

# Les équations de Saint-Venant

SIESTE GLOBC du 3 avril

Olivier THUAL, 2 avril 2008



# Objectifs du cours "Sciences de l'Eau et Environnement"

Appréhender plusieurs domaines d'application

Hydraulique, hydrologie souterraine, hydrodynamique marine, ...

En maîtriser les concepts de base

Transport turbulent, charge hydraulique, propagation d'ondes, ...

## Plan du cours

- 1 Couches limites turbulentes
- 2 Hydraulique stationnaire
- 3 Intumescences et ressauts
- 4 Ondes de surface
- 5 Réfraction de la houle
- 6 Marées et seiches



# Exemples de conséquences du réchauffement climatique

Augmentation des crues



Érosion accrue des côtes



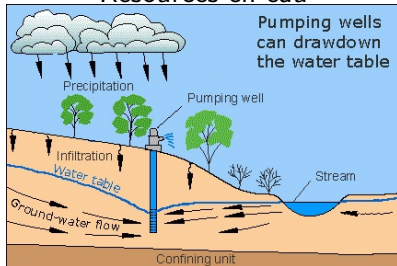
Manque de ressources en eau



... etc.

# Métiers de l'environnement et mécanique des fluides

## Resources en eau



## Énergies renouvelables



## Aménagements hydrauliques

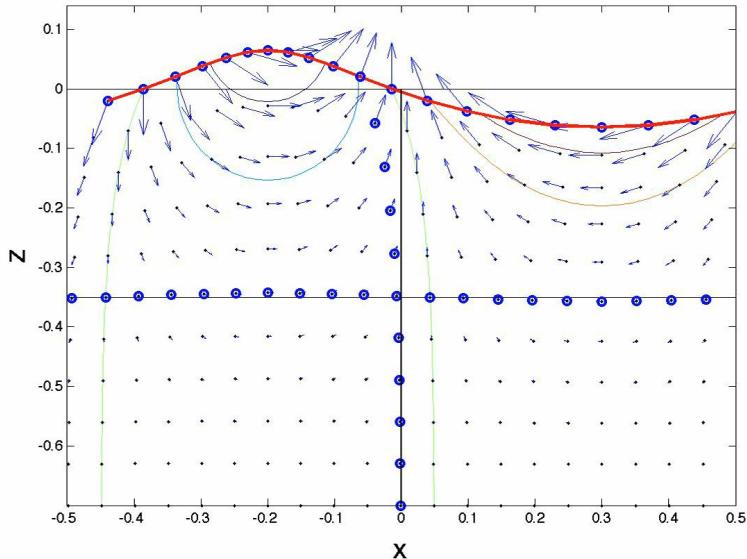


## Érosion côtière

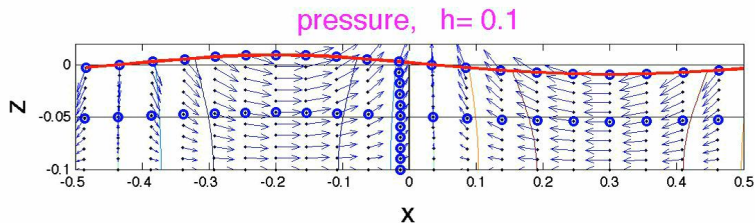


# Ondes de surface

pressure,  $h = 0.7$



# Ondes de surface en faible profondeur



# Les équations de Saint-Venant

Modélisation des écoulements à surface libre à faible profondeur

Exemples d'écoulements en eaux peu profondes :

Rivières et canaux, mascaret, marées, seiches, tsunamis et ...  
dynamique horizontale des modes verticaux de l'océan.

Dérivation des équations de Saint-Venant :

Développements asymptotiques en faible profondeur et  
paramétrisation du frottement.

Ondes, caractéristiques et chocs :

Ondes linéaires ou non linéaire, ondes de détente ou de  
compression, ressauts hydrauliques.

