

# ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS

Articles Pédagogiques Multimedia



Photo : <http://www.swastycreation.com/photos>

Olivier THUAL, [thual@imft.fr](mailto:thual@imft.fr)

INPT/ENSEEIH, 6 juin 2007



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Dérivation des équations de Saint-Venant</b>	<b>21</b>
1	Modèle 2D turbulent . . . . .	25
2	Approximations de milieu peu profond . . . . .	30
3	Modèles 1D intégrés sur la verticale . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Advection d'un scalaire et caractéristiques</b>	<b>55</b>
1	Dérivée le long de courbes . . . . .	58
2	Résolution générale de l'équation d'advection . . . . .	61
3	Résolution de cas particuliers . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Ondes de surface linéaires 1D, hyperboliques ou dispersives</b>	<b>87</b>
1	Classifications des systèmes linéaires 1D . . . . .	94
2	Ondes de surface linéaires et hyperboliques . . . . .	106
3	Ondes de surface linéaires et dispersives . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Caractéristiques et chocs</b>	<b>133</b>
1	Modèle simple du trafic routier . . . . .	139
2	Équations aux dérivées partielles hyperboliques . . . . .	144
3	Détentes, ressauts et relations de sauts . . . . .	152



# ORGANISATION GÉNÉRALE DU COURS ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS

O. Thual, 6 juin 2007

L’objet de cette note est de donner un certain nombre d’informations pratiques concernant l’organisation du cours intitulé “ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS” en deuxième année de la formation d’ingénieur du Département “Hydraulique - Mécanique des Fluides” de l’ENSEEIH.

## 0.1 SYLLABUS

### ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS

Semestre 1 Cours : 10 h TD : 12h TP : 4h Crédits : 3 ECTS

**Mots-Clés** : écoulements à surface libre, équations de Saint Venant, méthode des caractéristiques, relations de dispersion.

**Bibliographie** : [1] <http://www.enseeiht.fr/~thual>,  
[2] J. J. Stoker, Water waves, Interscience (1957),  
[3] Whitham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley (1974).

**Objectif** : Assimiler les notions de base sur les caractéristiques et les ondes de chocs (problèmes hyperboliques) en s’appuyant sur les exemples des écoulements à surface libre.

**Programme** : Le cours s’appuie sur quatre “Articles Pédagogiques Multimedia” indépendants.

Un premier article détaille la dérivation des équations de Saint Venant qui modélisent la dynamique d’une couche fluide de faible profondeur sur un fond plat ou incliné. Un deuxième article détaille la résolution de l’équation 1D nonlinéaire d’advection d’un scalaire, qui est à la base de la méthode des caractéristiques. Le troisième article étudie les ondes de surface linéaires dans le cas non dispersif (faible profondeur) ou dispersif (profondeur quelconque). Le dernier article traite de la résolution des équations de Saint Venant non linéaires par la méthode des caractéristiques et de la description des ressauts hydrauliques par l’introduction des relations de saut.

Une séance expérimentale en canal vitré permet de motiver et d’illustrer le cours et plusieurs exemples d’applications des notions introduites sont abordés sous forme d’exercices.

O. THUAL, O. PRAUD, L.-R. PLUMERAULT, J.-F. PARMENTIER

## 0.2 DÉROULEMENT PRATIQUE

- **Horaires** : la présence des élèves est souhaitée aux horaires légaux de l'école qui sont actuellement : 8h00 - 9h45, 10h15 - 12h00, 14h00 - 15h45, 16h15 - 18h00.
- **Cours Magistral (CM)** : le cours dure 1h45 sans pause.
- **Travaux Dirigés (TD)** : la promotion est divisée en deux groupes pour les séances de TD. Les étudiants seront encouragés à passer au tableau pour traiter les exercices.
- **Travaux Pratiques (TP)** : un mini-projet expérimental et analytique, doit être remis sous forme d'un rapport écrit par binômes au plus tard le jour de l'examen final.
- **Contrôle écrit en temps limité** : Un examen écrit de 2h a lieu lors de la dernière séance de l'enseignement. Tous les documents sont autorisés.
- **Coefficients** : Les poids respectifs des deux évaluations sont les suivants : 3/4 pour le contrôle écrit, 1/4 pour le mini-projet expérimental.
- **Documentation du cours** : le polycopié du cours est organisé sous forme de quatre “Articles Pédagogiques Multimédia” (APM). Chaque APM peut être lu et travaillé indépendamment des autres. Le polycopié inclut les exercices posés lors des examens des années précédentes. Les mises à jour de ce polycopié sont disponibles à l'adresse :

<http://www.enseeiht.fr/hmf/~thual/otond> .

