

Houle dans un port

O. Thual, 27 février 2013

NOTATIONS

a	Rayon de la Terre (m)
A_n	Amplitudes des ondes de marées (s^{-2})
A'_n	Amplitudes locales des ondes de marées (s^{-2})
atan	Inverse de la fonction tangente \tan ()
B	Notation pour une fonction de X et Y ()
c	Vitesse $\sqrt{g h_r}$ ($m s^{-1}$)
\cosh	Cosinus hyperbolique ()
da	Élément de surface (m^2)
da'	Élément de surface (m^2)
ds	Élément de longueur (m)
ds'	Élément de longueur (m)
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω ()
$\partial\mathcal{D}$	Frontière du domaine \mathcal{D} ()
$\partial\mathcal{D}_n$	Frontière des condition de Neuman ()
$\partial\mathcal{D}_d$	Frontière des condition de Dirichlet ()
\mathcal{D}	Domaine spatial 2D ()
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée le long de \underline{n} ($m^{(-1)}$)
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Vecteurs de la base canonique orthonormée ()
$\underline{e}_\lambda, \underline{e}_\phi$	Vecteurs de la base des coordonnées sphériques ()
\underline{F}_{AT}	Force centripète ($m s^{-2}$)
F_{AT}	Module de \underline{F}_{AT} ($m s^{-2}$)
\underline{F}_A	Force gravitationnelle de l'astre A ($m s^{-2}$)
\underline{F}_L	Force gravitationnelle de la Lune ($m s^{-2}$)
\underline{F}_S	Force gravitationnelle du Soleil ($m s^{-2}$)
\underline{F}_T	Force gravitationnelle de la Terre ($m s^{-2}$)
f	Paramètre de Coriolis (s^{-1})
$f(r)$	Fonction de r pour $G(\underline{x})$ (m)
f_0	Valeur constante de f (s^{-1})
$F(x, y)$	Amplitude complexe (m)
$F_i(x, y)$	Amplitude complexe de l'onde incidente (m)
G	Constante de gravité universelle ($m^3 kg^{-1} s^{-2}$)
G	Fonction de Green (m)
g	Gravité ($m s^{-2}$)
grad	Opérateur gradient d'un champ scalaire (m^{-1})
h_f	Profondeur de la couche d'eau (m)
h_r	Profondeur constante (m)
$H_0^{(1)}$	Fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0 ()
$H_1^{(1)}$	Fonction de Hankel de première espèce d'ordre 1 ()
$\underline{k} = (k_1, k_2)$	Vecteur d'onde (m^{-1})
k	Module de \underline{k} (m^{-1})

l	Indice azimuthal des modes propres ()
$\mathcal{L}(l, \omega)$	Opérateur différentiel ()
L_x	Longueur en x (m)
L_y	Longueur en y (m)
L_{min}	Longueur minimale pour les ondes de Poincaré (m)
Ln	Logarithme népérien ()
L	Opérateur différentiel de Helmholtz ()
$L_i(\phi)$	Fonction de ϕ , pour $i = 1, 2, \dots, 4$ ()
M_A	Masse de l'astre A (kg)
M_T	Masse de la Terre (kg)
M_L	Masse de la Lune (kg)
M_S	Masse du Soleil (kg)
n	Indice des ondes de marée ()
n_1, n_2	Entiers ()
\underline{n}	Normale à la frontière pointant vers l'extérieur ()
p	Champ de pression (Pascal)
r	Coordonnée radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (m)
r_A	Distance en la Terre et l'astre A (m)
R	Notation pour une fonction de X et Y (m)
\sinh	Sinus hyperbolique ()
$S(\zeta)$	Fonction définie à l'aide d'une intégrale ()
t	Temps (s)
T	Notation pour ωt ()
T_n	Périodes des ondes de marées (s)
\tan	Fonction tangente ()
\tan	Fonction tangente ()
\tanh	Tangente hyperbolique ()
$\underline{U} = (u, v)$	Champ de vitesse horizontal (m s^{-1})
$u(x_0, y_0; t)$	Vitesse u d'une trajectoire centrée en (x_0, y_0) (m s^{-1})
$v(x_0, y_0; t)$	Vitesse v d'une trajectoire centrée en (x_0, y_0) (m s^{-1})
$\hat{u}(\phi), \hat{v}(\phi)$	Composantes de Fourier de u et v (m s^{-1})
\underline{U}_{libre}	Solution sans forçage (m s^{-1})
\underline{U}_{aqua}	Solution sans frontières (m s^{-1})
u	Variable d'intégration (u)
$V(\underline{x})$	Potentiel total dans un repère absolu (s^{-2})
$V(\lambda, \phi, t)$	Potentiel total dans le repère lié à la Terre (s^{-2})
V_A	Potentiel gravitationnel de l'astre A (s^{-2})
V_L	Potentiel gravitationnel de la Lune (s^{-2})
V_S	Potentiel gravitationnel du Soleil (s^{-2})
V_T	Potentiel gravitationnel de la Terre (s^{-2})
$\hat{V}_{l,n}(\phi)$	Composantes de Fourier du potentiel V (s^{-2})
$\underline{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales (m)