# Écoulement d'une rivière





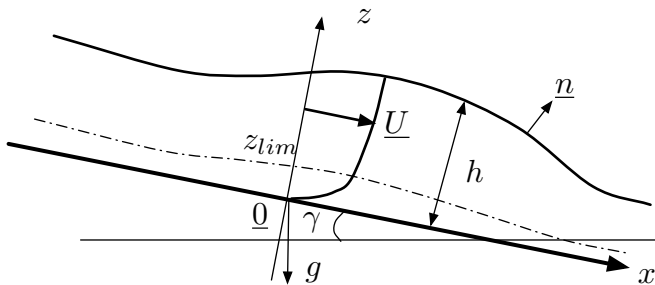
# Rivière en crue



# Dérivation des équations de Saint-Venant 1D

## Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial x} + g \sin \gamma + \nu_t \Delta u \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_t}{\partial z} - g \cos \gamma + \nu_t \Delta w\end{aligned}$$

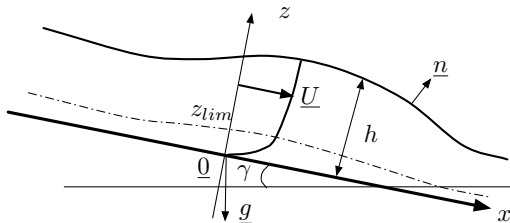


# Conditions aux limites

Conditions aux limites à la surface  $z = h(x, t)$

$$\text{cinématiques : } \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w$$

$$\text{dynamiques : } \underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{\underline{n}} = -p_{atm} \underline{\underline{n}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\sigma}}_t = -p_t \underline{\underline{1}} + 2\rho\nu_t \underline{\underline{d}}$$



Modélisation au fond  $z = 0$

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{e}}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}_t \cdot \underline{\underline{e}}_z = \tau_*$$

# Adimensionnalisation des équations

## Choix d'unités

$$x = L_0 x^+, \quad z = h_0 z^+, \quad t = \frac{L_0}{U_0} t^+,$$
$$u = U_0 u^+, \quad w = U_0 \frac{h_0}{L_0} w^+ \quad \text{et} \quad p_t = \rho g' h_0 p^+$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial w^+}{\partial z^+} = 0$$
$$\frac{\partial u^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{\tan \gamma}{\epsilon Fr^2} + \frac{1}{\epsilon Rt} \Delta^+ u^+$$
$$\epsilon^2 \left( \frac{\partial w^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial w^+}{\partial x^+} + w^+ \frac{\partial w^+}{\partial z^+} \right) = -\frac{1}{Fr^2} \frac{\partial p^+}{\partial z^+} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{\epsilon}{Rt} \Delta^+ w^+$$
$$\text{avec} \quad \Delta^+ = \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^{+2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{+2}}$$

$$\epsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g' h_0}}, \quad Rt = \frac{h_0 U_0}{\nu_t} \quad \text{et} \quad \tan \gamma$$

# Tableau des approximations

	$\tan \gamma \ll \epsilon$	$\tan \gamma = O(\epsilon)$	$\tan \gamma = O(1)$
$Fr^2 = O(1)$			
$\frac{1}{Rt} \ll \epsilon$	Saint-Venant <b>sans pente ni frottement</b>	Saint-Venant sans frottement	
$\frac{1}{Rt} = O(\epsilon)$	Saint-Venant sans pente	Équations de <b>Saint-Venant</b> complètes	
$\frac{1}{Rt} = O(1)$			<b>Ondes de crues</b>
$Fr^2 = O(\epsilon)$			
$\frac{1}{Rt} = O(1)$		<b>Ondes de crues diffusantes</b>	

Pour toutes ces approximations :

$$\frac{\partial p^+}{\partial z^+} = -1 \quad \text{avec} \quad p^+ = p_{atm}^+ \quad \text{pour} \quad z^+ = h^+(x^+, t^+).$$

La pression turbulente est hydrostatique

$$p_t(x, z, t) = p_{atm} - \rho g' [z - h(x, t)]$$

Autres conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = w & \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \quad \text{pour} \quad z = h \\ w = 0 & \quad \text{et} \quad \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_* & \quad \text{pour} \quad z = 0 \end{aligned}$$