Ces pages contiennent aussi des animations illustrant le cours et des programmes Matlab à télécharger.

- **Fiche d'évaluation du cours** : les étudiants sont invités à remplir une fiche d'évaluation du cours pour la remettre à la fin de la période pendant laquelle s'est déroulée cet enseignement.
- **Travaux des élèves** : certaines notions abordées dans ce cours sont utilisées lors de projets réalisés par les élèves du Département et publiées à l'adresse suivante :

<http://www.enseeiht.fr/travaux> .

- **Bibliographie** : prêt à la bibliothèque des ouvrages de la bibliographie du livre.

**0.3 PROGRAMME DÉTAILLÉ COURS/TD**

<b>Cours</b>	<b>Programme</b>	<b>APM</b>
CR 01	Présentation des objectifs Modèle de trafic routier	diaporama carcho-1
TP / BE	Expériences dans le canal vitré Devoir écrit de mini-projet	Abaques Enoncé
TD 1	Modèles de l'équation de Burgers Ondes de crues non linéaires	carcho.1 carcho.2
CR 02	Dérivation des équations de Saint Venant	derisv
TD 2	Intégration sur la hauteur Analyse dimensionnelle et $\tau_f$	derisv.1 derisv.2
CR 03	Advection d'un scalaire passif Ondes de surface linéaires et hyperboliques	advsvca surfli-2
TD 3	Pluie et ondes de crue Propagation d'un petit hydrogramme	advsvca.2 surfli.1
CR 04	EDP hyperboliques	carcho-2
TD 4	Vidange par contrôle de la vitesse Intumescences non linéaires (1-5)	carcho.3 carcho.4
CR 05	Détentes, ressauts et relations de sauts	carcho-3
<b>Rapport</b>	<b>Remise du rapport de mini-projet de TP</b>	Coeff 0,25
TD 5	Ondes de crues non linéaires (6-7) Intumescences non linéaires (6-8)	carcho.2 carcho.4
Examen	Contrôle écrit	Coeff 0,75

NB : ne pas oublier de remettre le rapport du mini-projet au plus tard lors de la séance du TD5 !

#### 0.4 MINI-PROJET DE TRAVAUX PRATIQUES

Le canal vitré côté fenêtre de la salle B005 est équipé d'un circuit hydraulique avec une pompe permettant un débit allant de 30 à 50 l/s. Deux vannes, une en amont, l'autre en aval du canal, peuvent être actionnées à partir d'un petit programme simple (parfois capricieux).

Il est demandé de créer des ressauts stationnaires à diverses positions du canal en réglant la hauteur des vannes et le débit de la pompe afin de documenter des profils spatio-temporels  $h(x, t)$  de la hauteur de la surface libre. Ces données expérimentales seront confrontées aux théories développées dans le cours et aux résultats d'un problème à rédiger dans le cadre du mini-projet.

Le mini-projet fera donc l'objet d'un compte-rendu d'expérience et d'un devoir à la maison avec une mise en relation entre le travail expérimental et le travail analytique. Les expériences pourront être réalisées par groupes de dix, chaque groupe disposant d'une heure lors de la séance.

#### 0.5 ÉVALUATION DE L'ENSEIGNEMENT

NOM (facultatif) :

Afin d'établir un bilan du CM, des TD et des TP, et d'envisager des modifications de l'enseignement, merci de bien vouloir remplir ce questionnaire.

FICHE D'ÉVALUATION DU COURS : Ondes de surface et ressauts  
 NOM DE L'ENSEIGNANT DU CM : O. THUAL

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Définition des objectifs du cours						
Documentation écrite du cours						
Intervention de l'enseignant						
Contrôle des connaissances						
Atteinte des objectifs du cours						

Commentaires supplémentaires :

FICHE D'ÉVALUATION DES TD DES CM DU COURS : Ondes de surface et ressauts

NOM DE L'ENSEIGNANT DE TD :

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Choix des sujets d'exercices						
Documentation écrite du TD						
Intervention de l'enseignant						
Participation des élèves						
Articulation avec le cours						

Commentaires supplémentaires :

FICHE D'ÉVALUATION DES TP DU COURS : Ondes de surface et ressauts  
NOM DE L'ENSEIGNANT DE TP :

	Très Bien	Bien	Moyen	Passable	Mauvais	Commentaires
Intérêt du sujet de TP						
Documentation écrite du TP						
Intervention de l'enseignant						
Contrôle des connaissances						
Articulation avec le cours et les TD						

Commentaires supplémentaires :

## ABAQUES POUR LE MINI-PROJET

L'expérience consiste à faire varier le débit  $Q$  et les positions des deux vannes du canal pour obtenir un ressaut stationnaire ou lentement variable. On se place dans le cadre de la modélisation des équations de Saint Venant.