(x_0, y_0)	Coordonnées constantes (m)
\underline{x}'	Coordonnées spatiales (m)
\underline{x}_A	Coordonnées du centre de l'astre A (m)
\underline{x}_T	Coordonnées du centre de la Terre (m)
X	Notation pour kx ()
Y	Notation pour un y adimensionné et translaté ()
α_2	Taux de croissance spatial (m^{-1})
Δ	Laplacien (m^{-2})
δ	Distribution de Dirac (m^{-1})
ζ	Variable de la fonction $S(\zeta)$ ()
η	Élévation de la surface libre (m)
$\eta_G(x, t)$	Onde à gauche (m)
$\eta_D(x, t)$	Onde à droite (m)
$\widehat{\eta}$	Transformée de Fourier de η (m)
$\widehat{\eta}(l, m; \phi)$	Modes propres (m)
η_{libre}	Solution sans forçage (m)
η_{aqua}	Solution sans frontières (m)
η_m	Amplitude complexe (m)
η_0	Amplitude réelle (m)
η_{G0}, η_{D0}	Amplitudes réelles (m)
$\eta_n(\underline{x})$	Amplitude complexe (m)
$\widehat{\eta}_0$	Notation pour $\sqrt{\widehat{\eta}_d \widehat{\eta}_g}$ (m)
$\widehat{\eta}_g$	Amplitude de l'onde de Kelvin à gauche (m)
$\widehat{\eta}_d$	Amplitude de l'onde de Kelvin à droite (m)
η_i	Élévation de la surface libre de l'onde incidente (m)
θ_A	Angle zénithal de l'astre A ()
θ_L	Angle zénithal de la Lune ()
θ_S	Angle zénithal du Soleil ()
Θ	Angle défini par une fonction implicite ()
λ	Longitude (m)
ϕ_n	Phase des ondes de marée ()
ϕ_1, ϕ_2	Fonctions de (x, y) ()
ϕ	Latitude ()
ϕ	Potentiel du champ de vitesse \underline{U} ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
ω_n	Pulsations de la marée (s^{-1})
$\omega(l, m)$	Pulsations propres (s^{-1})
Ω	Vitesse de rotation angulaire de la Terre (s^{-1})
Ω	Domaine spatial 2D ()
$\partial\Omega_n$	Frontière des conditions de Neumann ()
$\partial\Omega_d$	Frontière des conditions de Dirichlet ()

Introduction



FIGURE 5.1 – Photo aérienne montrant la réfraction de la houle dans une port.

Les phénomènes de réflexion et de diffraction, qui interviennent aussi bien dans la propagation des ondes de marées que celle de la houle dans un port sont présentés sur l'exemple des équations de Saint-Venant linéaires sans rotation. Le phénomène de seiche dans un lac ou une mer fermée est illustré sur l'exemple simple d'une géométrie rectangulaire. La diffraction d'une onde de surface par une jetée est présentée dans le cas de l'incidence normale. Enfin la méthode aux éléments de frontières est présentée et illustrée sur le cas de la réponse d'un port à une houle incidente monochromatique.

1 Réflexion et diffraction des ondes

Pour présenter simplement les phénomènes de réflexion et diffraction des ondes de surface, de la marée à la houle, on suppose qu'il n'y a pas de rotation ($f_0 = 0$) et que la profondeur h_r est constante. Cette dernière hypothèse exclut le phénomène de réfraction qui, dans un problème réaliste, vient se combiner aux deux précédents.