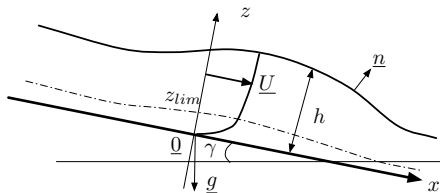
# Intégration sur la verticale

Conservation de la masse  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  intégrée en  $z$

$$\frac{\partial}{\partial x} (h U) + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz$$

Conservation de la quantité de mouvement intégrée en  $z$

$$\frac{\partial (U h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dz + g' h \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \gamma - \frac{\tau_*}{\rho}$$



Paramétrisations :

$$\int_0^h u^2 dz = \alpha U^2 h \quad \text{avec} \quad \alpha = 1$$

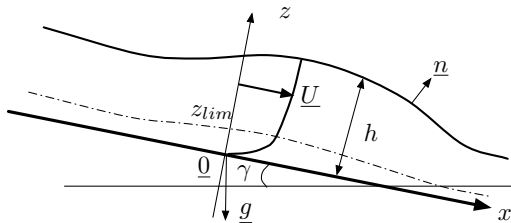
$$\tau_* = \frac{1}{2} C_f(h, U) \rho U |U|$$

# Forme finale de l'approximation des faibles profondeurs

Équations de Saint-Venant ( $l = \sin \gamma$ ,  $g' = g \cos \gamma$ )

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x} + g l - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h}$$



Manning-Strickler

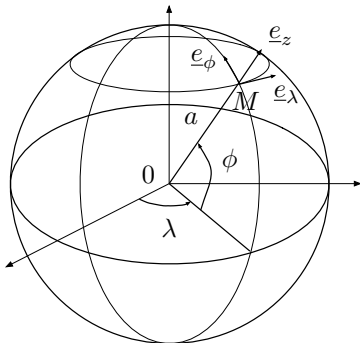
$$C_f(h) = \frac{2g}{K_s^2 h^{1/3}}$$
$$= \Phi_{MS} \left( \frac{k_s}{h} \right)^{1/3}$$



# Généralisation au cas 2D, forcé et en rotation

Équations de Saint-Venant linéaires sur la sphère :

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + f \underline{e}_z \wedge \underline{U} = -\text{grad} (g \eta + V) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div} (h_f \underline{U}) = 0$$



Notations :

Vitesse horizontale :  $\underline{U}(\lambda, \phi, t)$

Profondeur de la bathymétrie :  $h_f(\lambda, \phi)$

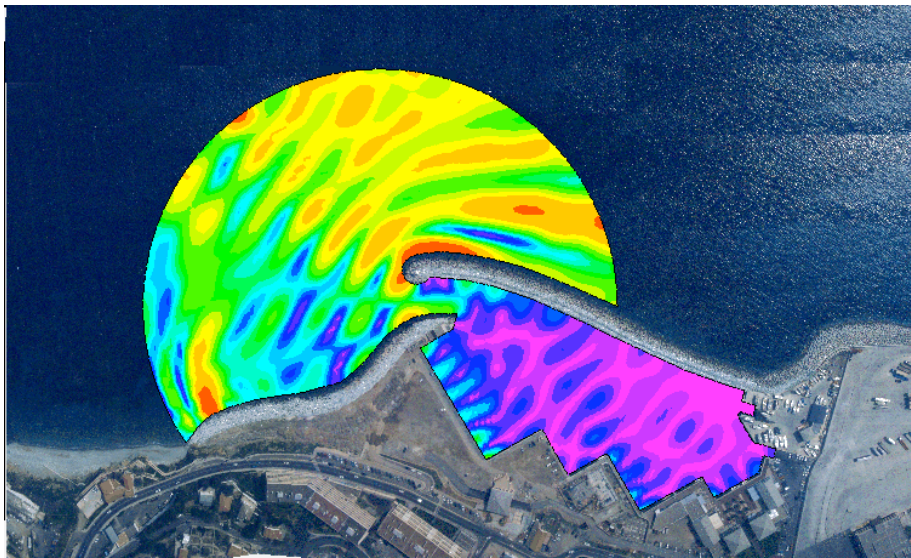
Élévation de la surface libre :  $\eta(\lambda, \phi, t)$

