2r}}$.

18) (1 point)

Comme $\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = z_{libre} - (h_{1r} + h_{2r}) = 7 \cdot 10^{-2}$ m et que $\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = -D\tilde{h}_1$ avec $D = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{h_{1r}}{h_{1r} + h_{2r}} = 3.5 \cdot 10^{-3}$ on a $\tilde{h}_1 = -(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)/D = -20$ m. La cote de la thermocline est donc $z_{therm} = 3480$ m.

19) (1 point)

On a $v_2 = -f_0 q_0 / (\rho_2 \beta_0 h_{2r})$ et $v_1 = f_0 q_0 / (\rho_1 \beta_0 h_{1r})$. Les équations de conservation de la masse (2), s'écrivent $h_{2r} \frac{\partial u_2}{\partial x} = q_0 / \rho_2$ et $h_{1r} \frac{\partial u_1}{\partial x} = -q_0 / \rho_1$. En utilisant les conditions aux limites $u_1 = u_2 = 0$ pour $x = L_x$, on en déduit que $u_2 = -q_0(L_x - x) / (\rho_2 h_{2r})$ et $u_1 = q_0(L_x - x) / (\rho_1 h_{1r})$.

20) (1 point)

La valeur $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ est une estimation de la valeur de f aux moyennes latitudes de l'hémisphère nord. Comme $\beta = f'(y) = \frac{1}{a} \frac{df}{d\phi}$ où a est le rayon de la Terre et ϕ la latitude, on peut approximer β par $\beta_0 = f_0/a$ en prenant $\phi = 45^\circ \text{N}$ comme valeur moyenne de la latitude. On calcule alors $v_2 = -f_0 q_0 / (\rho_2 \beta_0 h_{2r}) = -a q_0 / (\rho_2 h_{2r}) = -12.5 \cdot 10^{-3}$ m/s. Les débits volumiques dans la direction y sont respectivement $D_{2y} = v_2 L_x h_{2r} = -a L_x q_0 / \rho_2 = -25$ Sv et $D_{1y} = -(\rho_2 / \rho_1) D_{2y} = 25$ Sv pour les couches 2 et 1. Sur la frontière ouest, on obtient $u_2(0) = -q_0 L_x / (\rho_2 h_{2r}) = -7.8 \cdot 10^{-3}$ m/s. Les débits volumiques dans la direction x à travers les frontières ouest sont $D_{2W} = u_2(0) L_y h_{2r} = -L_x L_y q_0 / \rho_2 = -16$ Sv et $D_{1W} = -(\rho_2 / \rho_1) D_{2W} = 16$ Sv. Le débit volumique dans la direction verticale à travers la thermocline est $D_z = q_0 L_x L_y / \rho_1 \sim q_0 L_x L_y / \rho_2 = 16$ Sv.

21) (1 point)

L'allure des champs de vitesse horizontaux et de la projection des trajectoires dans le plan horizontal est représentée sur la figure 5. Le sens des trajectoires de la couche inférieure est conforme à la partie "moyennes latitudes" de la circulation profonde des océans telle qu'imaginée par Stommel en 1958 et vérifiée par les observations de nos jours.

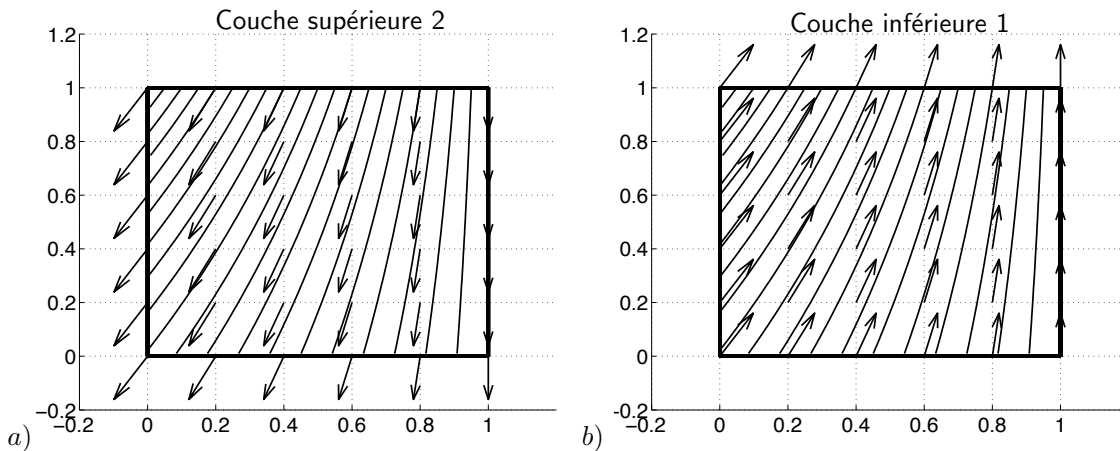


FIG. 5 – Allure des champs de vitesses horizontaux et de leurs trajectoires. a) couche supérieure 2, b) couche inférieure 1.

CONTRÔLE NON CLASSANT MEC567 : “SCIENCES DE L’EAU ET ENVIRONNEMENT”

du jeudi 27 mars 2008

Durée : 3 heures (de 9h à 12h)

Sujet proposé par MM. Olivier THUAL et François LOTT

* * *

L’usage des cours photocopiés, des notes de cours et des notes de petites classes est autorisé.

* * *

PREMIÈRE PARTIE : Circuit hydraulique d’un chauffage central (5 points)

Les circuits hydrauliques en charge sont utilisés pour de nombreuses applications : réseaux d’eau potable, commandes hydrauliques, production d’énergie, circuits de refroidissement, etc. L’exemple du chauffage central est ici choisi pour explorer quelques notions d’hydraulique.

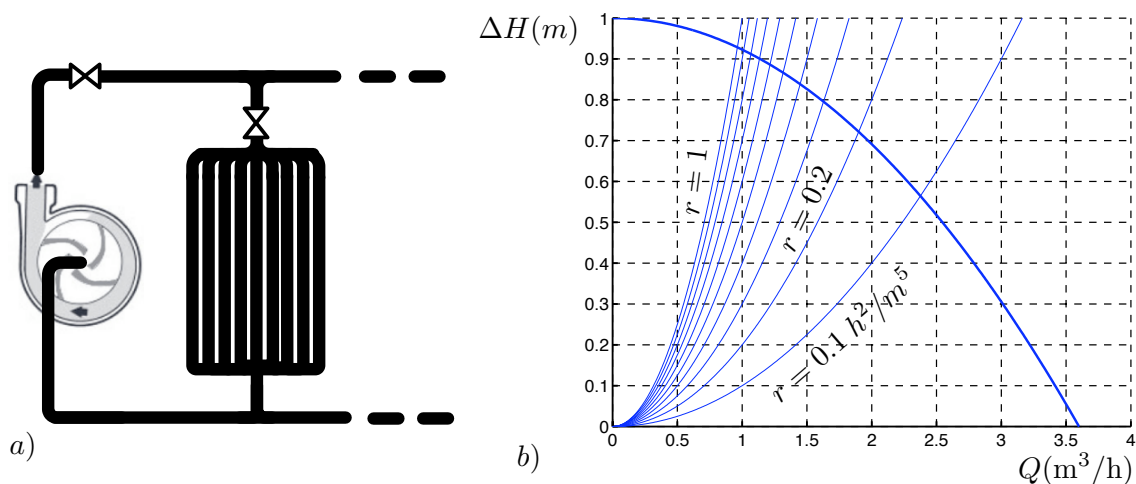


Figure 1: a) Schéma partiel et simplifié du circuit hydraulique avec une pompe, un radiateur, des conduites, des vannes, des coudes et des tés. b) Courbe caractéristique $\Delta H = H_p (1 - Q^2/Q_p^2)$ de la pompe et courbes $\Delta H = r Q^2$ pour $r = .1, .2, .3, \dots, 1 \text{ h}^2/\text{m}^5$.

On considère un circuit de chauffage central constitué d’une pompe, de vannes, de radiateurs et de conduites rectilignes de diamètre $D = 2 \text{ cm}$ reliées entre elles par des coudes ou des tés de même diamètre (voir le schéma simplifié de la figure 1a). On suppose que l’écoulement est

partout turbulent avec un coefficient de perte de charge linéique constant $\lambda = 0.02$ dans les portions de conduites rectilignes.

- 1) On suppose que les coudes sont droits (angle $\varphi = \pi/2$) et que leur rayon de courbure est $\rho_c = D$. Déterminer leur coefficient de perte de charge singulière en utilisant le graphe de la figure 2. En déduire la perte de charge à travers un tel coude lorsque le débit qui le traverse est $Q = 2 \text{ m}^3/\text{h}$. On pourra prendre $g = 10 \text{ m/s}^2$ pour la gravité.

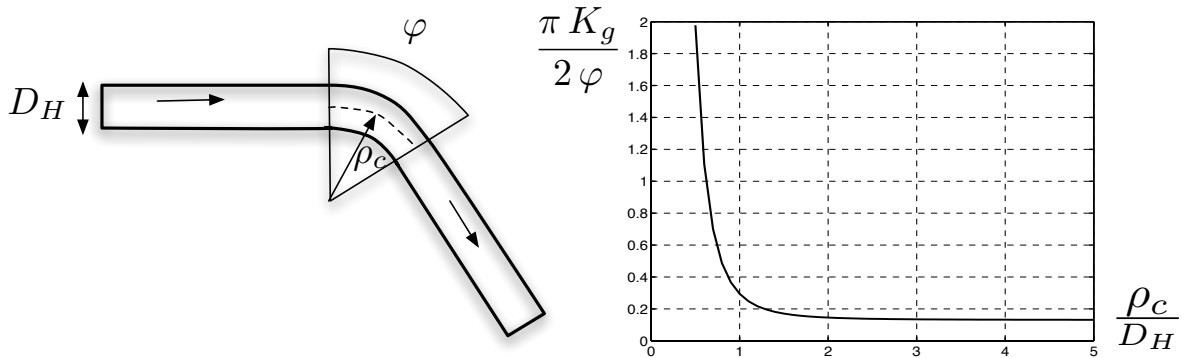


Figure 2: Coefficient de perte de charge singulière dans un coude.

