Chapitre 1

Hydrostatique

O. Thual, 15 février 2021

Sommaire

Introduction

Ce chapitre est un rappel de l'hydrostatique mettant en évidence la dépendance linéaire de la pression avec l'altitude que l'on exprime en définissant la charge hydraulique, constante dans un fluide au repos. La force d'Archimède est rappelée avant d'aborder le “paradoxe hydrostatique” pour lequel les forces de pression peuvent résulter d'une petite force appliquée sur une petite surface (presse hydraulique) ou d'un petit volume d'eau réparti sur une grande hauteur (exemple du barrage poids). Contrairement à certains ouvrages d'hydraulique, la convention qui consiste à retrancher systématiquement la pression atmosphérique dans l'expression de la pression n'est pas adoptée ici.

1 Pression hydrostatique

1.1 Bilan de forces

Dans une cuve remplie d'eau immobile, on considère un petit volume fictif ayant la forme d'un cylindre de section dA et d'axe vertical de longueur dZ (figure **1**.1).

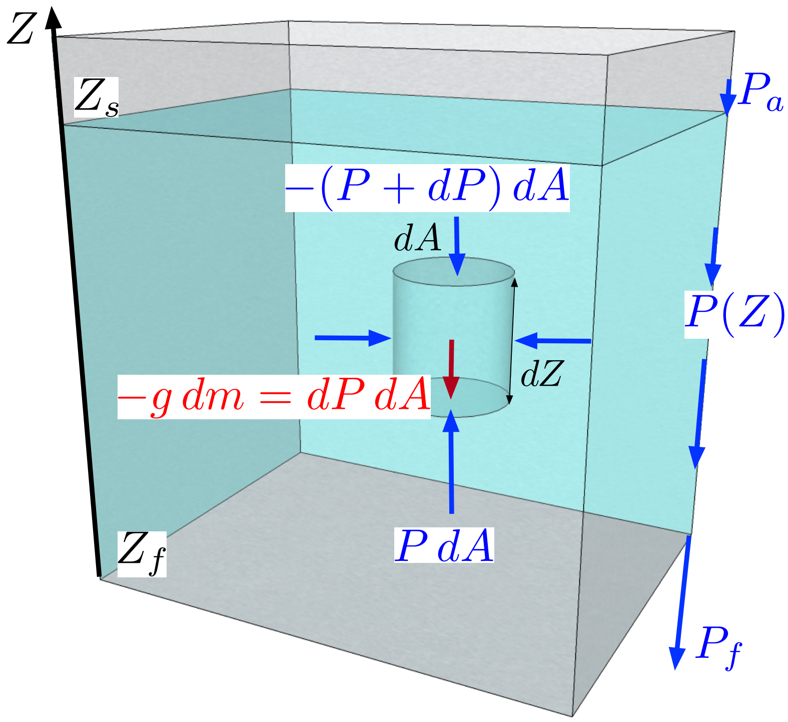

Figure **1**.1 – *Bilan des forces sur une particule fluide*

Les forces de pression exercées sur la surface latérale du cylindre se compensent. Sur la verticale, le poids du volume cylindrique d'eau est $g\,dm$ où g est la gravité ($g = 9,81$ m.s^{-2}), $dm = \rho\,dA\,dZ$ sa masse et ρ la masse volumique de l'eau ($\rho = 10^3$ kg.m^{-3}). La pression P varie avec la verticale et l'on a $P(Z + dZ) = P(Z) + dP$. L'équilibre des forces projetées sur la verticale s'écrit

$$0 = -g\,dm + P\,dA - (P + dP)\,dA = (-\rho\,g\,dZ - dP)\,dA\ . \qquad (\mathbf{1}.1)$$

On en déduit $dP = -\rho\,g\,dZ$, ce que l'on peut écrire $dP/(\rho\,g) + dZ = 0$. En intégrant cette équation différentielle, on obtient

$$H = \frac{P(Z)}{\rho\,g} + Z\ , \qquad (\mathbf{1}.2)$$

où H est une constante qui ne dépend pas de l'espace. C'est la "charge hydraulique", exprimée dans le cas hydrostatique où la vitesse du fluide est nulle.