### Relations de saut

$$\begin{aligned} h_G(U_G - w) &= h_D(U_D - w) \\ h_G U_G(U_G - w) + \frac{1}{2}g' h_G^2 &= h_D U_D(U_D - w) + \frac{1}{2}g' h_D^2 \\ \left(h_G U_G^2 + g' h_G^2\right) (U_G - w) + g' h_G^2 U_G &> \left(h_D U_D^2 + g' h_D^2\right) (U_D - w) + g' h_D^2 U_D \\ \text{si } h_G(U_G - w) &= h_D(U_D - w) > 0 \end{aligned}$$

### Conditions expérimentales

On suppose que les mesures disponibles sont les hauteurs d'eau et le débit  $Q$ . Sur une section stationnaire de vitesse  $U$  et de hauteur  $h$ , on a  $Q = U h l$  où  $l$  est la largeur du canal ( $l = 25$  cm). On note  $q = U h = Q/l$ .

### Cas du ressaut stationnaire

On a  $q = h_G U_G = h_D U_D$  et  $F(q; h_G) = F(q; h_D)$  avec  $F(q; h) = q^2/h + \frac{1}{2}g h^2$ .

### Cas du ressaut animé d'une faible vitesse

On a  $q = h_G U_G$  et  $w = \frac{h_D U_D - h_G U_G}{h_D - h_G} = \frac{[hU]}{[h]} \neq 0$  mais petit (devant  $U_G$ ). On déduit  $U_D = \frac{q + w(h_D - h_G)}{h_D}$ . En reportant dans la deuxième équation et en négligeant le terme en  $w^2$ , on obtient :

$$w \sim -\frac{h_D}{2(h_D - h_G)q} \left[ F(q; h) \right]$$

### Abaque

Courbes  $F(q; h) = q^2/h + \frac{1}{2}g h^2$  pour  $q$  variable par pas de a)  $.01\text{m}^2\text{s}^{-1}$  b)  $.001\text{m}^2\text{s}^{-1}$ .



## DEVOIR A RENDRE POUR LE MINI-PROJET

### PROBLÈME 0.1

 Ressaut dans un canal vitré

On considère un canal vitré, de largeur  $l = 25$  cm, compris entre deux vannes situées en  $x = 0$  et  $x = L$  avec  $L = 12$  m. Le fond peut être considéré comme horizontal (très faible pente de l'ordre du millième). On note  $Q$  le débit d'eau circulant dans le canal dans le sens des  $x$  positifs et l'on suppose que le régime de la pompe qui l'alimente est réglé pour obtenir  $Q = 15 \text{ l s}^{-1}$ . En réglant les vannes amont et aval, on suppose que l'on est capable de générer un ressaut en un point  $x_c \in ]0, L[$  du canal vitré. On note  $h_G$  et  $h_D$  les hauteurs d'eau respectivement mesurées à gauche et à droite du ressaut et l'on suppose  $h_D > h_G$ . On note  $g$  la gravité.

Figure 1: Ressaut stationnaire observé dans un canal vitré

### Équations de Saint Venant sans frottement

Dans un premier temps, on modélise l'écoulement par les équations de Saint Venant sans frottement. On note  $U_G \geq 0$  et  $U_D \geq 0$  les vitesses de la couche fluide respectivement à gauche et à droite du ressaut et  $w = \dot{x}_c(t)$  la vitesse du ressaut lorsqu'il est mobile. On note  $q = Q/l$  le débit linéique.

- 1) Écrire les relations de saut traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement à travers le ressaut.
- 2) On suppose que l'écoulement est stationnaire pour  $x < x_c$ . Montrer que  $U_G = q/h_G$ .
- 3) En déduire que  $U_D = q/h_D + \lambda [[h]]$  où  $\lambda$  est une grandeur que l'on exprimera en fonction de  $w$  et  $h_D$ . On rappelle la notation  $[[h]] = h_D - h_G$ .
- 4) En utilisant la notation  $F(q, h) = q^2/h + \frac{1}{2}gh^2$ , déduire de cette élimination de  $U_G$  et de  $U_D$  une relation entre  $w$ ,  $h_G$ ,  $h_D$ ,  $q$  et  $g$  écrite sous la forme

$$w - \frac{1}{2} \frac{w^2}{U_*} = -\frac{h_D}{2q} \frac{[[F(q, h)]]}{[[h]]} \quad (1)$$