- 2) On assimile la perte de charge d'une vanne à celle d'un rétrécissement brusque suivi de très près par un élargissement brusque, le diamètre D_v de la section intermédiaire étant réglable. Calculer et tracer le coefficient de perte de charge singulière de cette vanne en fonction de $\beta = D_v^2/D^2$.
- 3) On définit la "longueur équivalente" L_e d'un tronçon du circuit comme étant la longueur de la conduite rectiligne de même section qui produirait la même perte de charge pour le même débit. Exprimer la longueur équivalente d'une singularité hydraulique dont le coefficient de perte de charge est K_g . Quelle est la longueur équivalente des coudes décrits à la question 1 ?
- 4) On considère qu'un radiateur est constitué de $n = 9$ tronçons en parallèles de longueurs équivalentes respectives $L_t = 2.7 \text{ m}$. Calculer la longueur équivalente de ce radiateur.
- 5) Le circulateur de la chaudière est une pompe dont le gain de charge ΔH est relié à son débit Q par la relation $\Delta H = H_p (1 - Q^2/Q_p^2)$ avec $H_p = 1 \text{ m}$ et $Q_p = 3.6 \text{ m}^3/\text{h}$. On suppose que la longueur équivalente du circuit de chauffage central alimenté par cette pompe est $L_e = 20 \text{ m}$. Calculer le débit Q du circuit ainsi que la puissance P délivrée par la pompe. Le graphe de la figure 1b pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées. On prendra $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ pour la masse volumique de l'eau.

DEUXIÈME PARTIE : Dispersion des ondes capillaires (7 points)

Lorsque la surface libre d'un liquide est déformée, la résultante des forces de cohésion intermoléculaires génère une force surfacique perpendiculaire à cette surface qui s'oppose à la déformation. Si $z = \eta(x, y)$ est l'équation de cette surface libre, cet effet de "tension superficielle" se traduit par une différence de pression à l'interface qui s'écrit

$$p - p_a = -T \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad (\text{E.1})$$

où p est la pression dans le fluide, p_a la pression atmosphérique et T une constante qui vaut $T = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m pour l'eau.

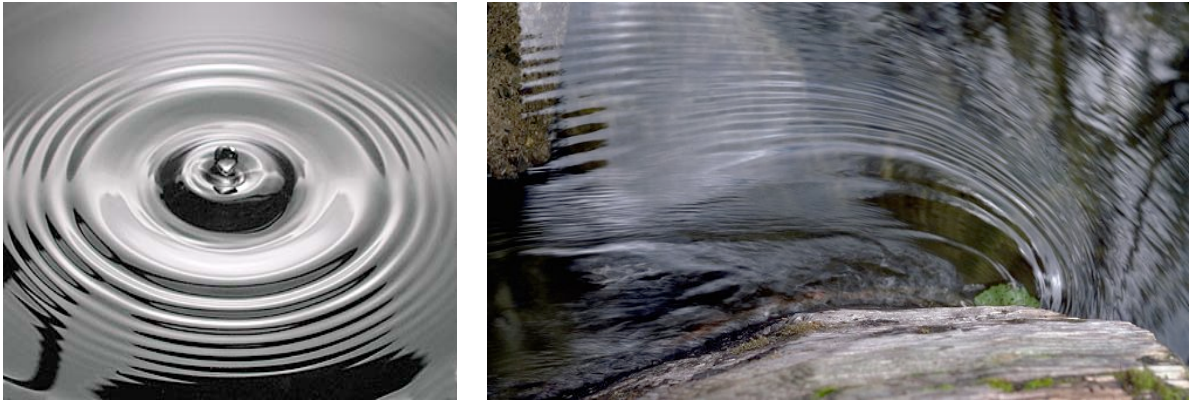


Figure 3: Visualisation d'ondes capillaires.

Pour déterminer la contribution de la tension superficielle à la relation de dispersion des ondes de surface, on suppose que la profondeur du domaine fluide est infiniment grande et que le champ de vitesse \underline{U} est nul lorsque $z \rightarrow -\infty$. La dynamique du fluide est modélisée par les équations d'Euler incompressibles :

$$\text{div } \underline{U} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{U} \cdot \text{grad } \underline{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z, \quad (\text{E.2})$$

où ρ est la masse volumique constante.

- 6) Écrire la condition aux limites cinématique qui complète la condition aux limites dynamique (E.1).
- 7) On s'intéresse aux petites oscillations de la surface libre. Écrire le système d'équations linéarisées ainsi que les conditions aux limites complètement linéarisées.
- 8) On suppose que l'écoulement est irrotationnel est l'on pose donc $\underline{U} = \text{grad } \phi$. Montrer que l'on peut choisir $\phi(x, y, z, t)$ de manière à pouvoir écrire

$$p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (\text{E.3})$$

- 9) En déduire une formulation des conditions aux limites en $z = 0$ qui ne fait intervenir que ϕ et η .

10) On cherche des solutions complexes de la forme

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(z) e^{i k_1 x + i k_2 y - i \omega t} . \quad (\text{E.4})$$

Montrer que $\Phi(z) = \Phi_m \exp(\beta z)$ où β est une constante que l'on déterminera.

11) En déduire que la relation de dispersion de ces ondes s'écrit

$$\omega^2 = g k \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2} \right) , \quad (\text{E.5})$$

où $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ et k_c une constante que l'on déterminera. En déduire l'ordre de grandeur des longueurs d'ondes des ondes de surface dont la période est influencée par les effets de tension superficielle.

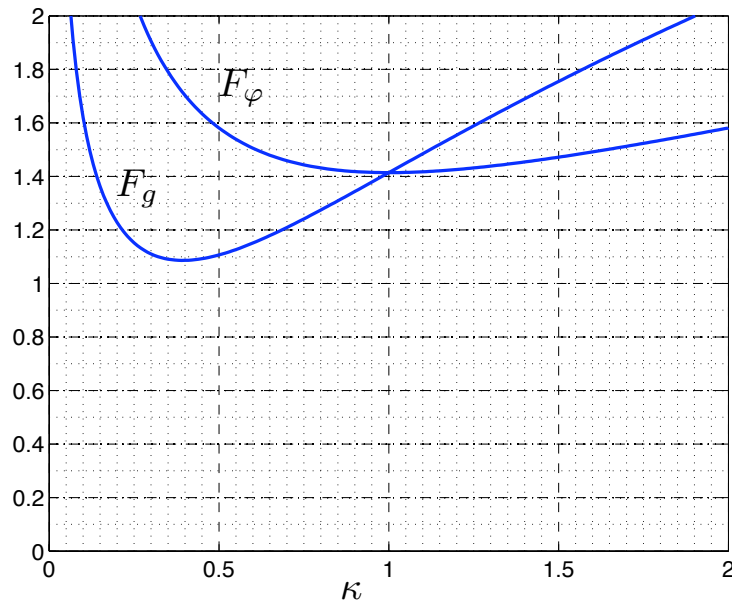


Figure 4: Fonctions $F_g(\kappa) = (1 + 3\kappa^2) [4\kappa(1 + \kappa^2)]^{-1/2}$ et $F_\varphi(\kappa) = (1 + \kappa^2)^{1/2} \kappa^{-1/2}$.

- 12) Déterminer les minima respectifs $c_\varphi^{(\min)}$ et $c_g^{(\min)}$ des modules de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe de ces ondes de surface. Le graphe de la figure 4 pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées.
- 13) On jette un caillou dans une mare profonde. Montrer qu'une zone de calme s'étend à une vitesse que l'on déterminera.
- 14) Un obstacle de petite taille se déplace à la surface de l'eau à la vitesse $-V \underline{e}_x$ où l'on suppose que $V = 1.6 \sqrt{g/k_c}$. Indiquer pourquoi l'on observe des ondes capillaires de courte longueur d'onde à l'avant de l'obstacle et des ondes de plus grande longueur d'onde à l'arrière. Déterminer la longueur d'onde des ondes que l'on observe dans l'axe de la trajectoire.

TROISIÈME PARTIE : Réfraction de la houle par un courant (8 points)

Dans cette troisième partie, on s'intéresse à la réfraction des ondes de surface par un courant. On suppose que la longueur d'onde des paquets d'ondes considérés permet de négliger la tension superficielle. Lorsque le courant moyen est nul, on note $\Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g \|\underline{k}\| \tanh[\|\underline{k}\| h_f(\underline{x})]}$ la relation de dispersion intrinsèque locale d'un paquet d'ondes dispersé.

On admettra qu'un paquet d'ondes dispersé, en présence d'un courant moyen $\underline{V}(\underline{x})$ stationnaire variant lentement par rapport à la longueur d'onde locale, obéit à l'une des relations de dispersion

$$\omega = \Omega_+(\underline{k}, \underline{x}) = \Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) + \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{k} \quad \text{ou} \quad \omega = \Omega_-(\underline{k}, \underline{x}) = -\Omega_i(\underline{k}, \underline{x}) + \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{k}, \quad (\text{E.6})$$

définies, par convention, seulement pour $\omega \geq 0$.