Sur la surface libre, de cote $Z = Z_s$, la pression est égale à la pression atmosphérique P_a. On peut donc écrire, pour tout point de cote Z, la relation de la pression hydrostatique

$$H = \frac{P_a}{\rho\,g} + Z_s\ = \frac{P}{\rho\,g} + Z\ . \qquad (\mathbf{1}.3)$$

On voit alors que la pression $P = P_a + \rho\,g\,(Z_s - Z)$ croit linéairement avec la profondeur $Z_s - Z$. Par exemple, la pression au fond de la cuve, de cote $Z = Z_f$, vaut $P_f = P_a + \rho\,g\,(Z_s - Z_f)$. Dans le cas d'une cuve possédant des murs verticaux, la résultante des forces de pression exercées sur le fond, supposé horizontal, est égale au poids total de l'eau. Ce n'est pas le cas si l'aire de la surface libre n'est pas égale à l'aire du fond. Si l'aire de la surface libre est très petite, la force exercée sur le fond peut-être très supérieure au poids de l'eau. C'est le "paradoxe hydrostatique" que l'on développe dans les paragraphes suivants.

1.2 Force d'Archimède

"Tout corps plongé dans un liquide reçoit une force verticale égale au poids du volume du liquide déplacé". On peut démontrer facilement ce principe d'Archimède en considérant un corps ayant la forme d'un cylindre de section A et d'axe vertical de longueur $Z_2 - Z_1$ (figure **1**.2). Comme la charge $H = P_1/(\rho\,g) + Z_1 = P_2/(\rho\,g) + Z_2$ est constante, la résultante des forces de pression exercées sur le cylindre est une force verticale positive (vers le haut) d'intensité $(P_1 - P_2)\,A = \rho\,g\,(Z_2 - Z_1)\,A = m\,g$ où $m = \rho\,(Z_2 - Z_1)\,A$ est la masse du volume d'eau qui serait contenue dans le volume $\Omega = (Z_2 - Z_1)\,A$ du cylindre.

On démontre également le principe d'Archimède lorsque les sections du cylindre ne sont pas horizontales. On généralise alors le principe au cas des corps quelconques en les découpant en petits cylindres d'axes verticaux. La force d'Archimède exercée sur un corps de volume Ω s'écrit donc

$$F_{Arch} = \rho\,\Omega\,g\ , \qquad (\mathbf{1}.4)$$

où ρ est la masse volumique de l'eau.

La démonstration la plus évoluée de ce résultat, faisant appel au théorème de la divergence appliquée à des intégrales multiples, n'est pas dans l'esprit du présent ouvrage à cause de son caractère mathématique trop avancé.

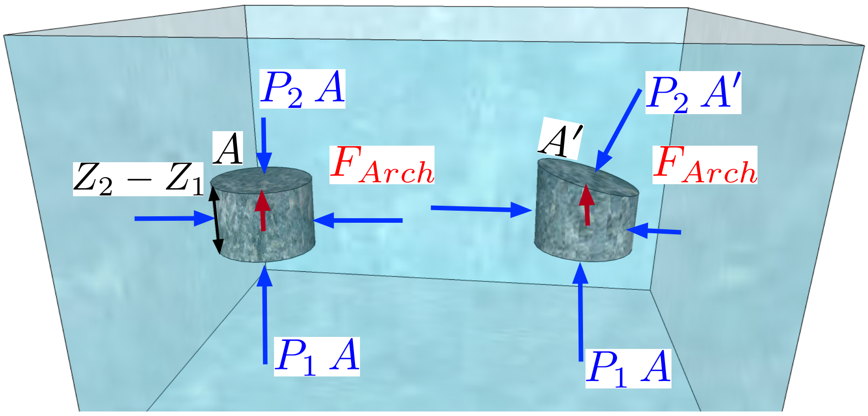

FIGURE **1**.2 – *La Force d'Archimède F_{Arch} est la résultante des forces de pression.*