- où  $U_*$  est une vitesse que l'on comparera à  $U_G$ .
- 5) Donner l'expression de  $w$  lorsque  $w \ll U_G$ .
  - 6) On suppose que le ressaut est stationnaire ( $w = 0$ ) et que l'on mesure  $h_G = 3$  cm. En déduire la hauteur  $h_D$  (on pourra procéder par résolution graphique en utilisant la figure 2).
  - 7) Calculer les valeurs  $F_{rG}$  et  $F_{rD}$  du nombre de Froude  $F_r = U/\sqrt{gh}$  de part et d'autre du ressaut.
  - 8) Dans le domaine  $[0, L] \times \mathbb{R}_+$  du plan  $(x, t)$ , tracer schématiquement les caractéristiques des équations de Saint Venant de part et d'autre du choc et indiquer la valeur de l'inverse de leurs pentes.

Figure 2: Tracé de la fonction  $F(q; h) = q^2/h + \frac{1}{2}gh^2$  (en  $m^3 s^{-2}$ ) en fonction de  $h$  (en m) pour  $q$  variable par pas de  $.01 m^2 s^{-1}$ .

Figure 3: *Figure sans légende.*

### Mise en mouvement du ressaut

A  $t = 0$ , on abaisse la vanne aval pour faire passer la hauteur d'eau de la valeur  $h_D$  à la valeur  $h'_D < h_D$  en un temps  $t_f$ . On suppose que la hauteur  $h'_D$  reste constante pour  $t \geq t_f$ .

- 9) Calculer le temps  $T$  au bout duquel le ressaut commence à se mettre en mouvement en supposant que  $x_c = 4$  m.
- 10) Calculer la vitesse de croisière  $w$  du ressaut atteinte au bout d'un transitoire, en supposant que  $h'_D = 12$  cm. On pourra supposer que  $w \ll U_G$  et se contenter d'une valeur de  $[[F(q, h)]]$  estimée graphiquement.
- 11) Dessiner très schématiquement les caractéristiques et la trajectoire du choc dans le plan  $(x, t)$ .

### Prise en compte du frottement

On modélise maintenant l'écoulement en incluant, dans les équations de Saint Venant, un terme de frottement  $-\frac{C_f U|U|}{2h}$  avec  $C_f(h) = 2gK^{-2}h^{-\frac{1}{3}}$  où  $K$  est le coefficient de Strickler.

- 12) Donner la dimension du nombre de Strickler.
- 13) On s'intéresse aux solutions stationnaires des équations de Saint Venant avec frottement  $h(x)$  restreintes aux sous-domaines de  $[0, L]$  où elles sont continues et dérivables. En notant  $q = U h$  le débit linéique, montrer que ces solutions vérifient

$$\left(g h^{\frac{n}{3}} - q^2 h^{\frac{m}{3}}\right) \frac{dh}{dx} = -\frac{g}{K^2} q^2 \quad (2)$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers que l'on déterminera.

- 14) En utilisant la notation  $B_H(h) = \frac{3}{4} h^{\frac{4}{3}} \left[1 - \frac{4}{13} \left(\frac{h}{H}\right)^3\right]$ , montrer que l'on a  $B_H(h) = \frac{q}{K^2}(x - x_0)$  où  $H$  est une hauteur dont on calculera la valeur numérique et  $x_0$  est une constante d'intégration que l'on ne cherche pas à déterminer.