Paramètre de Coriolis :  $f(\phi) = 2\Omega \sin \phi$

Potentiel des marées :

$$V(\lambda, \phi, t) = \sum_n \sum_l \widehat{V}_{l,n}(\phi) e^{i(2\pi \frac{\lambda}{l} - \omega_n t)}$$

# Oscillations et seiches dans un port



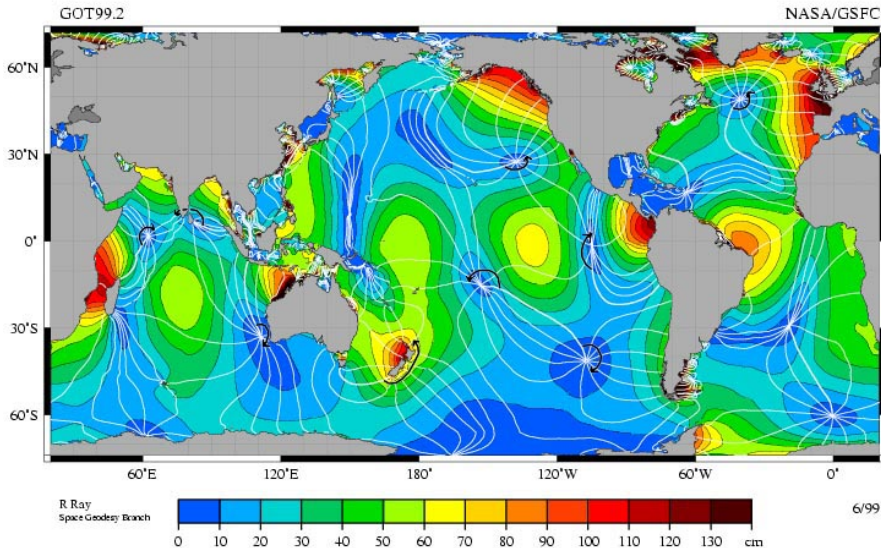
# Tsunamis



# Usine marémotrice



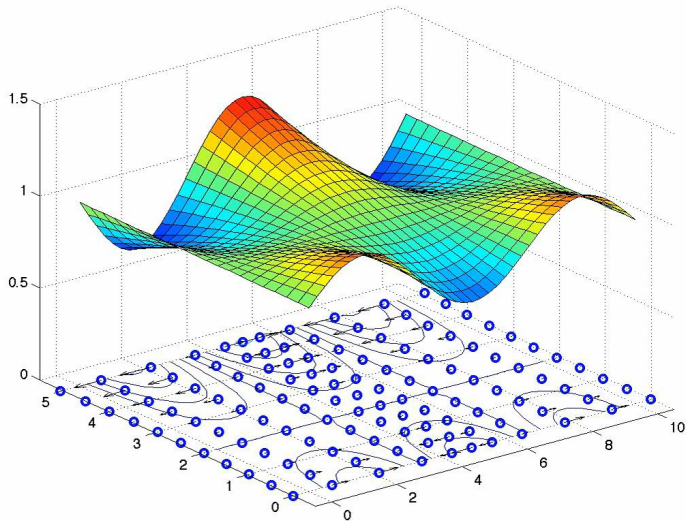
# Onde M2 de la marée



# Points amphidromiques



# Amphidromie de Kelvin

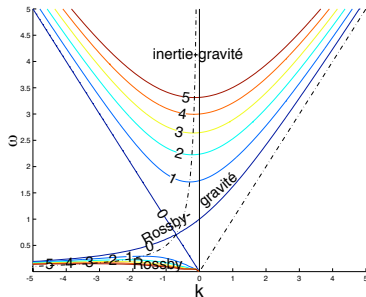
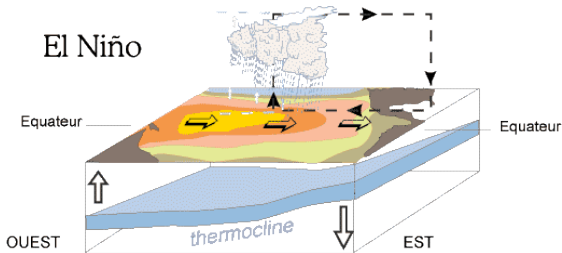


