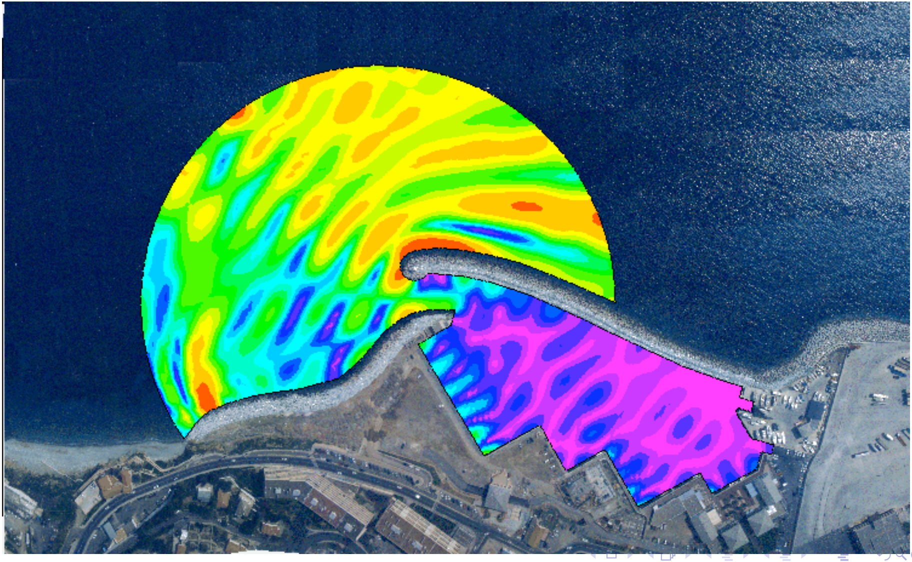
Houle dans un port

Olivier THUAL, INP Toulouse

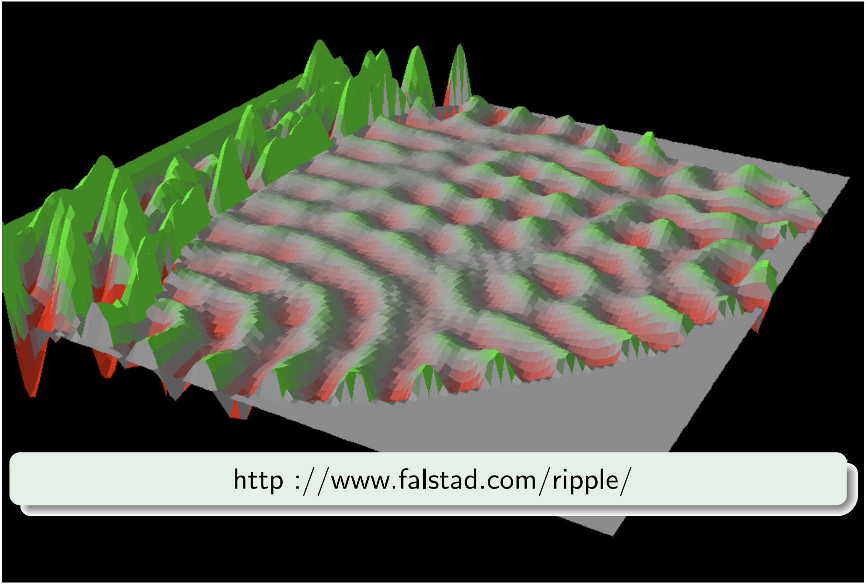
1er mars 2013

Oscillations et seiches dans un port



Réflexion et diffraction des ondes

Les phènomènes de réflexion et de diffraction des ondes de surface sont décrits à l'aide de l'équation d'Helmoltz avec conditions aux limites que l'on peut résoudre par éléments de frontières.



http ://www.falstad.com/ripple/

Ondes de surface en milieu peu profond

Équations de Saint-Venant 2D, linéaires, sans rotation, homogènes

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_r\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$\Longrightarrow$ Équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2\,\Delta\eta = 0$$

Fréquence fixée

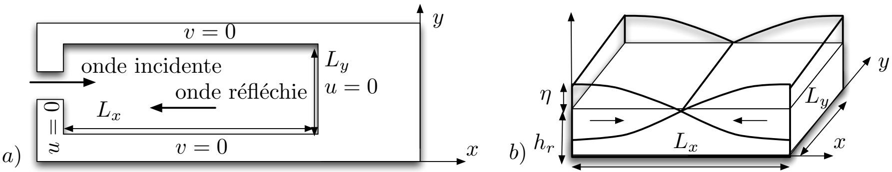
$$\eta(x,y,t) = F(x,y)\,e^{-i\,\omega\,t}$$