1.1 Géométries simples

On suppose que $f_0 = 0$ et que la vitesse $c = \sqrt{g h_r}$ est constante. Les équations de Saint-Venant linéaires peuvent alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \Delta \eta &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

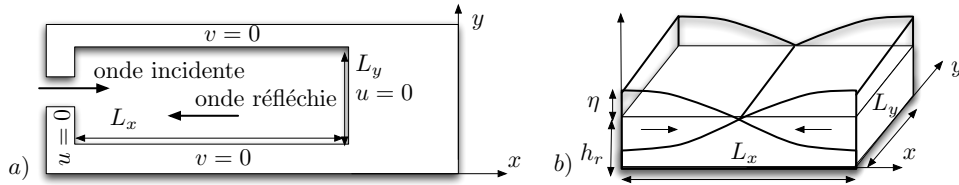


FIGURE 5.2 – a) Domaine de piégeage d'une onde de surface. b) Onde stationnaire appelée seiche.

Pour illustrer le phénomène de réflexion des ondes dans un domaine fermé ou presque fermé, on considère un domaine rectangulaire (figure 5.2a) de côtés L_x et L_y dans lequel la source d'énergie ondulatoire peut-être due à l'entrée d'une onde incidente, le forçage par le potentiel de marée ou par une tension de vent à la surface. Les conditions aux limites sont la nullité des vitesses normales aux parois ce qui se traduit, pour la géométrie considérée ici, par $u = 0$ ou $v = 0$.

En l'absence de rotation, ce problème revient à calculer les modes résonnants du domaine rectangulaire ce qui conduit à la famille de solutions

$$(\eta, u, v) = \eta_0 \left(1, \frac{g k_1}{c k}, \frac{g k_2}{c k} \right) \cos(k_1 x) \cos(k_2 y) \cos(k c t) \quad (5.2)$$

où η_0 est une amplitude réelle, $(k_1, k_2) = 2\pi (n_1/L_x, n_2/L_y)$, n_1 et n_2 des entiers et $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Le mode $(n_1, n_2) = (1, 0)$ correspond à la superposition

de deux ondes de surface $\eta_D = \frac{1}{2}\eta_{D0} \cos[k(x-ct)]$ et $\eta_G = \frac{1}{2}\eta_{G0} \cos[k(x+ct)]$ de même amplitude et se propageant en sens contraire. Une réflexion sans dissipation sur les parois de normale \underline{e}_x permet d'obtenir l'égalité de ces amplitudes. La mise en résonance d'un domaine sur un tel mode est le phénomène de "seiche". On l'observe dans de nombreux lacs ou mers intérieures. Le forçage par le vent peut être à l'origine de cette résonance.

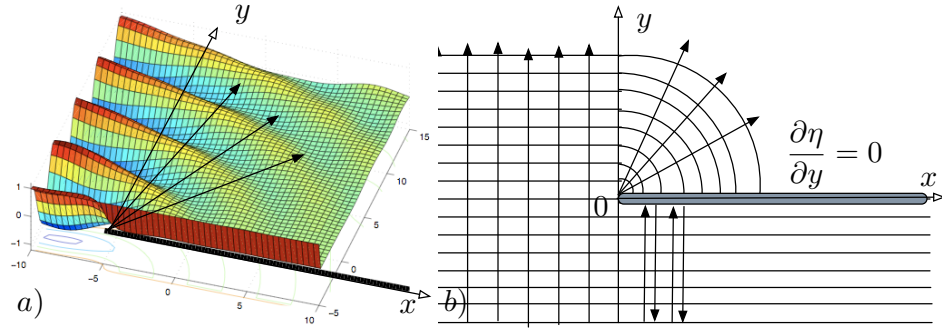


FIGURE 5.3 – Onde incidente sur une jetée. a) Champ de hauteur $\eta(x, y, t)$ à un temps donné. b) Schématisation des plans de phase et des rayons.