# Ondes de Kelvin de bord





# Dynamique de la thermocline



## Modes verticaux et “shallow water equations”

La décomposition en modes verticaux des champs océaniques (température, salinité, courant) ramène les équations primitives à un nombre fini d'équations de Saint-Venant couplées.

# Ondes de surface linéaires en milieu peu profond

## Équations de Saint-Venant sans pente ni frottement

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} = -h \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g' \frac{\partial h}{\partial x}$$

## Équilibres

$(U_n, h_n)$  quelconques

## Petites perturbations de l'équilibre

$$h = h_n + \tilde{h} \quad \text{et} \quad U = U_n + \tilde{U}$$

## Équations de Saint-Venant linéarisées

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = -h_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + U_n \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = -g' \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}$$

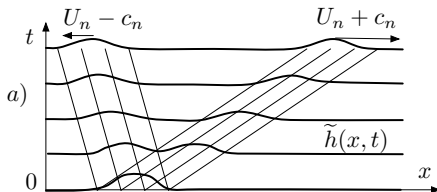
$$(\tilde{h}, \tilde{U}) = (\tilde{h}_m, \tilde{U}_m) e^{i k_1 x + s t} \quad \text{avec} \quad s = \sigma - i \omega \in \mathbb{C}$$

# Comportement non dispersif en milieu peu profond

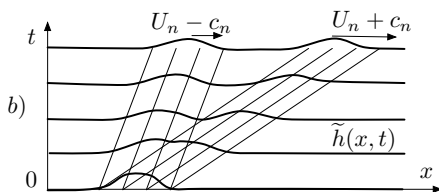
Relation de dispersion et forme des ondes ( $\sigma = 0$ )

$$\omega_{\pm} = (U_n \pm c_n) k_1 \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{h}_m}{h_n} = \pm \frac{\tilde{U}_m}{c_n} \quad \text{avec} \quad c_n = \sqrt{g h_n}$$

Fluvial :  $F_n = \frac{U_n}{c_n} < 1$



Torrentiel :  $F_n = \frac{U_n}{c_n} > 1$



$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{H}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{H}_-[x - (U_n - c_n)t] \\ \tilde{U}(x, t) &= \frac{1}{2} \tilde{U}_+[x - (U_n + c_n)t] + \frac{1}{2} \tilde{U}_-[x - (U_n - c_n)t] \end{aligned}$$

# Cas des ondes non linéaires en milieu peu profond

## Équation de Saint-Venant 1D

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{\frac{g'}{h}} * \quad & \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ + \quad & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = g' l - \frac{C_f}{2} \frac{U|U|}{h} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \left( U \pm \sqrt{g' h} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( U \pm 2\sqrt{g' h} \right) = E(h, U)$$

Caractéristiques  $\mathcal{C}_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t)$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_1 = N(J_1, J_2)$$

$$\lambda_1 = U + c \quad \text{et} \quad J_1 = U + 2c$$

Caractéristiques  $\mathcal{C}_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t)$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) J_2 = N(J_1, J_2)$$

$$\lambda_2 = U - c \quad \text{et} \quad J_2 = U - 2c$$

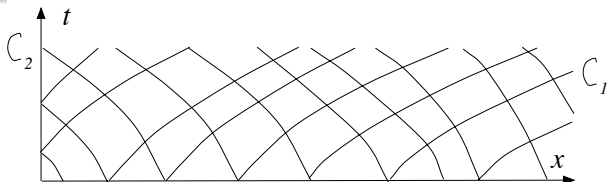
# Méthode des caractéristiques

Caractéristiques  $C_1 : \dot{x} = \lambda_1(x, t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_1} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$