2 Le paradoxe hydrostatique

2.1 Basculement d'un barrage poids

Pour illustrer le "paradoxe hydrostatique" par un exemple, on considère la force de pression exercée par un volume d'eau retenu par un barrage poids (figure **1**.3) pour deux configurations très différentes en terme de masse d'eau mais de hauteur d'eau h identique au contact du barrage.

Ces deux configurations génèrent exactement la même force F_{pres} sur le barrage dans la mesure où les répartitions des pressions sont identiques. Il en va de même de la force $\rho\, g\, h\, A$ exercée sur le fond de surface A. Le calcul de la résultante F_{press} des forces de pression exercées sur le barrage (voir exercice **1**.1) montre que son point d'application est situé à une hauteur $h/3$ (centre de gravité du triangle des forces de pression) et que le barrage bascule si son poids F_{poids} est inférieur à une valeur qui dépend de son épaisseur e et de la hauteur d'eau h.

2.2 Presse hydraulique

Un deuxième exemple illustrant le "paradoxe hydraulique" ou "principe de Pascal" est celui de la presse hydraulique (figure **1**.4). Une petite force f, par exemple le poids d'un cylindre de section a, induit une pression $P = f/a$ dans une cuve fermée remplie d'eau. Cette pression induit une force $F = P\, A$ sur une section A, par exemple celle d'un cylindre dont le poids serait ainsi compensé. La force f induit donc une force d'autant plus grande que le rapport A/a est grand :

$$F = f\, \frac{A}{a}\ . \qquad (\mathbf{1}.5)$$

En enfonçant le petit cylindre d'une profondeur dz avec une force f, on va donc soulever le gros cylindre avec une force $F = f\, A/a$ sur une hauteur $dZ = dz\,(a/A)$, à cause de la conservation du volume d'eau. Le travail $dW = f\, a\, dz$ (dont l'unité est le Joule) qui est fourni sur le petit cylindre est donc égal au