Pour introduire maintenant le phénomène de diffraction, on considère une onde incidente $\eta_i(x, y, t) = \eta_m \cos(ky - \omega t)$, avec $\omega = kc$, qui arrive sur une jetée d'équation $y = 0$ pour $x \leq 0$. Si la jetée est parfaitement réfléchissante, les conditions aux limites y sont $v = 0$ ce qui entraîne $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$. On cherche alors une solution complexe de la forme

$$\eta(x, y, t) = F(x, y) e^{-i\omega t}. \quad (5.3)$$

En reportant dans les équations, la fonction F doit vérifier l'équation d'Helmholtz

$$\Delta F + k^2 F = 0. \quad (5.4)$$

En prenant le bout de la jetée comme origine des axes, une solution analytique est donnée par l'expression

$$F(x, y) = \eta_m \frac{1+i}{2} \left\{ S \left[\frac{2k}{\pi}(r+y) \right] e^{iky} + S \left[\frac{2k}{\pi}(r-y) \right] e^{-iky} \right\} \quad (5.5)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $S(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-i\frac{\pi}{2}u^2} du$. La figure 5.3 décrit la hauteur instantanée $\eta(x, y, t)$ correspondante ainsi qu'une schématisation en terme de plans de phase et de rayons. Cette solution peut être utilisée localement au voisinage de la jetée pour des applications pratiques.

1.2 Méthode aux éléments de frontières

Pour connaître le champ d'ondes réfléchies et diffractées en présence d'une géométrie complexe, il faut recourir à la simulation numérique. La méthode aux éléments de frontières est l'une des méthodes numériques permettant de calculer la solution du problème. Si elle n'est pas forcément la plus performante pour des résolutions fines, sa présentation permet de comprendre les notions de réflexion et diffraction sous l'angle particulier de distributions de sources ou de doublets sur les frontières.

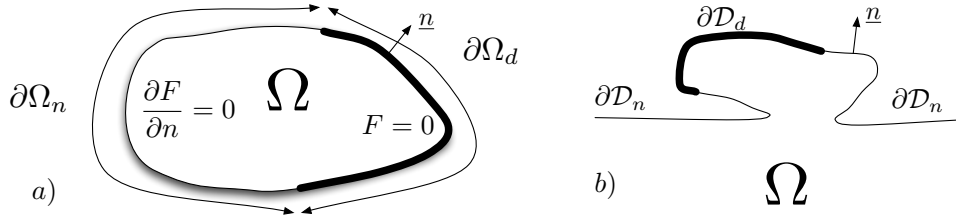


FIGURE 5.4 – Domaine Ω avec frontière de Neuman $\partial\Omega_n$ et de Dirichlet $\partial\Omega_d$. a) Domaine fermé. b) Domaine semi infini avec frontières $\partial\mathcal{D}_n$ et $\partial\mathcal{D}_d$.

On cherche à résoudre, dans un domaine Ω , l'équation de Helmholtz

$$\Delta F + k^2 F = 0 . \quad (5.6)$$

Lorsque Ω est un domaine fermé, on impose les conditions aux limites de Neuman $\partial F/\partial n = 0$, où \underline{n} est la normale au bord, sur un morceau de frontière $\partial\Omega_n$ ou de Dirichlet $F = 0$ sur un morceau de frontière $\partial\Omega_d$, la frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d$ étant la frontière fermée du domaine Ω . Lorsque Ω est semi infini, on impose les conditions aux limites de Neuman sur le morceau de frontière $\partial\mathcal{D}_n$ ou de Dirichlet sur le morceau de frontière $\partial\mathcal{D}_d$, les conditions à l'infini pouvant être, par exemple, l'absence d'ondes incidentes, ce qui se traduit par la condition de radiation de Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - i k \right) F(\underline{x}) = 0 \quad \text{avec} \quad r = \|\underline{x}\|. \quad (5.7)$$

Pour traduire l'existence d'une onde incidente $F_i(\underline{x})$ venant de l'infini, comme par exemple $F_i(\underline{x}) = \eta_m \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x})$, il suffit de remplacer F par $F - F_i$ dans la condition de Sommerfeld.