Caractéristiques  $C_2 : \dot{x} = \lambda_2(x, t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{C_2} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$



Fonction de Riemann  $J_1$

$$\left(\frac{dJ_1}{dt}\right)_{C_1} = N(J_1, J_2)$$

Fonction de Riemann  $J_2$

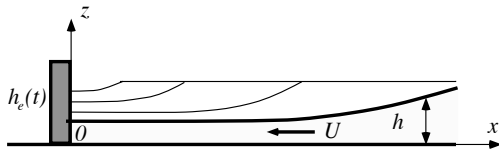
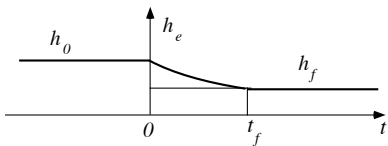
$$\left(\frac{dJ_2}{dt}\right)_{C_2} = N(J_1, J_2)$$

Invariants de Riemann si  $C_f = 0$  et  $l = 0$  donc  $N = 0$

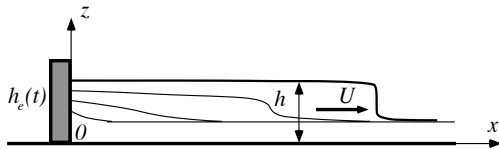
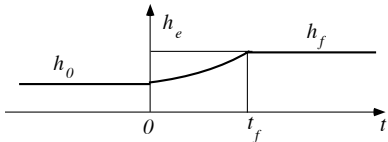
# Vidange ou remplissage d'un bief

Exemples d'applications lorsqu'il existe des invariants de Riemann

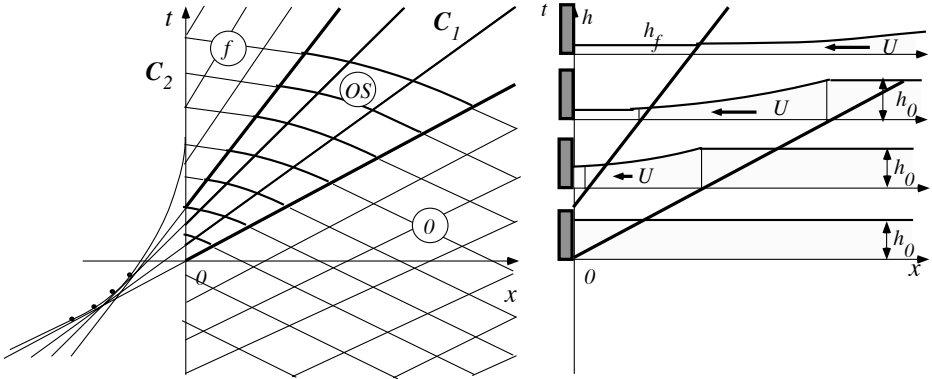
1) Onde de détente :  $h_e(t)$  décroissante



2) Onde de compression :  $h_e(t)$  croissante

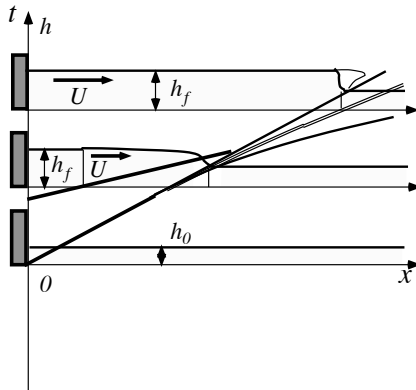
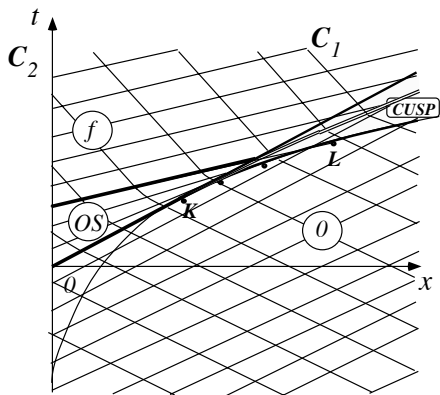