Équation d'Helmoltz

$$\Delta F + k^2\,F = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega = k\,c$$

Piégeage d'une onde en milieu peu profond (seiche)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2\, \Delta\eta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les bords}$$



Solution complexe : $\eta = F(x,y)\, e^{-i\,\omega\, t}$ avec $F(x,y) = e^{i\, k_1\, x + i\, k_2\, y}$

Oscillations propres de la cavité

$$(\eta, \underline{U}) = \eta_0\; (1, g\; \underline{e}_k / c)\;\; \cos(k_1\, x)\;\; \cos(k_2\, y)\;\; \cos(\omega\, t)$$

Résonances pour les pulsations $\omega_n = c\,\pi\,\sqrt{n_1^2/L_x^2 + n_2^2/L_y^2}$

Houle en profondeur quelconque

Équations d'Euler à surface libre, linéaires et homogènes

$$\Delta \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \qquad / \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_r$$

Fréquence fixée

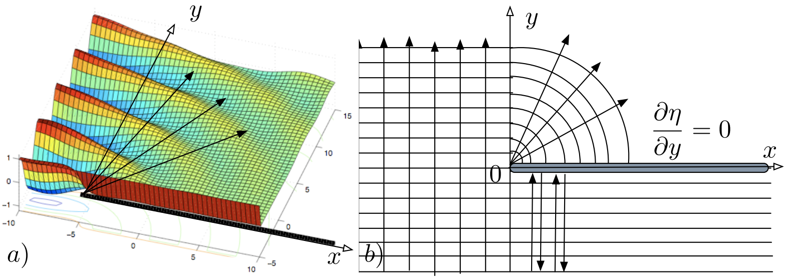
$$\{\eta(x,y,t), \phi(x,y,z,t)\} = \left\{1, \frac{g}{i\,\omega} \frac{\cosh[k\,(z+h_r)]}{\cosh(k\,h_r)}\right\} F(x,y)\, e^{-i\,\omega\,t}$$

Équation d'Helmoltz

$$\Delta F + k^2 F = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega^2 = g\,k\,\tanh(k\,h_r)$$

Diffraction d'une houle $\eta_i = \eta_m \cos(k\, y - \omega\, t)$ par une jetée :

$$\Delta F + k^2 F = 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } x \geq 0$$



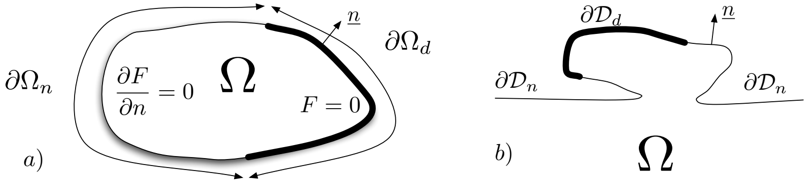
Solution analytique :

$$F(x,y) = \eta_m \frac{1+i}{2} \left\{ S\left[\tfrac{2\,k}{\pi}(r+y)\right]\; e^{i\,k\,y} + S\left[\tfrac{2\,k}{\pi}(r-y)\right]\; e^{-i\,k\,y} \right\}$$

Résolution de l'équation d'Helmoltz :

$$\Delta F + k^2 F = 0 \,.$$

- Frontières réfléchissantes $\partial\Omega_n$: $\partial F / \partial n = 0$ (Neuman)
- Frontières absorbantes $\partial\Omega_d$: $F = 0$ (Dirichlet)

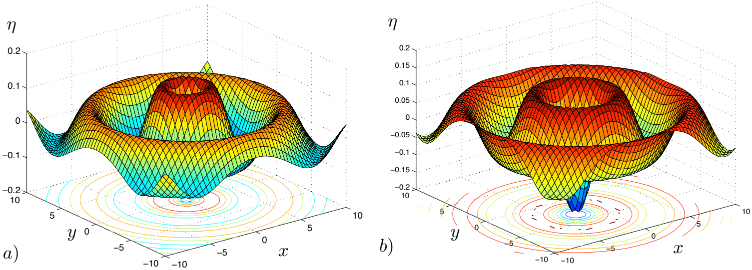


Condition de radiation de Sommerfeld :

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\,k \right) [F(\underline{x}) - F_i(\underline{x})] = 0 \qquad \text{avec} \qquad r = \|\underline{x}\|$$