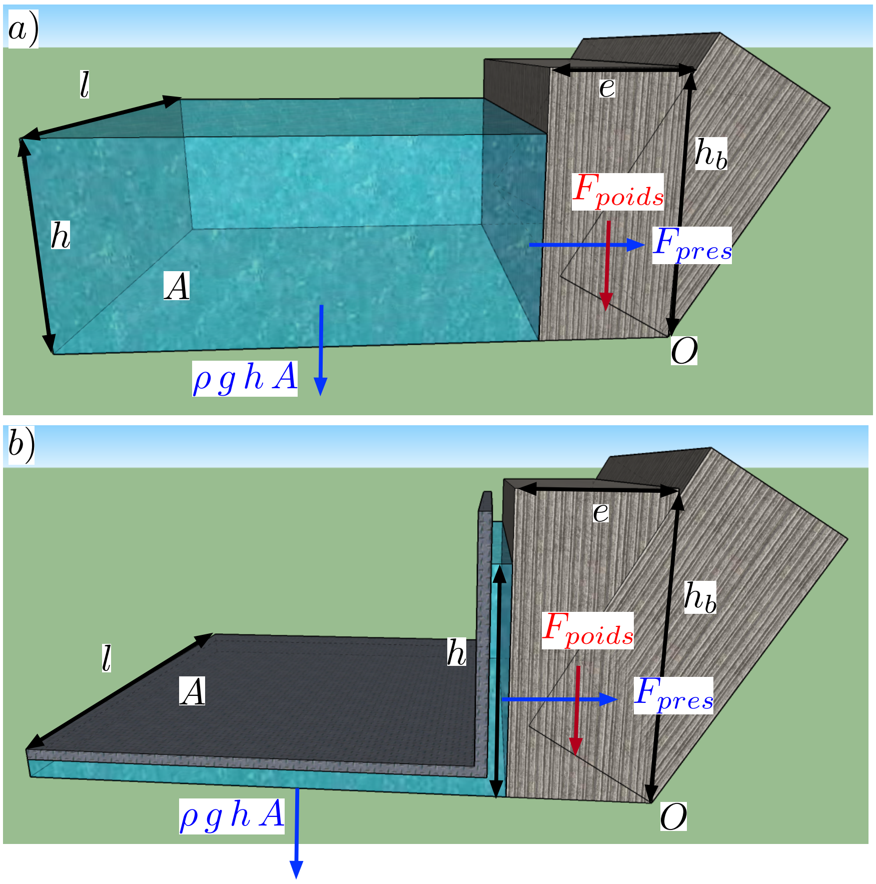

FIGURE 1.3 – *Basculement d'un barrage poids sous l'effet de la pression de l'eau. Les configurations a) et b) génèrent les mêmes forces.*

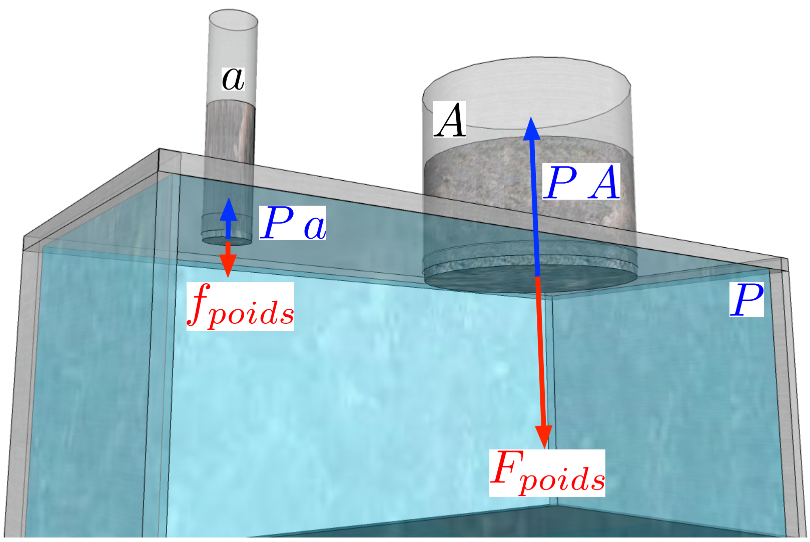

FIGURE 1.4 – *Principe de la presse hydraulique.*

travail $dW = F\, A\, dZ$ qui est reçu pour soulever le gros cylindre.

3 Puissance hydraulique

3.1 Puissance théorique

Pour prolonger et enrichir l'exemple de la presse hydraulique, on considère une conduite reliant un tube, abritant un piston, à un réservoir dont la surface libre est située à une hauteur h_{brut} au-dessus (figure **1**.5). On suppose que le piston avance à une vitesse constante V : de l'énergie est récupérée en annulant son accélération. Si D est le diamètre du piston de section circulaire, le débit d'eau issu du réservoir est $Q = A\,V$ où $A = \pi\, D^2/4$ est l'aire de la section du piston.