# Onde de détente



- Région 0 : écoulement uniforme  $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de détente  $h(x, t)$  et  $U(x, t)$  variable
- Région f : écoulement uniforme  $(h, U) = (h_f, U_f)$

# Onde de compression



- Région 0 : écoulement uniforme  $(h, U) = (h_0, 0)$
- Région OS : onde de compression  $h(x, t)$  et  $U(x, t)$  variables
- Région CUSP : intérieur de la fronce
- Région f : écoulement uniforme  $(h, U) = (h_f, U_f)$



# Mascaret



# Rupture de barrage



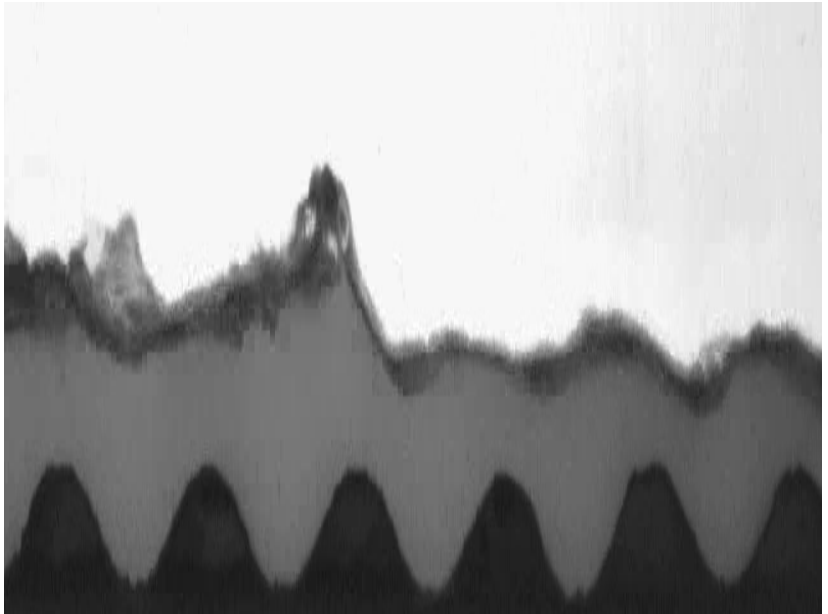
**Rupture de  
barrage**



# Ressaut hydraulique en canal



# Rollwaves en canal incliné



# Dérivation des relations de sauts

## Modèle de Saint-Venant sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx + [hU]_{x_1}^{x_2} = 0$$
$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} h U \, dx + \left[ hU^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} E(h, U) h \, dx$$

## Bilans locaux

=

$$\frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (h U) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t} (hU) + \frac{\partial}{\partial x} (hU^2) + \frac{1}{2} g' \frac{\partial}{\partial x} h^2 = E(h, U) h$$

+

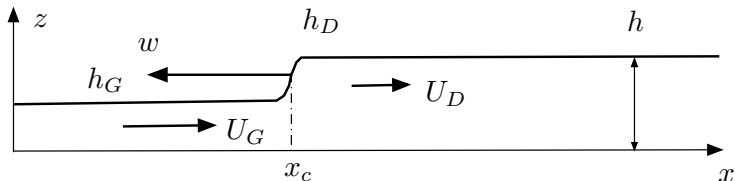
## Relations de sauts

$$\llbracket h(U - w) \rrbracket = 0$$
$$\llbracket hU(U - w) + \frac{1}{2} g' h^2 \rrbracket = 0$$

# Ressauts à énergie positive !

## Relations de saut pour un ressaut hydraulique mobile

$$\begin{aligned}h_G(U_G - w) &= h_D(U_D - w) \\h_G U_G(U_G - w) + \frac{1}{2}g' h_G^2 &= h_D U_D(U_D - w) + \frac{1}{2}g' h_D^2\end{aligned}$$