Fonction de Green de l'équation d'Helmoltz : source ou puit

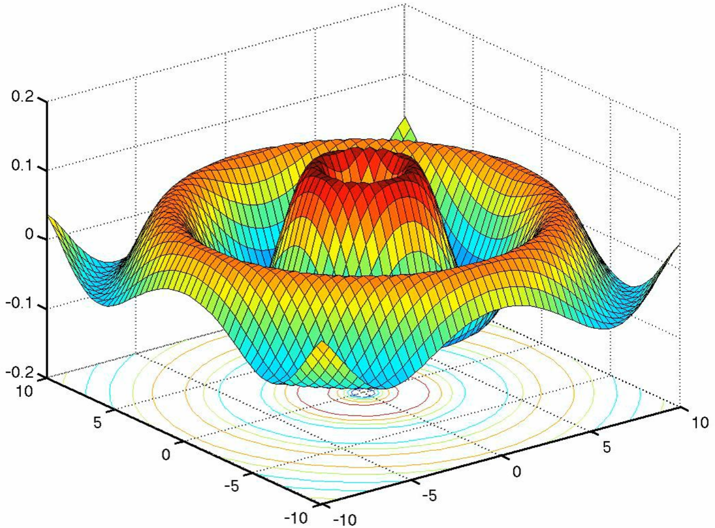
$$\Delta G + k^2\, G = \delta(\underline{x})$$



Fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro :

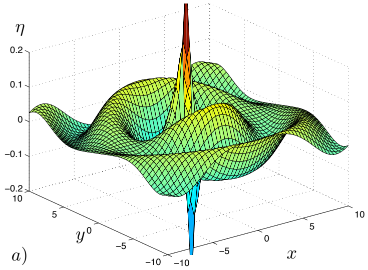
$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + k^2\, f = 0 \quad \Longrightarrow \quad G(r) = -\frac{i}{4}\, H_0^{(1)}(k\, r)$$

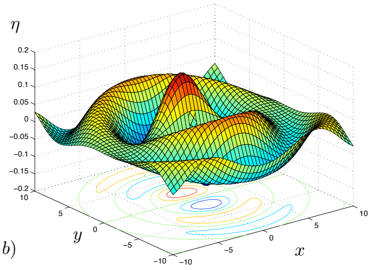
Source ou puit



Dérivée de Fonction de Green : doublet

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{G(\underline{x} + \epsilon\, \underline{n}) - G(\underline{x} - \epsilon\, \underline{n})}{2\,\epsilon}$$

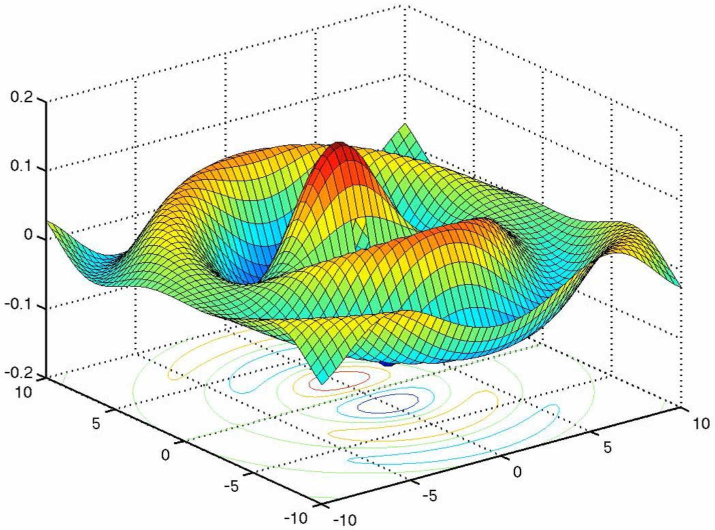




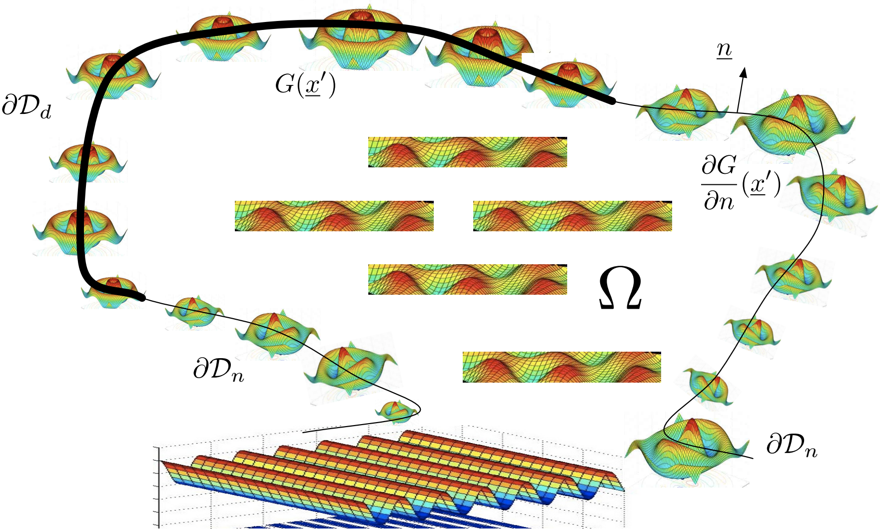
Fonction de Hankel de première espèce d'ordre un :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{i\,k}{4\,r}\,(\underline{x} \cdot \underline{n})\, H_1^{(1)}(k\,r)$$