Dans un premier temps, on démontre les relations de Green qui mettent en relation deux fonctions différentiables quelconques φ_1 et φ_2 sur un domaine Ω par l'équation

$$\int_{\Omega} \varphi_1 \Delta \varphi_2 da - \int_{\Omega} \varphi_2 \Delta \varphi_1 da = \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds . \quad (5.8)$$

On utilise pour cela la relation $\Delta\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$ et l'intégration par partie

$$\int_{\Omega} B \operatorname{div} \underline{V} \, da = \int_{\partial\Omega} B \underline{V} \cdot \underline{n} \, ds - \int_{\Omega} \underline{V} \cdot \operatorname{grad} B \, da \quad (5.9)$$

avec $B = \varphi$ et $\underline{V} = \operatorname{grad} \varphi$. Si $L = \Delta + k^2$, on peut encore écrire

$$\int_{\Omega} \varphi_1 L \varphi_2 \, da - \int_{\Omega} \varphi_2 L \varphi_1 \, da = \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \, ds - \int_{\partial\Omega} \varphi_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \, ds. \quad (5.10)$$

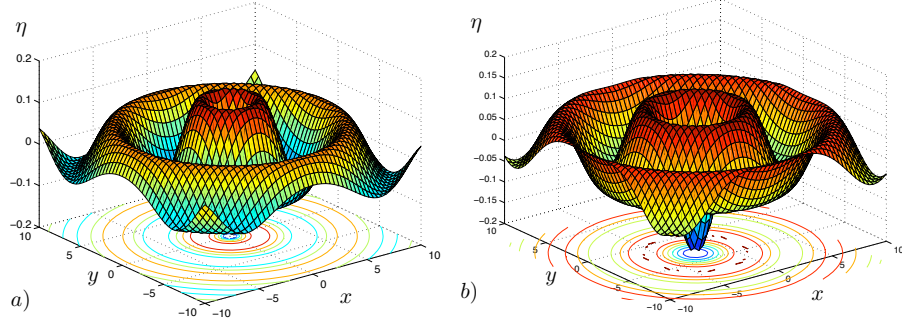


FIGURE 5.5 – Fonction de Green $G = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$. a) $\operatorname{Re}(G)$. b) $\operatorname{Im}(G)$.

On définit ensuite la fonction de Green comme étant la solution de l'équation

$$\Delta G + k^2 G = \delta(\underline{x}) \quad (5.11)$$

où $\delta(\underline{x})$ est la distribution de Dirac, avec les conditions aux limites de Sommerfeld exprimant l'absence d'ondes venant de l'infini. Ces conditions de radiation filtrent les ondes qui pourraient être émises à l'infini et se focaliser vers l'origine des axes. Du fait de la symétrie des équations, on pose $G(\underline{x}) = f(r)$ ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + k^2 f = 0 \quad (5.12)$$

pour $r \neq 0$. La fonction de Green est alors $G(r) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$ où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 0. Comme la dérivée de $H_0^{(1)}(R)$ est l'opposée $-H_1^{(1)}(R)$ de la fonction de Hankel de première espèce d'ordre 1, on a $\partial G / \partial n = \frac{ik}{4r} (\underline{x} \cdot \underline{n}) H_1^{(1)}(kr)$.

Les parties réelles et imaginaires de ces fonctions sont représentées sur les figures 5.5 et 5.6. La fonction G est une source ponctuelle tandis que $\partial G / \partial n$ est un doublet, c'est-à-dire le rapprochement de deux sources d'amplitudes opposées. L'amplitude d'un doublet est nulle le long de la droite perpendiculaire à \underline{n} .

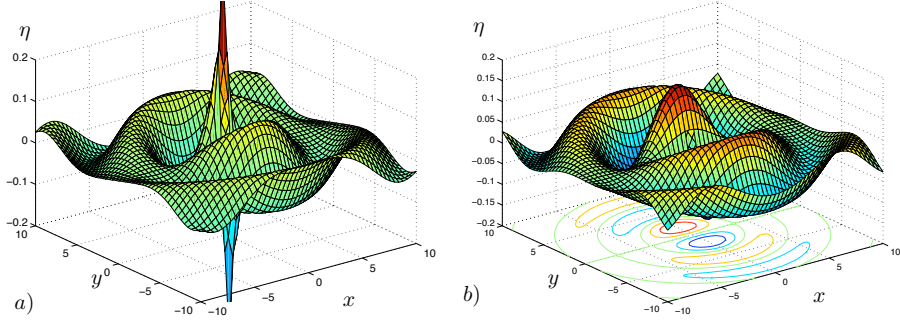


FIGURE 5.6 – Dérivée $\partial G/\partial y = \frac{ik}{4r} y H_1^{(1)}(kr)$. a) $\text{Re}(\partial G/\partial y)$. b) $\text{Im}(\partial G/\partial y)$.