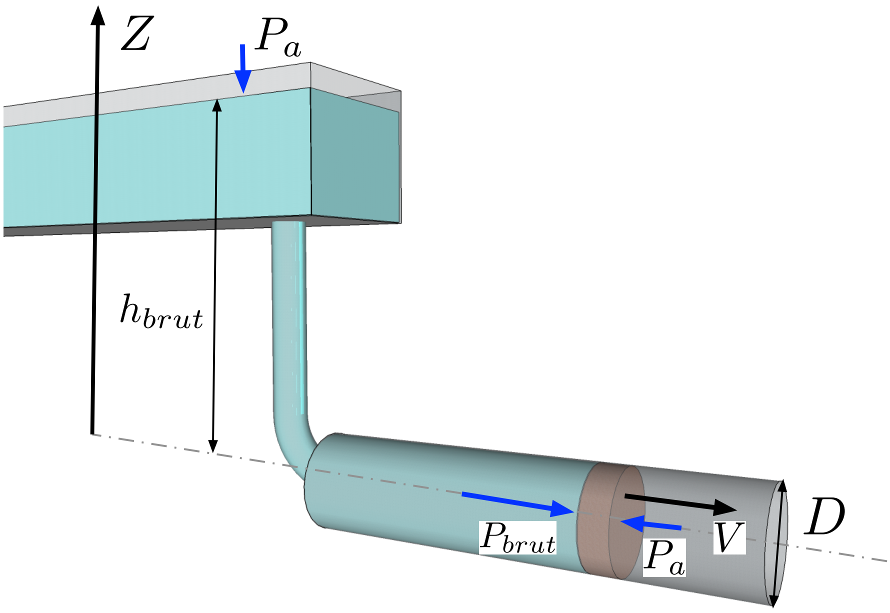

FIGURE **1**.5 – *Force de pression sur un piston de vitesse V sans pertes de charge.*

Pendant le temps dt, le travail des forces de pression exercées par l'eau d'un côté et l'air de l'autre est égal à $dW = (P_{brut} - P_a) A\, dx$ avec $dx = V\, dt$. Si la pression suivait une loi hydrostatique (alors que le fluide est en mouvement), on pourrait écrire $P_{brut} - P_a = \rho\, g\, h_{brut}$.

Sous cette hypothèse hydrostatique, on définit la puissance théorique récupérable en empêchant le piston d'accélérer (mais pas de se mouvoir) qui est

$$\Pi_{theo} = \frac{dW}{dt} = \rho\, g\, h_{brut}\, A\, V = \rho\, g\, h_{brut}\, Q\ . \qquad (\mathbf{1}.6)$$

3.2 Rendement d'une centrale hydroélectrique

En pratique, la puissance récupérable est inférieure à la puissance théorique Π_{theo}. En effet, la pression n'est pas hydrostatique à cause du mouvement du fluide et de son frottement dans les conduites qui induit des “pertes de charge”, c'est-à-dire une diminution de la pression $P_{net} < P_{brut}$ au niveau du piston. On définit alors la “hauteur nette” comme étant la hauteur qui générerait la pression nette $P_{net} = P_a + \rho\, g\, h_{net}$. La perte de charge dans les conduites est alors $h_f = h_{brut} - h_{net}$. On définit $\eta_{cond} = h_{net}/h_{brut}$, le rendement des conduites.

Dans une centrale hydroélectrique, le piston, présenté ici pour calculer simplement la puissance, est remplacé par une turbine (figure **1**.6). Les frottements dans la turbine engendrent également des pertes de charge (η_{turb}). Toutes les pertes de charges hydrauliques, combinées aux rendements mécaniques et électriques de l'alternateur et du transformateur (η_{mec}), sont modélisées par le rendement global η, qui permet d'exprimer la puissance récupérable Π_{rec} à travers la relation

$$\Pi_{rec} = \eta\, \rho\, g\, h_{brut}\, Q\ . \tag{1.7}$$

L'ordre de grandeur de ce rendement est $\eta = \eta_{cond}\, \eta_{turb}\, \eta_{mec} \sim 0,8$, ce qui conduit à la relation "$\Pi_{rec}(\mathrm{kW}) = 8\, h_{brut}(\mathrm{m})\, Q(\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1})$" où Π_{rec} est la puissance électrique récupérable exprimée en kW, h_{brut} la hauteur brute exprimée en m et Q le débit exprimé en $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$.