Doublet



Méthode aux éléments de frontières



Formule de Green pour $L = \Delta$ ou $L = \Delta + k^2$:

$$\int_\Omega \varphi_1 \, L\, \varphi_2 \, da - \int_\Omega \varphi_2 \, L\, \varphi_1 \, da = \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \, ds$$

$\varphi_1(\underline{x}') = F(\underline{x}')$ avec $L\, F = 0$ / $\varphi_2(\underline{x}') = G(\underline{x} - \underline{x}')$ avec $L\, G = \delta$

$$\int_\Omega F \; (L\, G) \; da - \int_\Omega G \; (L\, F) \; da = \int_{\partial\Omega} F \frac{\partial G}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial F}{\partial n} \, ds \; .$$

Formule de base de la méthode aux éléments de frontière :

$$\int_\Omega F(\underline{x}')\delta(\underline{x} - \underline{x}') \, da' = \int_{\partial\Omega} F(\underline{x}') \tfrac{\partial G}{\partial n}(\underline{x} - \underline{x}') ds' - \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}') G(\underline{x} - \underline{x}') ds'$$

- avec $\frac{1}{2} F(\underline{x}) = \int_\Omega F(\underline{x}')\delta(\underline{x} - \underline{x}') \, da'$ si $\underline{x} \in \partial\Omega$
- avec $F(\underline{x}) = \int_\Omega F(\underline{x}')\delta(\underline{x} - \underline{x}') \, da'$ si $\underline{x} \in \Omega - \partial\Omega$

Équation d'Helmoltz avec conditions aux limites :

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_n \quad \text{et} \quad F = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_d$$

Solution en tout point intérieur du domaine :

$$F(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega_n} F(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x} - \underline{x}')\, ds' - \int_{\partial\Omega_d} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}')\, G(\underline{x} - \underline{x}')\, ds'$$

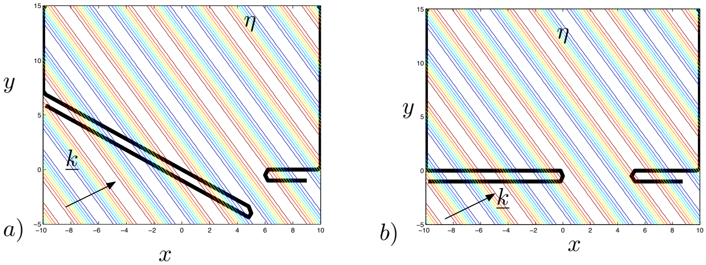
Alternative de Fredholm sur les frontières :

$$\frac{1}{2} F(\underline{x}_i) = \sum_{j=1}^{N_n} F(\underline{x}_j) \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x}_i - \underline{x}_j) \; - \sum_{j \in N_n+1}^{N_n+N_d} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}_j)\, G(\underline{x}_i - \underline{x}_j)$$

$$\Longrightarrow \; \underline{\underline{M}}\, \underline{X} = \underline{0} \quad \text{avec} \quad \underline{X}_i \Big|_{i=1}^{N_n} = F(\underline{x}_i) \quad \text{et} \quad \underline{X}_i \Big|_{i=N_n+1}^{N_n+N_d} = \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}_i)$$

Houle incidente $F_i = \eta_m \exp(i\,k\,y)$

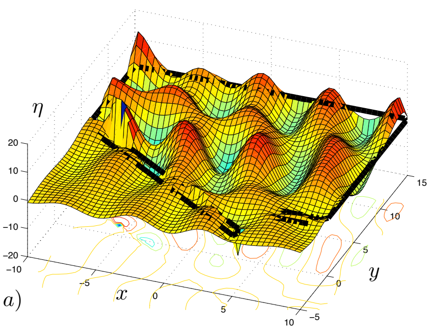
$$\frac{F(\underline{x})}{2} = F_i(\underline{x}) + \int_{\partial\mathcal{D}_n} F(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x}-\underline{x}')ds' - \int_{\partial\mathcal{D}_d} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}')G(\underline{x}-\underline{x}')ds' \,.$$



Condition de Sommerfeld :

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial r} - i\,k \right) (F - F_i) \right| \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \text{pour } r \to \infty \text{ avec } r = \|\underline{x}\|$$

Exemple de port dont toutes les parois sont réfléchissantes



Diffraction derrière un mur réfléchissant