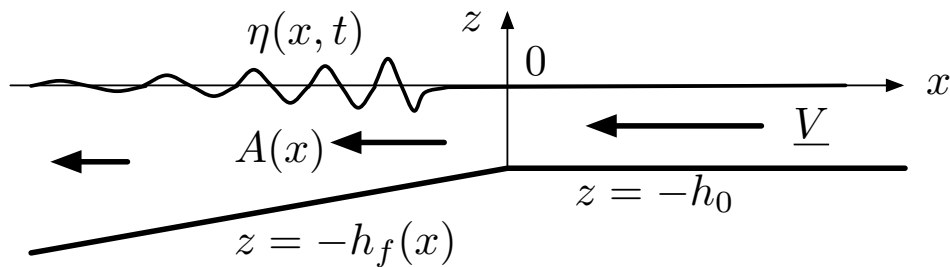


Figure 5: Houle $\eta(x, t)$ réfractée par le courant $\underline{V}(x) = -A(x) \underline{e}_x$ et la bathymétrie $h_f(x)$.

On considère la bathymétrie définie par $h_f(x) = h_0 + \beta x$ pour $x \leq 0$ et $h_f(x) = h_0$ pour $x \geq 0$, que traverse un écoulement moyen de vitesse $\underline{V}(x) = -A(x) \underline{e}_x$ définie par $A(x) = q/h_f(x)$. Les constantes $\beta = 0.1$, $h_0 = 2$ m et q sont positives. Ce modèle, invariant par translation en y , décrit l'écoulement d'une rivière de débit linéique q qui se jette dans la mer (voir la figure 5).

Le graphe de la figure 6 pourra être utilisé pour déterminer les valeurs numériques demandées.

- 15) On suppose qu'au large, en $x = -\infty$, une houle de période $T = 10$ s se propage vers la côte avec une vitesse de phase parallèle à \underline{e}_x . Calculer sa longueur d'onde L_l et sa vitesse de groupe c_{gl} . On pourra prendre $g = 10 \text{ m/s}^2$ pour toutes les applications numériques.
- 16) On suppose, pour cette question et les deux suivantes, que $q = 0$, la rivière étant donc au repos. La houle de la question 15) arrive près de la côte et remonte le lit de la rivière après avoir été réfractée par la bathymétrie de la côte. Déterminer la longueur d'onde L_0 de cette houle pour $x \geq 0$.
- 17) On considère qu'une houle de hauteur H et de longueur d'onde L est en milieu peu profond si $L > 20 h_f$ et que, dans ce cas, le critère de déferlement de Munk $H/h_f > 0.78$ s'applique. Peut-on affirmer que la houle de la question 15) ne déferle pas en arrivant dans la rivière si sa hauteur au large est $H_l = 80$ cm ? On notera H_0 la hauteur de la houle qui se propage dans le lit de la rivière. On admettra que la houle ne déferle pas avant d'atteindre le régime des faibles profondeurs.
- 18) On installe un récupérateur d'énergie de la houle dans le lit de la rivière dont la largeur dans la direction y est $L_y = 10$ m. Quelle est la puissance P_0 qu'apporte la houle de la question 17) ? On prendra $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ pour la masse volumique de l'eau.

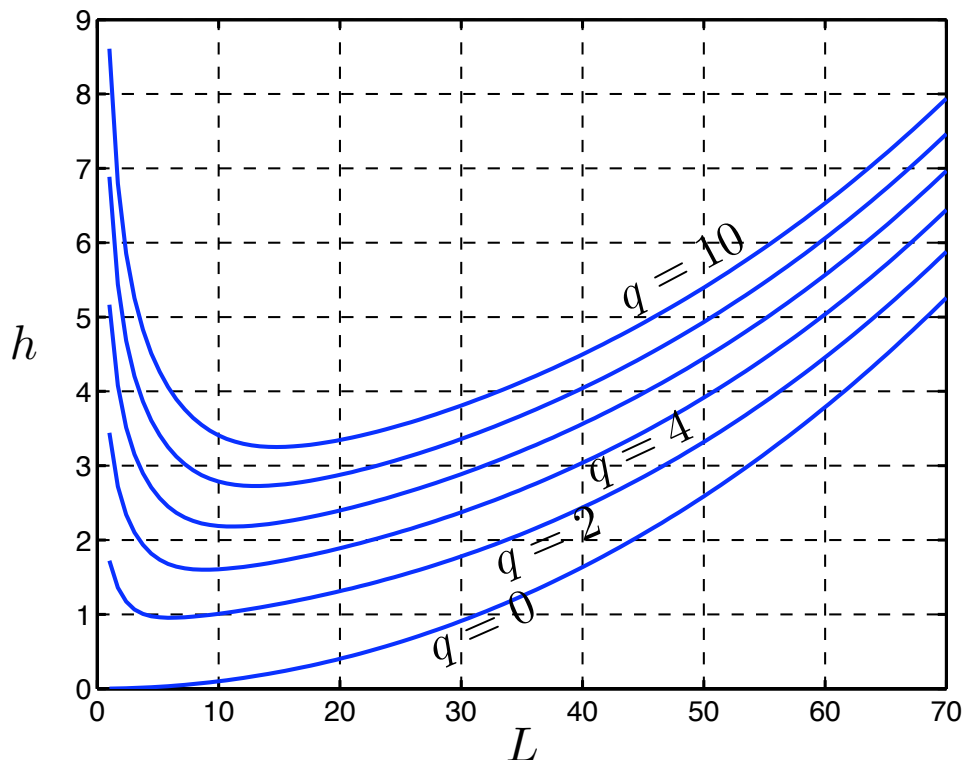


Figure 6: Fonction $h(L)$ solution de l'équation implicite $h = \frac{L}{2\pi} \operatorname{argth} \left[\frac{2\pi L}{gT^2} \left(1 + \frac{qT}{Lh} \right)^2 \right]$ pour $T = 10$ s et $q \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \text{ m}^2/\text{s}$.

- 19) On suppose maintenant que le débit linéique q de la rivière est strictement positif. On admettra que seule la relation de dispersion Ω_+ , notée Ω par la suite, est pertinente pour étudier la réfraction de la houle qui arrive du large. Exprimer la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k}, \underline{x}) = \operatorname{grad}_{\underline{k}} \Omega(\underline{k}, \underline{x})$ associée à cette relation de dispersion en fonction de la vitesse de groupe intrinsèque $\underline{c}_{gi}(\underline{k}, \underline{x}) = \operatorname{grad}_{\underline{k}} \Omega_i(\underline{k}, \underline{x})$ des ondes de surface dont on suppose connue l'expression en fonction de \underline{k} et \underline{x} .
- 20) On suppose que $q = 4 \text{ m}^2/\text{s}$. Montrer que la houle de la question 15) atteint la rivière et déterminer sa longueur d'onde L_4 pour $x \geq 0$.
- 21) On suppose que $q = 6 \text{ m}^2/\text{s}$. Déterminer le point $x = x_c$ à droite duquel la houle de la question 15) ne peut pas passer.
- 22) On considère un paquet d'ondes localisé en espace dont la longueur d'onde au large est centrée en L_l . On suppose que ce paquet d'ondes reste localisé en espace en arrivant près de la côte et qu'il se retrouve bloqué en $x = x_c$. Déterminer la vitesse de groupe intrinsèque \underline{c}_{gi} ainsi que la vitesse de phase intrinsèque $\underline{c}_{\varphi i} = \Omega_i / \|\underline{k}\|$ du paquet d'ondes bloqué. En déduire que la vitesse des crêtes des vagues est non nulle en $x = x_c$. Que deviennent ces crêtes pour $x \geq x_c$?

CORRIGÉ

PREMIÈRE PARTIE : Circuit hydraulique d'un chauffage central (5 points)

1) On lit $K_g \sim 0.3$ pour les coudes et $K_g \sim 2$ pour les tés. La perte de charge est $\Delta H = K_g \frac{Q^2}{2gA^2}$ avec $A = \pi D^2/4$. On a donc $\Delta H = K_g \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^2} = 4.7$ cm.
[0,5 point]

2) La perte de charge à travers le rétrécissement brusque est négligeable. La perte de charge à travers l'élargissement brusque est $\Delta H = K_{ge} \frac{Q_v^2}{2gA_v^2}$ où $A_v = 4\pi D_v^2/4$ et $K_{ge} = (1 - A_v/A)^2$. En utilisant la loi de conservation de la masse $Q_v A_v = Q A$, le coefficient de perte de charge de la vanne, défini par la relation $\Delta H = K_g \frac{Q^2}{2gA^2}$ est $K_g = (1 - \beta)^2/\beta^2$. C'est une fonction décroissante de $\beta = 0$, où elle infinie, à $\beta = 1$ où elle vaut 1, ce qui correspond à une absence de perte de charge singulière ($D = D_v$).
[1 point]

3) Comme le rayon hydraulique d'une conduite circulaire est $D_H = D$ et que la vitesse est $U = Q/A$, la perte de charge d'une conduite rectiligne de longueur L_e est $\Delta H = \lambda \frac{U^2}{2gD_H} L_e$. Par définition de K_g , la perte de charge d'une singularité hydraulique est $\Delta H = K_g \frac{U^2}{2g}$. On en déduit que $L_e = K_g D/\lambda$. La longueur équivalente d'un coude de coefficient de perte de charge $K_g = 0.3$, est $L_e = 30$ cm.
[1 point]

4) Si Q est le débit aux bornes du radiateur, chaque tronçon est traversé par un débit $Q_t = Q/n$. La perte de charge dans chaque tronçon est $\Delta H = \lambda \frac{Q_t^2}{2gA^2} L_t = \lambda \frac{Q^2}{2gA^2} (L_t/n^2)$. La longueur équivalente du radiateur est donc $L_e = L_t/n^2 = 3.3$ cm.
[1 point]

5) La perte de charge dans le circuit alimenté par la pompe est $\Delta H = r Q^2$ avec $r = \frac{\lambda L_e}{2gA^2 D} = 0.8 \text{ h}^2/\text{m}^5$. La lecture du graphe la figure 1b conduit aux valeurs numériques $Q = 1.1 \text{ m}^3/\text{h}$ et $\Delta H = 90$ cm. La puissance délivrée par la pompe est $P = \rho g \Delta H Q = 2.8$ W.
[1.5 point]