$h_G$ ,  $h_D$  et  $U_D = 0$  sont connus

$$U_G = w \left(1 - \frac{h_D}{h_G}\right)$$

$$w = \pm \sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$

$h_G$ ,  $h_D$  et  $w = 0$  sont connus

$$U_G = \pm \sqrt{g' \frac{h_D}{h_G} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$

$$U_D = \pm \sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$

# Traduction du second principe à travers l'énergie

## Bilan global de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) dx + \left[ \frac{1}{2} g' h^2 U \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} [E(h, U) h U - D] dx$$

## Bilan local

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} h U^3 + g' h^2 U \right) = E(h, U) h U - D$$

## Inégalité de saut

$$\left[ \left( \frac{1}{2} h U^2 + \frac{1}{2} g' h^2 \right) (U - w) + \frac{1}{2} g' h^2 U \right] = -D_0 < 0$$

si  $h_G(U_G - w) = h_D(U_D - w) > 0$

# Transition torrentiel / fluvial

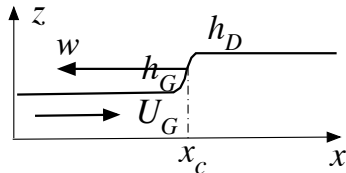
## Applications de l'inégalité de saut pour l'énergie

$$Fr_n > 1 \text{ (torrentiel)} \rightarrow Fr_n < 1 \text{ (fluvial)}$$

$h_G$ ,  $h_D$  et  $U_D = 0$  sont connus

$$U_G = w \left(1 - \frac{h_D}{h_G}\right)$$

$$w = -\sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$

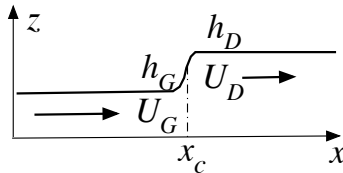


$$w < 0$$

$h_G$ ,  $h_D$  et  $w = 0$  sont connus

$$U_G = +\sqrt{g' \frac{h_D}{h_G} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$

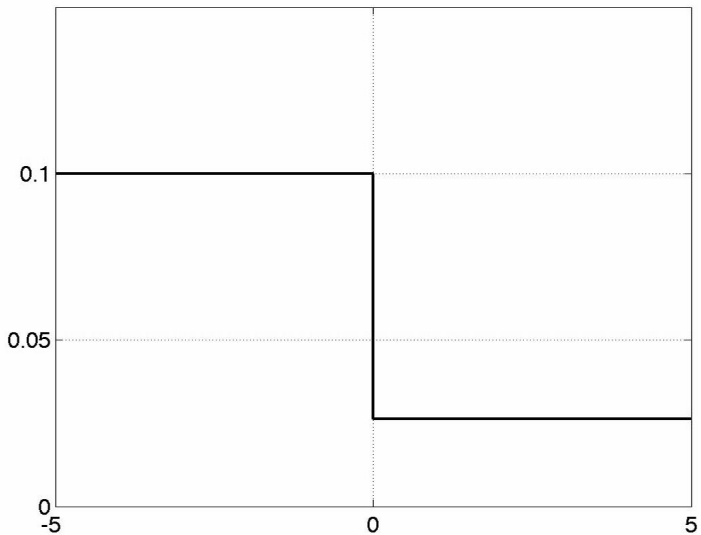
$$U_D = +\sqrt{g' \frac{h_G}{h_D} \left(\frac{h_G + h_D}{2}\right)}$$



$$U_G > 0 \text{ et } U_D > 0$$



# Modélisation de la rupture d'un barrage



# La rupture d'un barrage en superproduction



<http://thual.perso.enseeiht.fr/xsee>

- *Appréhender plusieurs domaines d'application* : Hydraulique, hydrologie souterraine, hydrodynamique marine, ...
- *En maîtriser les concepts de base* : Transport turbulent, charge hydraulique, propagation d'ondes, ...

## Plan du cours

- 1 Couches limites turbulentes
- 2 Hydraulique stationnaire
- 3 Intumescences et ressauts
- 4 Ondes de surface
- 5 Réfraction de la houle
- 6 Marées et seiches