En appliquant la formule de Green au cas où $\varphi_1(\underline{x}') = F(\underline{x}')$ est la solution du problème avec conditions aux limites et $\varphi_2(\underline{x}') = G(\underline{x} - \underline{x}')$ où G est la fonction de Green, on obtient, compte tenu de $LG = \delta$, $LF = 0$ et de l'invariance par translation de L , la relation

$$\int_{\Omega} F(\underline{x}') \delta(\underline{x} - \underline{x}') da' = \int_{\partial\Omega} F(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x} - \underline{x}') ds' - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}') G(\underline{x} - \underline{x}') ds'. \quad (5.13)$$

De plus, un calcul reposant sur la théorie des distributions permet d'écrire

$$\int_{\Omega} F(\underline{x}') \delta(\underline{x} - \underline{x}') da' = I_{\Omega}(\underline{x}) F(\underline{x}), \quad (5.14)$$

avec $I_{\Omega}(\underline{x}) = 1$ si $\underline{x} \in \Omega - \partial\Omega$ et avec $I_{\Omega}(\underline{x}) = 1/2$ si $\underline{x} \in \partial\Omega$. La résolution du problème (5.6) consiste alors à chercher les profils F et $\partial F/\partial n$ sur $\partial\Omega$ qui vérifient une équation intégrale appelée "alternative de Fredholm" sachant qu'ils sont en partie connus grâce aux conditions aux limites.

Comme les conditions aux limites choisies (par simplicité) sont $\partial F(\underline{x})/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega_n$ et $F(\underline{x}) = 0$ sur $\partial\Omega_d$, cette équation s'écrit

$$I_{\Omega}(\underline{x}) F(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega_n} F(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x} - \underline{x}') ds' - \int_{\partial\Omega_d} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}') G(\underline{x} - \underline{x}') ds'. \quad (5.15)$$

On cherche donc $F(\underline{x})$ sur $\partial\Omega_n$ (qui est nul sur $\partial\Omega_d$) et $\partial F(\underline{x})/\partial n$ sur $\partial\Omega_d$ (qui est nul sur $\partial\Omega_n$) vérifiant cette alternative de Fredholm. On peut voir alors la solution comme étant la somme d'une répartition de doublets $\partial G/\partial n$ de densité $F(\underline{x})$ sur $\partial\Omega_n$ et de sources G de densité $\partial F/\partial n$ sur $\partial\Omega_d$.

Si on discrétise $\partial\Omega_n$ en N_n petits segments de centres \underline{x}_i avec $i = 1, \dots, N_n$ et $\partial\Omega_d$ en N_d petits segments de centre \underline{x}_i avec $i = N_d + 1, \dots, N$ et $N =$

$N_n + N_d$, on note $F(\underline{x}_i) = X_i$ pour $i = 1, \dots, N_n$ et $\partial F(\underline{x}_i)/\partial n = X_i$ pour $i = N_d + 1, \dots, N$. On doit résoudre $\underline{M} \underline{X} = \underline{Y}$ où $M_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - R_{ij}$ avec $R_{ij} = \partial G(\underline{x}_i - \underline{x}_j)/\partial n$ si $1 \leq j \leq N_n$ et avec $R_{ij} = G(\underline{x}_i - \underline{x}_j)$ si $N_n < j \leq N_d$. Cette méthode numérique, appelée “méthode aux éléments de frontière” est simple à mettre en oeuvre et efficace pour des problèmes de résolution modérée.

1.3 Oscillations d’un port irradié par un champ de houle

On cherche tout d’abord à montrer que la résolution de l’équation de Helmholtz, introduite dans le cas des ondes de surface en milieu peu profond et issue des équations de Saint-Venant linéaires, permet de traiter le cas de la houle dans un milieu de profondeur quelconque. Les petites oscillations d’une couche fluide à surface libre et de profondeur h_r constante autour de sa position de repos sont régies par le système linéaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = 0 \\ \Delta \phi &= 0 & \text{pour } -h_r \leq z \leq 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 & \text{en } z = -h_r, \end{aligned} \quad (5.16)$$

où g est la gravité et $\phi(x, y, z, t)$ le potentiel du champ de vitesse $\underline{U}(x, y, z, t)$ défini par $\underline{U} = \text{grad } \phi$. L’élévation de la surface libre η se déduit de ϕ par la relation $\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t)$.