DEUXIÈME PARTIE : Dispersion des ondes capillaires (7 points)

6) La condition aux limites cinématique est

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) + u[x, y, \eta(x, y, t)] \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, y, t) + v[x, y, \eta(x, y, t)] \frac{\partial \eta}{\partial y}(x, y, t) = w[x, y, \eta(x, y, t)]. \quad (1)$$

[0,5 point]

7) Les équations linéarisées sont $\text{div } \underline{U} = 0$, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \underline{e}_z$. La condition aux limites $\underline{U} \rightarrow \underline{0}$ pour $z \rightarrow -\infty$ est inchangée. La condition aux limites dynamique conserve la forme de

l'équation (E.1) mais elle est, dans sa forme linéarisée, écrite pour $z = 0$:

$$p(x, y, 0, t) - p_a = -T \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}(x, y, t) \right]. \quad (2)$$

La condition aux limites cinématique linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, y, t) = w(x, y, 0). \quad (3)$$

[1 point]

8) Comme $\underline{U} = \underline{\text{grad}} \phi$, l'équation de conservation de quantité de mouvement linéarisée s'écrit

$$\underline{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = \underline{0}. \quad (4)$$

La fonction dont le gradient est nul ne dépend donc que du temps. Comme ϕ est définie à une fonction du temps près, on peut choisir cette dernière de manière à satisfaire la relation $p = p_a - \rho g z - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

[0,5 point]

9) Les conditions aux limites sont $\underline{\text{grad}} \phi = \underline{0}$ pour $z \rightarrow -\infty$ et, en $z = 0$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g \eta + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (5)$$

[0,5 point]

10) La condition aux limites $\underline{\text{grad}} \phi = \underline{0}$ pour $z \rightarrow -\infty$ entraîne que $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Phi(z) = 0$. La loi de conservation de la masse $\text{div} \underline{U} = \Delta \phi = 0$, combinée à cette condition, entraîne que $\Phi(x) = \Phi_m \exp(k z)$ avec $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. On a donc $\beta = k$.

[0,5 point]

11) L'élimination de η entre les deux conditions aux limites en $z = 0$ conduit à la condition aux limites

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (6)$$

En reportant l'expression de ϕ dans cette condition aux limites, on obtient

$$\left(\omega^2 - g k - \frac{T}{\rho} k^3 \right) \Phi_m = 0. \quad (7)$$

La relation de dispersion est donc $\omega = g k (1 + k^2/k_c^2)$ avec $k_c = \sqrt{\rho g/T} = 378 \text{ m}^{-1}$. La longueur d'onde associée est $l_c = 2\pi/k_c = 1.6 \text{ cm}$. Seules les ondes de longueurs d'ondes comparables ou inférieures à l_c sont influencées par la tension superficielle.

[1 point]

12) La relation de dispersion s'écrit $\omega = \Omega(k) = \sqrt{g} k^{1/2} (1 + k^2/k_c^2)^{-1/2}$ en adoptant la convention $\omega \geq 0$. On en déduit la vitesse de phase $c_\varphi(k) = \Omega_i(k)/k = \sqrt{g/k_c} F_\varphi(k/k_c)$ et la vitesse de groupe $c_g(k) = \Omega'(k) = \sqrt{g/k_c} F_g(k/k_c)$ avec $F_g(\kappa) = (1 + 3\kappa^2) [4\kappa(1 + \kappa^2)]^{-1/2}$ et

$F_\varphi(\kappa) = (1 + \kappa^2)^{1/2} \kappa^{-1/2}$. Le graphe de la figure 4 indique que les minima respectifs de F_φ et F_g sont 1.4 et 1.1. On a donc $c_\varphi^{(\min)} = 1.4 \sqrt{g/k_c} = 23 \text{ cm/s}$ et $c_g^{(\min)} = 1.1 \sqrt{g/k_c} = 18 \text{ cm/s}$.
[1 point]

13) Les paquets d'ondes les plus lents voyagent à la vitesse de groupe $c_g^{(\min)} = 18 \text{ cm/s}$. C'est la vitesse de propagation de la zone de calme qui s'installe pour la réponse implusionnelle du milieu.

[0,5 point]

14) On note maintenant $\Omega_i(k) = \sqrt{g} k^{1/2} (1 + k^2/k_c^2)^{-1/2}$ la relation de dispersion intrinsèque des ondes de surface dans un repère fixe et $c_{\varphi i}$ et $c_{g i}$ les vitesses de phase ou de groupe associées. Dans le repère lié à l'obstacle, les relations $\Omega_+(\underline{k}) = \Omega_i(k) + V k_1$ et $\Omega_-(\underline{k}) = -\Omega_i(k) + V k_1$ sont à considérer, avec la convention $\omega \geq 0$. Seules les ondes vérifiant $\Omega_+(\underline{k}) = 0$ ou $\Omega_-(\underline{k}) = 0$ sont observables dans le sillage de l'obstacle. Si $\underline{k} = k_1 \underline{e}_x$ et $\omega = 0$, on a donc $\Omega_-(\underline{k}) = -\Omega_i(k) + V k$ pour $k_1 \geq 0$ et $\Omega_+(\underline{k}) = \Omega_i(k) - V k$ pour $k_1 \leq 0$. On en déduit $V = c_{\varphi i}(k)$ pour $\underline{k} = k_1 \underline{e}_x$, ce qui s'écrit $V/\sqrt{g/k_c} = F_\varphi(k/k_c)$. Pour $V/\sqrt{g/k_c} = 1.6$, le graphe de la figure 4 indique que les deux solutions sont $k_a = 0.5 k_c$ et $k_b = 2.0 k_c$. Comme $c_{g i}(k) < c_{\varphi i}$ pour $k < k_c$ et $c_{g i}(k) > c_{\varphi i}$ pour $k > k_c$, on a $c_{g i}(k_a) < V$ et $c_{g i}(k_b) > V$. En examinant le signe de la vitesse de groupe $\underline{c}_g(\underline{k}) = [-c_{g i}(k) + V] \underline{e}_x$, on voit que les ondes longues de longueur d'onde $L_a = 2\pi/k_a = 3.3 \text{ cm}$ sont émises vers la droite (à l'aval de l'obstacle) tandis que les ondes courtes, capillaires, de longueur d'onde $L_b = 2\pi/k_b = 8 \text{ mm}$ sont émises vers la gauche (à l'amont de l'obstacle).

[1,5 point]

TROISIÈME PARTIE : Réfraction de la houle par un courant (8 points)

15) Au large, la vitesse $A(x)$ est nulle et la profondeur infinie. La relation de dispersion s'écrit donc $\omega = \sqrt{g k_l}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k_l = \frac{2\pi}{L_l}$. On a donc $L_l = \frac{g T^2}{2\pi} = 160 \text{ m}$. La vitesse de groupe est $c_{gl} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_l}} = \frac{g}{2\omega} = \frac{g T}{4\pi} = 8 \text{ m/s}$.

[1 point]

16) La pulsation étant conservée le long des rayons, on peut écrire $\omega = \sqrt{g k(x) \text{th} [k(x) h_f(x)]}$ où $k(x) \underline{e}_x$ est le vecteur d'onde local. On a donc $h_f = \frac{1}{k} \text{argth} \left(\frac{\omega^2}{g k} \right)$. En définissant $L(x) = \frac{2\pi}{k(x)}$, on peut écrire $h_f = \frac{L}{2\pi} \text{argth} \left(\frac{2\pi L}{g T^2} \right)$. La lecture du graphe de la figure 6, pour $q = 0$, permet de déterminer que $L_0 = 43 \text{ m}$ pour $h_f = h_0 = 2 \text{ m}$.

[1 point]

17) Comme $L_0/h_0 = 22 > 20$, on peut considérer que la rivière est peu profonde. La conservation de l'énergie le long des rayons entraîne que $c_{gl} H_l^2 = c_0 H_0^2$ où H_0 est la hauteur de la houle pour $x \geq 0$ et $c_0 = \sqrt{g h_0} = 4.5 \text{ m/s}$. On a donc $H_0 = H_l \sqrt{\frac{c_{gl}}{c_0}} = 1 \text{ m}$. Comme $H_0/h_0 = 0.53 < 0.78$, la houle ne déferle pas.

[1 point]

18) La puissance est $P_0 = \frac{1}{8} \rho g H_l^2 c_{gl} L_y = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 c_0 L_y = 63 \text{ kW}$.

[1 point]

19) Seules les ondes répondant à la relation de dispersion $\Omega_+(\underline{k}, \underline{x})$ ont une vitesse de groupe positive qui leur permet de se rapprocher de la côte. Cette vitesse de groupe est $\underline{c}_g(k, x) = \underline{c}_{gi}(k, x) \underline{e}_x - A(x) \underline{e}_x$.

[0,5 point]

20) Comme ω est invariant le long des rayons, on doit avoir

$$\omega = \Omega_-(\underline{k}, \underline{x}) = \sqrt{g k(x) \operatorname{th}[k(x) h_f(x)]} - A(x) k(x). \quad (8)$$

Comme $A(x) = q/h_f(x)$, $L(x) = 2\pi/k(x)$ et $\omega = 2\pi/T$, on en déduit

$$h_f(x) = \frac{L(x)}{2\pi} \operatorname{argth} \left\{ \frac{2\pi L(x)}{g T^2} \left[1 + \frac{q T}{L(x) h_f(x)} \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

Le graphe de la figure 6 permet de déterminer que $L_4 = 22$ m lorsque $h_f(0) = h_0 = 2$ m.