- 15) Tracer schématiquement l’allure de la courbe  $B_H(h)$  en précisant la valeur  $h_H$  où elle atteint son maximum.
- 16) Comparer  $H$  avec la longueur  $h_q$  qui minimise la courbe  $F(q, h)$  à  $q$  fixé.
- 17) Exprimer le nombre de Froude  $F_r$  en fonction de  $h$  et  $H$  uniquement.
- 18) En déduire que le frottement augmente le niveau d’eau d’un écoulement supercritique et diminue celui d’un écoulement sous-critique.
- 19) On suppose qu’il existe un ressaut stationnaire en  $x_c = 4$  m avec  $h_G = 3$  cm et  $h_D = 14$  cm. Dessiner schématiquement le profil de la surface libre à gauche et à droite du ressaut, en prenant en compte le frottement.
- 20) On abaisse la vanne aval de telle sorte que le niveau d’eau à droite du ressaut soit à peu près égal à  $h'_D \sim 12$  cm. Montrer, sans calcul et en utilisant les tracés de la figure 2, que le ressaut se déplace vers la droite avant de se stabiliser à une position  $x'_c$  que l’on supposera inférieure à  $L$ . Préciser dans ce cas la valeur numérique de  $h'_G$ .
- 21) Exprimer le déplacement  $x'_c - x_c$  du ressaut en fonction de  $h'_G$  et  $h_G$  à l’aide de la fonction  $B_H(h)$ .
- 22) Tracer l’allure de la courbe  $w(t)$  de la vitesse du ressaut en fonction du temps à partir de l’instant où l’on abaisse la vanne aval.
- 23) Comparer cette expérience avec le cas où le frottement est négligé.
- 24) En amont d’un éventuel ressaut, on mesure  $h = 1$  cm en  $x = 0$  et  $h = 2$  cm en  $x_* = 2$  m. En négligeant  $h/H$  dans l’expression de  $B_H$ , donner la valeur du nombre de Strickler. Le fond du canal est-il lisse ou rugueux ?

# Avant-Propos

Le cours intitulé “ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS” a été conçu dans le cadre de la seconde année de formation du cycle d’ingénieur du Département “Hydraulique et Mécanique des Fluides” de l’ENSEEIH. Il fait l’objet de 10h de cours et 8h de Travaux Dirigés et 2h de contrôle écrit. Il répond à un double objectif :

- Manipuler les modèles de base de la mécanique des fluides à surface libre à travers l’étude des ondes de surface linéaires et non linéaires.
- Assimiler plusieurs concepts de base souvent utilisés en mécanique des fluides : linéarisation autour d’état stationnaire, relation de dispersion des ondes, méthode des caractéristiques, relation de saut pour le traitement des chocs ou ressauts.

Le support écrit de ce cours est structuré sous la forme de quatre “Articles Pédagogiques Multimedia” indépendants.

Un “Article Pédagogique Multimedia” (APM) est un document électronique qui regroupe des textes de type photocopié mais aussi des animations, des programmes de démonstrations ou des illustrations difficiles à transcrire sous forme papier.

Seules les parties classiques de type “livre papier” (texte, exercices corrigés, glossaires, ...) sont réunies dans le présent photocopié. Les parties complémentaires de ces APM (animations et programmes Matlab) ainsi que d’éventuelles mises à jour (voir la date de chaque document) sont accessibles à l’adresse suivante :

<http://www.enseeiht.fr/~thual>

La liste des rubriques constituant un “Article Pédagogique Multimedia” (APM) est indiqué ci-dessous. Par rapport à la version papier, la version électronique comprend la copie des transparents, des animations ainsi que des programmes “matlab” à télécharger (trois derniers éléments de la liste).

- Fiche signalétique
- Objectifs pédagogiques
- Pré-requis
- Notations
- Cours écrit
- Exercices et problèmes
- Corrigés des exercices et problèmes
- Questionnaires à choix multiples
- Corrigés des QCM
- Bibliographie
- *Transparents\**
- *Animations\**
- *Demos Matlab\**

\* : à consulter sur INTERNET (<http://www.enseeiht.fr/~thual>)

# Introduction du cours

Les pré-requis nécessaires pour la compréhension de ce cours peuvent être limités à une connaissance de base des équations de la mécanique des fluides. Parmi les très nombreux livres permettant d'acquérir cette connaissance, j'en cite un qui présente l'avantage de partager la plupart des notations utilisées dans ce polycopié : "Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables", O. Thual, Cépaduès-Éditions 1997.

Ce cours, intitulé "ONDES DE SURFACE ET RESSAUTS" est constitué des quatre "Articles Pédagogiques Multimedia" (APM) suivants :

- **derisv** : Dérivation des équations de Saint Venant
- **advscs** : Advection d'un scalaire et caractéristiques
- **surfli** : Ondes de surface linéaires 1D, hyperbolique ou dispersives
- **carcho** : Caractéristiques, chocs et équations de Saint Venant

Ces articles peuvent être lus et travaillés indépendamment les uns des autres.

Ce cours est inspiré du document suivant : J. FABRE, "Ondes", polycopié ENSEEIHT (2001). Un prolongement de ce cours peut être trouvé dans l'ouvrage "Des ondes et des fluides", O. Thual, Cépaduès-Éditions 2005. Deux ouvrages en anglais peuvent être consultés en approfondissement de ce cours : "Waves In Fluids" de James Lighthill (Cambridge University Press 1978 et 1980) et "Linear and Nonlinear Waves" de G. B. Whitham (Wiley 1974).