Comme la profondeur est constante, le domaine occupée par le fluide est déterminé par le domaine surfacique Ω d’une section horizontale. Sur la frontière $\partial\Omega$ de normale \underline{n} , la condition aux limites $\partial\eta/\partial n = 0$ traduit le fait que la vitesse normale à la paroi $\underline{U} \cdot \underline{n}$ est nulle. Cette condition aux limites obtenues avec un mur vertical parfaitement réfléchissant. La condition aux limites $\eta = 0$ correspond à une frontière parfaitement absorbante. On l’obtient en pratique par des enrochements dans lesquels les ondes de surface vont se dissiper. Dans le cas d’un domaine semi-infini, on peut imposer une condition de Sommerfeld pour η ou pour $\eta - \eta_i$ lorsque η_i est une onde incidente imposée.

Le problème avec ses conditions aux limites étant posé, on cherche des solutions de la forme

$$\{\eta(x, y, t), \phi(x, y, z, t)\} = \left\{ 1, \frac{g}{i\omega} \frac{\cosh[k(z + h_r)]}{\cosh(k h_r)} \right\} F(x, y) e^{-i\omega t}. \quad (5.17)$$

En reportant dans les équations, on obtient

$$\Delta F + k^2 F = 0 \quad \text{et} \quad \omega^2 = g k \tanh(k h_r). \quad (5.18)$$

On se ramène donc bien à la résolution d'une équation d'Helmoltz. Dans la limite $k h_r \rightarrow 0$, on retrouve le problème des eaux peu profondes avec $k = \omega/c$ et $c = \sqrt{g h_r}$.

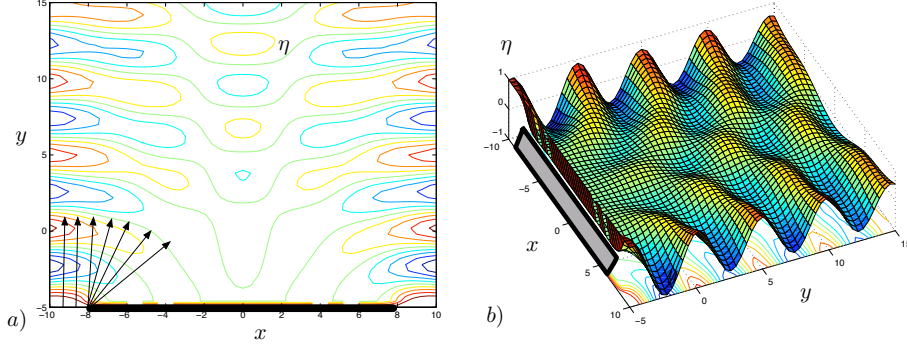


FIGURE 5.7 – Figure de diffraction de la houle derrière un mur.

Qu'il s'agisse d'eaux peu profondes ou non, on considère maintenant une onde incidente $\eta_i(x, y, t) = \text{Re} [\eta_m e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} e^{-i \omega t}]$ qui arrive à la frontière $\partial \mathcal{D}$ formée de la partie $\partial \mathcal{D}_n$ où la condition de Neumann $\partial \eta / \partial n = 0$ est imposée (parois réfléchissantes) et de la frontière $\partial \mathcal{D}_d$ où la condition de Dirichlet $F = 0$ est imposée (parois absorbantes).

On décompose alors la solution du problème sous la forme $\eta = \eta_i + \eta_p$ où η_p , qui représente le champ d'onde diffracté et réfléchi par la frontière $\partial \mathcal{D}$, vérifie la condition de Sommerfeld

$$\left| \frac{\partial \eta_p}{\partial r} - i k \eta_p \right| \ll \frac{1}{\sqrt{r}} \quad \text{pour } r \rightarrow \infty \text{ avec } r = \|\underline{x}\|. \quad (5.19)$$