[1 point]

21) La propagation de l'énergie le long d'un rayon est décrite par l'équation $\dot{x} = c_g[k(x), x] = c_{gi}[k(x), x] - A(x)$. Cette trajectoire de rayon est stoppée lorsque $c_g[k(x_c), x_c] = 0$. Cette situation correspond au minimum de la courbe $h(L)$ de la figure 6 pour $q = 6$ m²/s (on peut, par exemple, invoquer le théorème des fonctions implicites). La lecture de ce graphe conduit $L_c = 11$ m et $h_c = 2.1$ m. Cette profondeur $h_c = h_f(x_c) = h_0 - \beta x_c$ correspond aux point $x_c = -(h_c - h_0)/\beta = -10$ m.

[1 point]

22) En notant $k_c = k(x_c) = 2\pi/L_c$, on peut écrire $c_g[k_c, x_c] = 0$, ce qui entraîne $c_{gi}[k_c, x_c] = A(x_c) = q/h_c = 3$ m/s. Comme $\omega = \Omega_i(k_c, x_c) - A(x_c) k_c$, on a $c_{\varphi i}(k_c, x_c) = \omega/k_c + A(x_c) = L_c/T + q/h_c = 4$ m/s. La vitesse de phase des crêtes du paquet d'onde est plus grande que sa vitesse de groupe, ce qui est normal pour les ondes de surface. Alors que l'enveloppe du paquet d'ondes est immobile en $x = x_c$, les crêtes du paquet d'ondes dépassent ce point mais deviennent évanescentes pour $x \geq x_c$.

[1,5 point]

CONTRÔLE du vendredi 26 mars 2010

Tous documents autorisés. Durée : 3h.

Sujet proposé par O. THUAL

EXERCICE 1 : Un pipeline pour la Mer Morte (4 points)

La surface libre de la Mer Morte est située à une altitude $Z_{mor} = -400$ m dans un repère où $Z_{rou} = 0$ m est l'altitude de la surface libre de la Mer Rouge. On souhaite envisager la construction d'un pipeline connectant ces deux mers, d'une longueur $d = 200$ km, de diamètre $D = 3$ m et constitué d'un matériau inoxydable dont la taille caractéristique des rugosités est $k_s = 1$ mm.

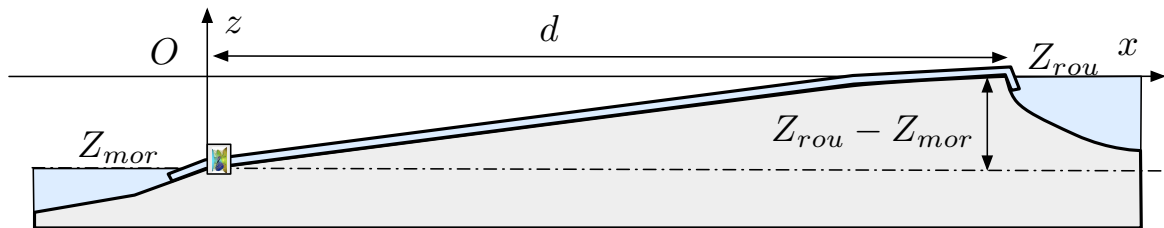


Figure 1: Pipeline reliant la Mer Rouge et la Mer Morte.

On suppose que $\nu = 10^{-6}$ m²/s est la viscosité dynamique de l'eau de mer. On supposera que $\alpha = 1$ dans l'expression de la charge hydraulique (profils de vitesses plats) et on pourra prendre $g = 10$ m/s² pour la gravité.

- 1) Calculer la charge H_{rou} de la Mer Rouge et la charge H_{mor} de la Mer Morte en négligeant la variation de la pression atmosphérique $p_a = 10^5$ Pa et de la masse volumique $\rho = 1\,000$ kg/m³ entre les deux mers. Que vaut $\Delta Z = H_{rou} - H_{mor}$?
- 2) En utilisant le diagramme de Moody (voir figure 2), calculer le débit Q_{max} de l'écoulement gravitaire lorsque le pipeline met directement en contact les deux mers. Vérifier que le régime de l'écoulement est rugueux.

On construit maintenant, sur les berges de la Mer Morte, une usine hydroélectrique que l'on alimente avec le pipeline. Cette usine délivre une puissance $P = \rho g \left(\Delta H - K_g \frac{U^2}{2g} \right) Q$ où ΔH est la différence de charge entre l'amont et l'aval de l'usine, Q le débit turbiné, U la vitesse dans le pipeline, et K_g un coefficient de perte de charge singulière dépendant des turbines utilisées. On suppose $K_g = 400$.

- 3) En supposant que le régime reste rugueux, exprimer, en fonction de ρ , D , ΔZ , λ , d et K_g , le débit Q_{opt} qui optimise la puissance électrique fournie par l'usine. Exprimer de même la puissance correspondante P_{opt} .
- 4) Donner les valeurs numériques de Q_{opt} et P_{opt} . Vérifier que l'on peut effectivement considérer que l'écoulement est rugueux.

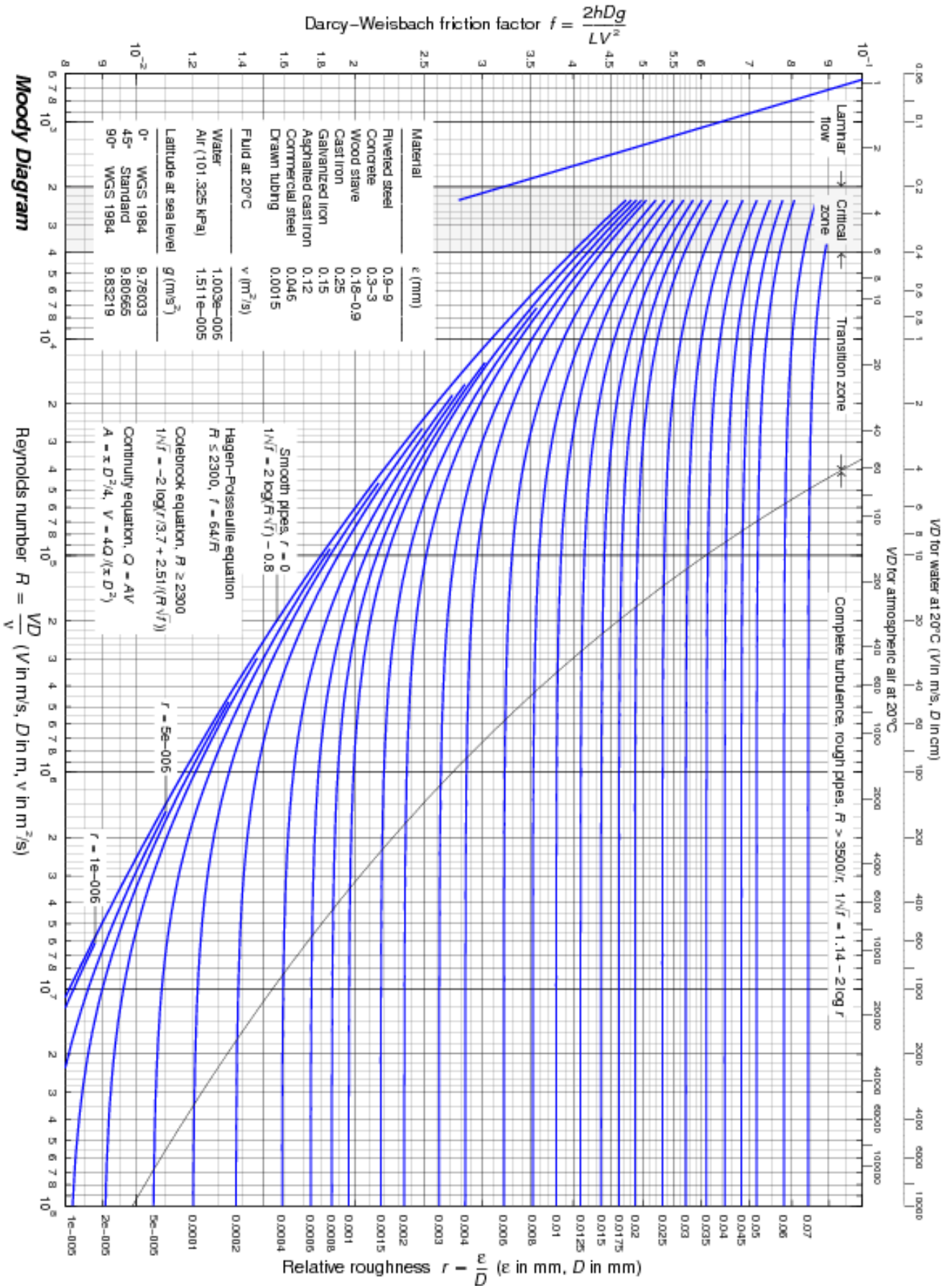


Figure 2: Diagramme de Moody avec les notations $f = \lambda$, $V = U$, $h = \Delta Z$, $D = D_H$, $\epsilon = k_s$, $L = d$, $R = Re$ et $r = Ru$.

EXERCICE 2 : Bassin circulaire à vagues (4 points)

On considère un bassin circulaire de centre O , de rayon R et de profondeur $h_f(r) = h_m - \alpha r$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la coordonnée radiale dans le plan horizontal Oxy . Un batteur à houle, situé en son centre, émet une onde de surface circulaire avec une pulsation constante. On suppose que le bord circulaire du bassin, en $r = R$, absorbe toute l'énergie des vagues et qu'il n'y a donc pas de réflexion d'ondes. On suppose que la longueur d'onde des vagues est grande devant h_m (milieu peu profond) et que $\alpha \ll 1$ (milieu lentement variable).

- 5) On note H_R la hauteur des vagues en $r = R$. Exprimer, en fonction de H_R , α , R , ρ , h_m et g , la puissance P absorbée par le bord circulaire en Watts.
- 6) En $r = R_* < R$, on mesure une hauteur de vagues égale à H_* . Exprimer la hauteur H_R des vagues en $r = R$ en fonction de H_* et des paramètres du problème. Donner sa valeur numérique dans le cas $h_m = 1$ m, $\alpha = 0.1$, $R_* = 2$ m, $R = 9.8$ m et $H_* = 1$ cm.

EXERCICE 3 : Mascaret du Mont Saint-Michel (4 points)

Lorsque le coefficient de la marée est suffisamment fort (vives-eaux), on observe, dans la baie du Mont Saint-Michel, un mascaret qui remonte la rivière du Couesnon. On modélise cette rivière par un canal sans pente à section rectangulaire de largeur $L = 50$ m considérée comme grande devant la profondeur. On suppose que $h_0 = 40$ cm et $Q_0 = 10$ m³/s sont respectivement la hauteur et le débit de cette rivière à marée basse. On prendra $g = 9.81$ m²/s pour le champ de gravité.

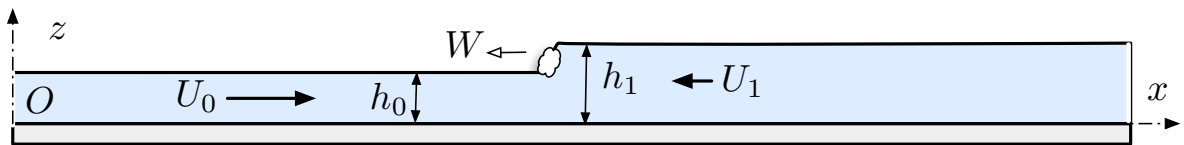


Figure 3: Mascaret de grande marée remontant la rivière du Couesnon.

- 7) Calculer, à marée basse, le débit linéique $q_0 = Q_0/L$ et la vitesse U_0 . L'écoulement est-il fluvial ou torrentiel ?
- 8) On note respectivement h_1 et U_1 la hauteur et la vitesse de l'écoulement à l'aval d'un mascaret qui remonte la rivière avec une vitesse W négative. Écrire les relations de saut qui relient h_0 , U_0 , h_1 , U_1 et W . En déduire que $\mathcal{I}(q_W, h_0) = \mathcal{I}(q_W, h_1)$ où $q_W = h_0(U_0 - W)$ et $\mathcal{I}(q, h) = q^2/h + gh^2/2$ est la fonction impulsion.
- 9) Avec un chronomètre, on mesure la vitesse de propagation $W = -2.5$ m/s. En déduire, à l'aide de l'abaque de la figure 4, la hauteur h_1 et la vitesse U_1 de l'écoulement de marée haute situé à droite du mascaret.

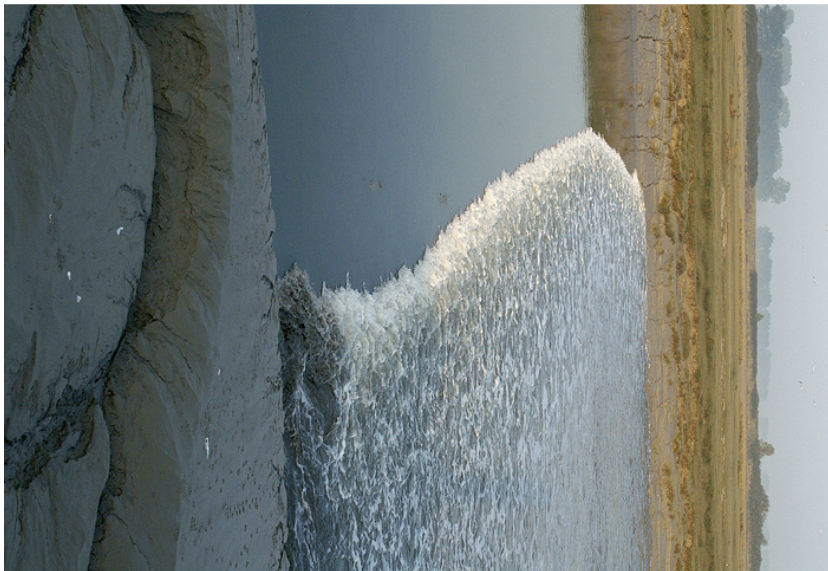
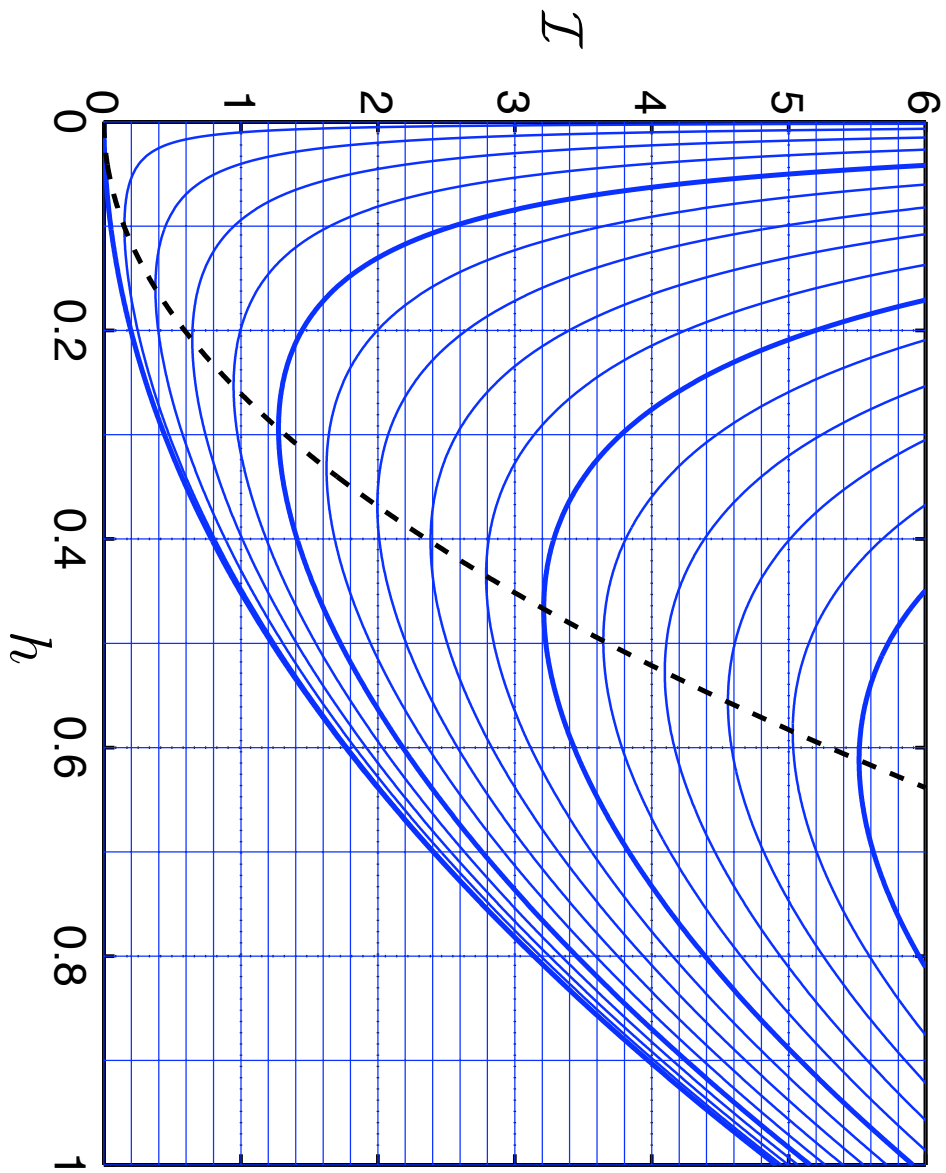


Figure 4: Fonction impulsion $\mathcal{I}(q, h)$. Unités de h en m. Intervalle entre les iso- q de $0.1 \text{ m}^2/\text{s}$.

EXERCICE 4 : Partage des eaux (8 points)

On souhaite mettre en place un système hydraulique simple permettant de partager un débit d'eau en deux sous-débites dans une proportion contrôlable. On modélise le système par un canal dont le fond est schématisé sur la figure 5 et dont la largeur L dans la direction y est constante. On note $q = Q/L$ le débit linéique associé à un débit $Q \geq 0$. On note respectivement U et h la vitesse moyenne et la hauteur d'eau en un point quelconque. Les valeurs numériques demandées pourront être données avec la précision d'une lecture graphique des abaques.

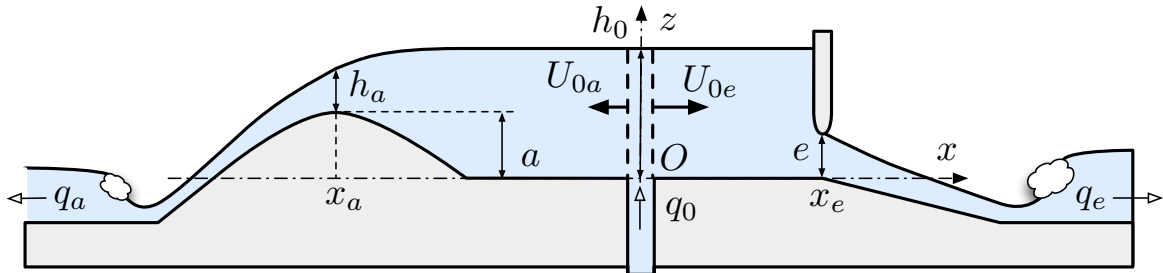


Figure 5: Géométrie du canal de partage des eaux.