On cherche une solution complexe de la forme $\eta = F(x, y) e^{-i \omega t}$ avec $F(x, y) = F_i(x, y) + F_p(x, y)$ où $F_i = \eta_m \exp(i \underline{k} \cdot \underline{x})$. L'onde incidente peut être vue comme une répartition de sources à l'infini dont l'effet est d'induire le champ F_i en tout point du domaine. L'alternative de Fredholm de la méthode aux éléments de frontière consiste alors à trouver la densité F de doublet $\partial G / \partial n$ sur la frontière $\partial \mathcal{D}_n$ et la densité $\partial F / \partial n$ de sources G sur la frontière $\partial \mathcal{D}_d$ telles que, pour tout point $\underline{x} \in \partial \mathcal{D}$, on ait

$$\frac{F(\underline{x})}{2} = F_i(\underline{x}) + \int_{\partial \mathcal{D}_n} F(\underline{x}') \frac{\partial G}{\partial n}(\underline{x} - \underline{x}') ds' - \int_{\partial \mathcal{D}_d} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}') G(\underline{x} - \underline{x}') ds' \quad (5.20)$$

Lorsque les densités F et $\partial F / \partial n$ sont connues sur $\partial \mathcal{D}$, la valeur de $F(\underline{x})$ pour tout point $\underline{x} \in \Omega - \partial \mathcal{D}$ est obtenue en remplaçant le facteur $\frac{1}{2}$ par 1 dans cette équation.

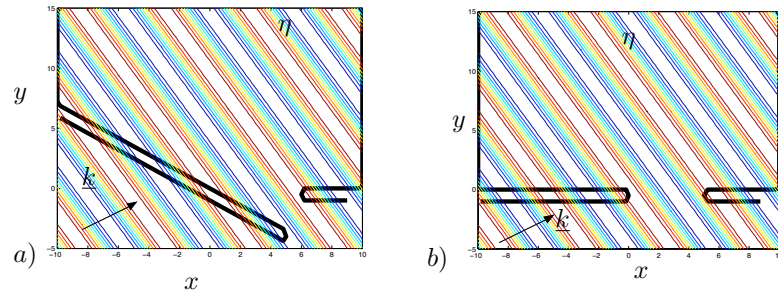


FIGURE 5.8 – Formes de ports et houle incidente $\eta = \hat{\eta} \cos(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)$ avec $\underline{k} = k [\cos(\theta)\underline{e}_x + \sin(\theta)\underline{e}_y]$ et $\theta = \pi/6$.

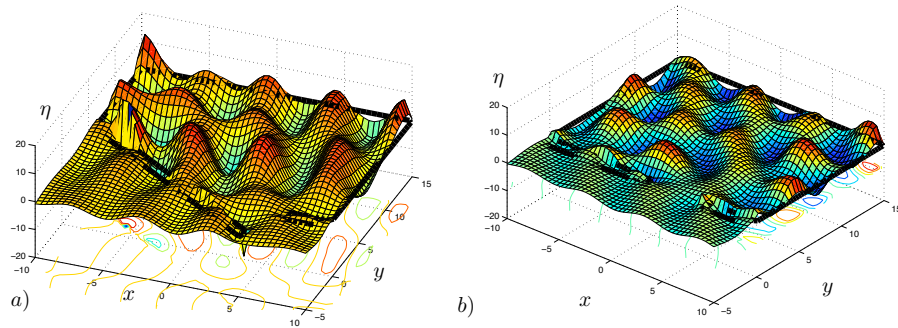


FIGURE 5.9 – Hauteur d'eau η à un instant donnée pour des parois complètement réfléchissantes en présence d'une houle incidente.

On présente maintenant quelques illustrations numériques obtenues uniquement avec des parois réfléchissantes. La figure 5.7 décrit le champ de hauteur η instantané dans le cas de la diffraction d'une onde incidente $F_i = \eta_m \exp(i k y)$ par un mur perpendiculaire de longueur finie. On observe l'interférence des ondes diffractées par la gauche ou la droite du mur au bout de quelques longueurs d'ondes.

Les figures 5.8 et 5.9 décrivent les champs de hauteur η instantanés de deux ports de formes distinctes irradiés par onde incidente oblique. La réfraction et la réflexion des ondes sur les parois réfléchissantes du port montre un piégeage des ondes qui va à l'encontre de l'objectif qui consiste à protéger les bateaux. On voit qu'il est alors nécessaire de prévoir, à certains endroits bien choisis, des enrochements capables d'absorber les ondes.