On injecte un débit linéique constant $q_0 > 0$ au centre du canal en $x = 0$. Une partie $q_a \geq 0$ de ce débit linéique franchit un obstacle de hauteur $a = 36$ cm dont le sommet est situé en $x = x_a < 0$ tandis l'autre partie $q_e \geq 0$ coule sous une vanne de fond dénoyée d'ouverture e située en $x = x_e > 0$. On suppose que $|x_a|$ et x_e suffisamment grands et les pentes suffisamment petites pour que l'écoulement puisse être considéré comme graduellement varié. En $x = 0$, on suppose que $h = h_0$ et que la vitesse U est discontinue en $x = 0$ avec $U = U_{0a} \leq 0$ pour $x = 0^-$ et $U = U_{0e} \geq 0$ pour $x = 0^+$ avec $q_a = h_0 |U_{0a}|$, $q_e = h_0 U_{0e}$ et $q_0 = q_a + q_e$.

On cherche à exprimer le rapport $X = q_a/q_0$ en fonction de l'ouverture réglable e . On suppose que l'écoulement est supercritique sur les deux rampes situées respectivement à gauche du sommet de l'obstacle et à droite de la vanne, et sous-critique pour $x \in]x_a, x_e[$. On néglige toutes les pertes de charges dues au frottement sur les parois. On prendra $g = 9.81$ m/s² pour le champ de gravité.

- 10) D'où provient la relation $\frac{dh}{dx} = I(1 - Fr^2)^{-1}$ où I est la pente du fond et $Fr = |U|/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude ? Justifier la transition fluviale à torrentielle au sommet de l'obstacle en $x = x_a$. En déduire l'expression de q_a en fonction de h_a et g .
- 11) Montrer que la charge spécifique $\mathcal{E}(q_a, h) = h + q_a^2/(2gh^2)$ est minimum en $x = x_a$ sur l'intervalle $[x_a, 0[$ et simplifier son expression en ce point. En déduire que $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3h_a/2$.
- 12) On suppose que la vanne est immergée. Que peut-on dire de la charge spécifique $\mathcal{E}(q_e, h)$ pour $h = h_0$ et $h = e$? Exprimer le débit linéique q_e en fonction de g , h_0 et e .
- 13) Dans un premier temps, on ferme complètement la vanne, ce qui s'écrit $e = 0$ cm, et l'on mesure $h_a = 16$ cm. Déterminer, à l'aide de l'abaque de la figure 6, les valeurs de $q_0 = q_a$ et h_0 . Représenter cette situation sur un schéma à la manière de de la figure 5.

- 14) On augmente le débit q_0 et on suppose maintenant que l'ouverture de la vanne est $e = 15$ cm et que $h_0 = 30$ cm. Déterminer, à l'aide de l'abaque de la figure 6, la valeur de $q_e = q_0$. Représenter cette situation sur un schéma à la manière de de la figure 5.
- 15) On augmente encore le débit q_0 et on ouvre la vanne de telle sorte que $e = 20$ cm. On mesure alors $h_a = 16$ cm. Sur l'abaque de la figure 6, tracer les points A_0 et A correspondant respectivement aux hauteurs h_0 et h_a sur la courbe d'iso-débit linéique $q = q_a$ ainsi que les points E_0 et E correspondant respectivement aux hauteurs h_0 et e sur la courbe d'iso-débit linéique $q = q_e$. En déduire les valeurs de q_0 et X .
- 16) On augmente le débit q_0 et on ouvre la vanne de telle sorte qu'elle ne soit plus en contact avec l'eau. On mesure alors $h_a = 10$ cm. En déduire les valeurs de q_0 et X . Représenter cette situation sur un schéma à la manière de de la figure 5.
- 17) On souhaite maintenant que le système puisse répartir, dans n'importe quelle proportion $X \in [0, 1]$, les débits linéiques q_0 inférieurs ou égaux à $q_{0max} = 1.5$ m²/s. Quelle taille minimale a_{min} doit-on choisir pour dimensionner l'obstacle ? Justifier le choix de $a = a_{min}$.

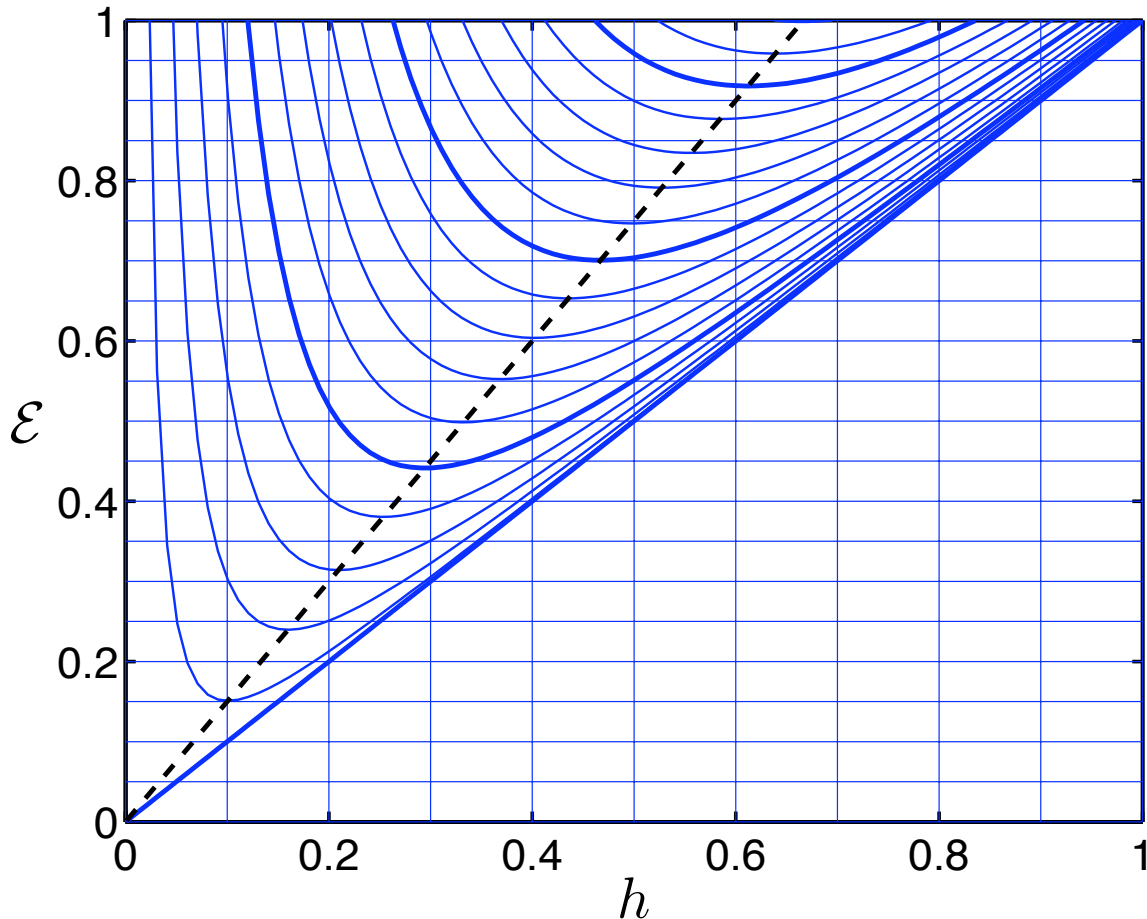


Figure 6: Charge spécifique $\mathcal{E}(q, h)$. Unités de h en m. Intervalle entre les iso- q de 0.1 m²/s. Courbe pointillée : minima de \mathcal{E} .

CORRIGÉ

EXERCICE 1 : Un pipeline pour la Mer Morte (4 points)

1) On a $H_{med} = \frac{p_a}{\rho g} + Z_{med} = 10$ m et $H_{mor} = \frac{p_a}{\rho g} + Z_{mor} = -390$ m. On a $\Delta Z = 400$ m.
[.5 point]

2) La rugosité est caractérisée par le nombre sans dimension $Ru = k_s/D = 3.3 \cdot 10^{-4}$ puisque le diamètre hydraulique D_H est égal à D dans le cas d'un cylindre de section circulaire. En supposant le régime rugueux, la lecture du diagramme de Moody conduit à la valeur $\lambda = 0.015$ du coefficient de frottement. Cette valeur est proche de la valeur donnée par la loi rugueuse $\lambda = [2.0 \log_{10}(3.7/Ru)]^{-2} = 0.0156$. Comme le terme de vitesse $\alpha U^2/(2g)$ est le même aux deux extrémités du tuyau, la perte de charge est $H_{rou} - H_{mor} = \Delta Z$ avec $\Delta Z = Z_{med} - Z_{mor}$. Elle est égale à Jd avec $J = \lambda \frac{U_{max}^2}{2g D_H}$ avec $D_H = D$. On a donc $U_{max}^2 = (2g \Delta Z D)/(\lambda d)$ d'où $U_{max} = 2.8$ m/s avec un nombre de Reynolds $Re = U_{max} D/\nu = 8.5 \cdot 10^6$, qui montre, comme on peut le voir sur le diagramme de Moody que l'écoulement est en régime rugueux. Le débit est $Q_{max} = U_{max} \pi D^2/4 = 20$ m³/s.

[1 point]

3) La charge en amont de l'usine est $H_{rou} - Jd$ où $J = \lambda U^2/(2g D)$ est la perte de charge linéique due au frottement sur les parois du pipeline. On a donc $\Delta H = H_{rou} - Jd - H_{mor} = \Delta Z - \lambda U^2 d/(2g D)$ et donc $P = \rho \frac{\pi D^2}{4} \left[\Delta Z - \frac{1}{2g} (\lambda d/D + K_g) U^2 \right] U$. La puissance est optimale pour $U_{opt} = \sqrt{\frac{2g \Delta Z}{3(\lambda d/D + K_g)}}$. Le débit correspondant est $Q_{opt} = \frac{\pi D^2}{4} U_{opt} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g \Delta Z}{3(\lambda d/D + K_g)}}$. La puissance optimale est alors $P_{opt} = \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{2 \Delta Z}{3} \sqrt{\frac{2g \Delta Z}{3(\lambda d/D + K_g)}}$.

[1.5 point]

4) On obtient $U_{opt} = \sqrt{\frac{2g \Delta Z}{3(\lambda d/D + K_g)}} = 1.4$ m/s, $Q_{opt} = U_{opt} \pi D^2/4 = 9.8$ m³/s et $P_{opt} = 26$ MW. Comme le nombre de Reynolds vaut $Re = U_{opt} D/\nu = 4.1 \cdot 10^6$, on voit, sur le diagramme de Moody, que la valeur choisie pour λ en supposant que l'écoulement était rugueux est correcte.

[1 point]

EXERCICE 2 : Bassin circulaire à vagues (4 points)

5) Comme $W = \frac{1}{8} \rho g H^2$ est l'énergie moyenne surfacique des vagues, $c_g = \sqrt{gh_f}$ la vitesse de groupe et $I = c_g W$ le flux linéique d'énergie, la puissance absorbée le long du cercle de périmètre $2\pi R$ est donc $P = 2\pi R I = 2\pi R c_g W = \frac{1}{4} \pi R \sqrt{g(h_m - \alpha R^2)} \rho g H_R^2$.

[1.5 point]

6) Comme la puissance qui traverse le cercle de rayon R_* est aussi égale à P , on peut écrire $R_* \sqrt{g h_f(R_*)} H_*^2 = R \sqrt{g h_f(R)} H_R^2$ et donc $H_R^2 = H_*^2 (R_*/R) (\sqrt{h_m - \alpha R_*}/\sqrt{h_m - \alpha R}) = 1.3 H_*^2$. On en déduit que $H_R \sim 1.1$ cm. Comme $H_R < 0.78 h_f(R) = 1.6$ cm, les vagues n'ont pas encore déferlé.

[2.5 points]

EXERCICE 3 : Mascaret du Mont Saint-Michel (4 points)

7) On a $q_0 = Q_0/L = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ et $U_0 = q_0/h_0 = 0.5 \text{ m/s}$. Comme le nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{gh_0} = 0.25$ est plus petit que 1, l'écoulement est fluvial.

[1 point]

8) Les relations de saut s'écrivent $h_0(U_0 - W) = h_1(U_1 - W)$ pour la conservation de la masse et $h_0 U_0(U_0 - W) + \frac{1}{2} g h_0^2 = h_1 U_1(U_1 - W) + \frac{1}{2} g h_1^2$ pour la conservation de la quantité de mouvement. En éliminant $U_0 = W + q_W/h_0$ et $U_1 = W + q_W/h_1$, on obtient $q_W^2/h_0 + \frac{1}{2} g h_0^2 + h_0(U_0 - W)W = q_W^2/h_1 + \frac{1}{2} g h_1^2 + h_1(U_1 - W)W$. En utilisant la première relation de saut, cette dernière s'écrit bien $\mathcal{I}(q_W, h_0) = \mathcal{I}(q_W, h_1)$.

[2 points]

9) On calcule $q_W = h_0(U_0 - W) = 1.2 \text{ m}^2/\text{s}$. À l'aide de l'abaque, on trouve que la hauteur $h_1 = 70 \text{ cm}$ correspond à la même impulsion. On en déduit $U_1 = W + q_W/h_1 = -0.8 \text{ m/s}$.

[1 point]

EXERCICE 4 : Partage des eaux (8 points)

10) En négligeant la perte de charge, la conservation de la charge conduit à la relation indiquée. Comme la pente change de signe au sommet de l'obstacle et que le signe de $\frac{dh}{dx}$ reste inchangé, le nombre de Froude est supérieur à 1 (fluvial) à droite du sommet et inférieur à 1 (torrentiel) à gauche. On en déduit que h_a est la hauteur critique associée au débit linéique $q_a = \sqrt{g h_a^3}$.

[1 point]

11) Comme la charge spécifique est minimum pour la hauteur critique et vaut la hauteur critique multipliée par 3/2, on a $\mathcal{E}(q_e, h_a) = 3 h_a/2$. Comme la charge $H = \frac{p_a}{\rho g} + Z_f + \mathcal{E}(q_e, h)$ est constante sur l'intervalle $x \in [x_a, 0]$, on peut écrire $\mathcal{E}(q_e, h_0) = a + \mathcal{E}(q_e, h_a) = a + 3 h_a/2$.

[1 point]

12) Comme il n'y a pas de perte de charge au passage de la vanne immergée, on a $\mathcal{E}(q_e, h_0) = \mathcal{E}(q_e, e)$. On en déduit $q_e = e h_0 \sqrt{2g/(h_0 + e)}$.

[1 point]

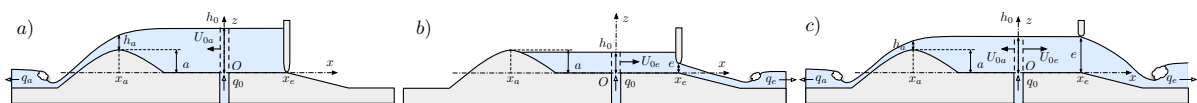


Figure 7: a) Cas $e = 0 \text{ cm}$ et $h_a = 16 \text{ cm}$. b) Cas $h_0 = 30 \text{ cm}$ et $e = 15 \text{ cm}$. c) Cas sans vanne avec $h_a = 10 \text{ cm}$.

13) Puisque $\mathcal{E}(q_a, h)$ est minimum pour la hauteur critique $h_a = 16 \text{ cm}$, on lit $q_a = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ sur l'abaque (point A sur la figure 8a). Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3 h_a/2 = 60 \text{ cm}$, on lit $h_0 \sim 60 \text{ cm}$ (point A₀ sur la figure 8a). Cette situation est représentée sur la figure 7a.

[1 point]

14) On a $q_a = 0$ car $h_0 < a$. Comme $\mathcal{E}(q_e, h_0) = \mathcal{E}(q_e, e)$, on lit sur le graphique (points B et B₀ sur la figure 8b) que $q_e = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$. Cette situation est représentée sur la figure 7b.

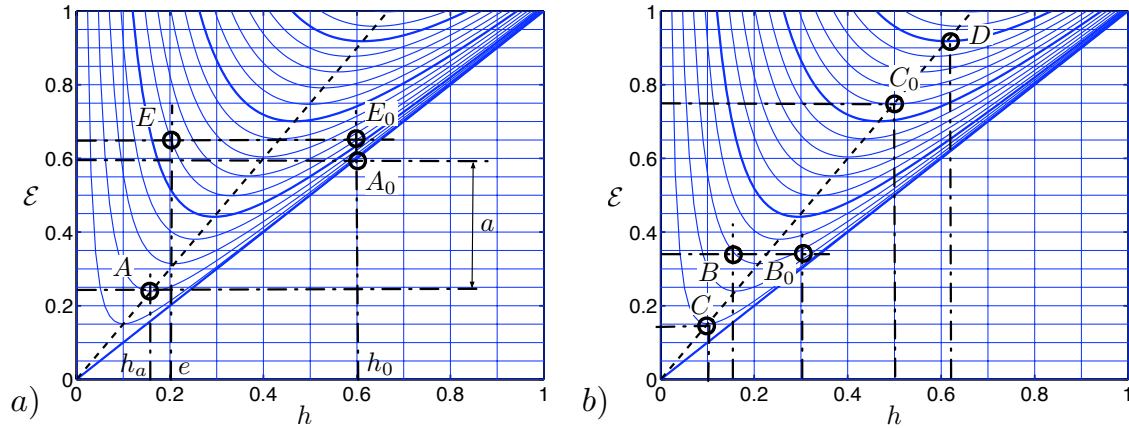


Figure 8: a) Tracé des points A , A_0 , E et E_0 . b) Tracé des points B , B_0 , C et C_0 .

[1 point]

15) Puisque le minimum de $\mathcal{E}(q_a, h)$ à q_a fixé est la hauteur critique $h_a = 25$ cm, on lit $q_a = 0.2$ m²/s sur le graphique. Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = \mathcal{E}(q_a, h_a) + a = 3h_a/2 + a = 60$ cm, on lit sur le graphique $h_0 \sim 60$ cm et on trace les points A_0 et A comme indiqué sur la figure 8a. Comme h_0 et e sont des hauteurs conjuguées pour la charge spécifique, on calcule ou on lit sur le graphique que $q_e = 0.6$ m²/s et on trace les points E_0 et E comme indiqué sur la figure 8a. On en déduit que $q_0 = q_a + q_e = 0.8$ m²/s et $X = q_a/q_0 = 0.25$.

[1 point]

16) Comme h_a est la hauteur critique associée au débit q_a on lit sur le graphique que $q_a = 0.1$ m²/s (point C sur la figure 8b). Comme $\mathcal{E}(q_a, h_0) = a + 3h_a/2 = 51$ cm on lit $h_0 = 50$ cm. Comme $e = h_0$ est la hauteur critique associée au débit q_e on lit sur le graphique que $q_e = 1.1$ m²/s (point C_0 sur la figure 8b). On en déduit $q_0 = q_e + q_a = 1.2$ m²/s et $X = q_a/q_0 = 0.08$. Cette situation est représentée sur la figure 7c.

[1 point]

17) Pour pouvoir contrôler toutes les valeurs de X , il faut que $\mu \leq 1$ pour $q_0 = q_{0max}$. Il faut donc $a \geq a_{min}$ avec $a_{min} = q_{0max}^{2/3} g^{-1/3} = 62$ cm (point D sur la figure 8b). Le choix $a = a_{min}$ permet une meilleure manoeuvrabilité du dispositif (étude paramétrique non présentée ici).

[1 point]