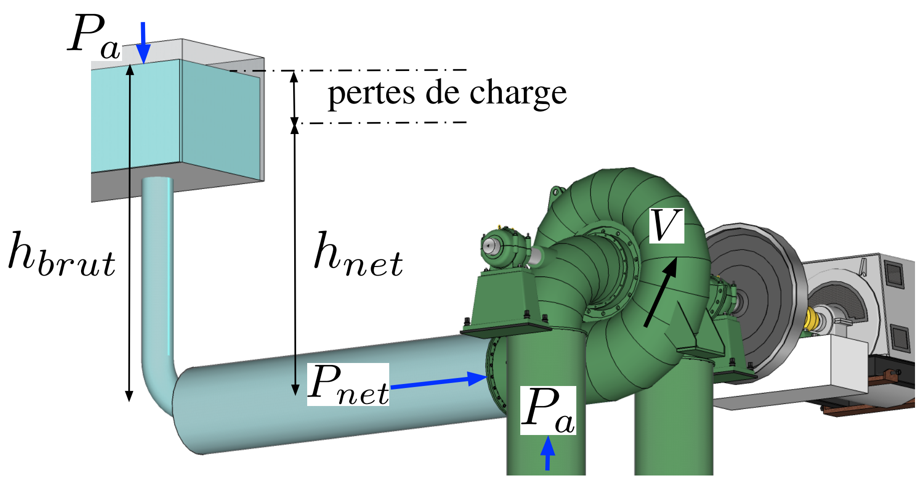

FIGURE **1**.6 – *Turbine alimentée par un réservoir. La hauteur nette h_{net} est celle qui engendrerait la pression P_{net}, mesurée à l'amont de la turbine, si les pertes de charge dans les conduites étaient nulles.*

FORMULAIRE

Charge hydraulique hydrostatique

En l'absence de mouvement fluide, la charge hydraulique ne dépend pas de l'espace et s'écrit :

$$\boxed{H = \frac{P}{\rho\, g} + Z\ .}$$

Force d'Archimède

Un corps de volume Ω plongé dans un liquide reçoit une poussée verticale égale au poids du volume de liquide déplacé :

$$\boxed{F_{Arch} = \rho\,\Omega\,g\ .}$$

Paradoxe hydrostatique ou principe de Pascal

Une petite force f exercée sur une petite section a d'un liquide confiné exerce une pression $P = f/a$ qui induit une grande force $F = P\,A$ sur une grande section A, ce qui se traduit par la relation

$$\boxed{F = f\,\frac{A}{a}\ .}$$

Puissance récupérable

La puissance électrique récupérable Π_{rec} à partir d'un réservoir situé à une hauteur h_{brut} pour un débit Q est

$$\boxed{\Pi_{rec} = \eta\,\rho\,g\,h_{brut}\,Q \quad \text{approximé par} \quad \Pi_{rec}\ (\mathrm{kW}) = 8\ h_{brut}\ (\mathrm{m})\ \ Q\ (\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1})\ ,}$$

où le rendement $\eta = \eta_{cond}\,\eta_{turb}\,\eta_{mec} \sim 0,8$ prend en compte les pertes de charges hydrauliques dans les conduites et dans la turbine, ainsi que les pertes d'énergie dans l'alternateur et le transformateur.

EXERCICES

EXERCICE 1.1 Barrage poids

Un barrage poids de masse volumique ρ_s et de largeur $l = 100$ m retient un plan d'eau de profondeur $h = 9$ m (figure **1**.3).

1) Calculer la pression $P(Z)$ pour la cote Z ainsi que la pression $P(0)$ au fond du plan d'eau.
2) Calculer la résultante F_{pres} des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage.
3) Calculer la hauteur du point d'application de cette résultante. En déduire que cette hauteur est la cote du centre de gravité du "triangle des forces de pression" (figure **1**.7).
4) En supposant que le barrage est un parallélépipède d'épaisseur $e = 4$ m et de hauteur $h_b = 10$ m, calculer le rapport ρ_s/ρ minimum des masses volumiques, nécessaire pour éviter que le barrage ne bascule.
5) Que devient cette valeur si $h = h_b = 10$ m ?

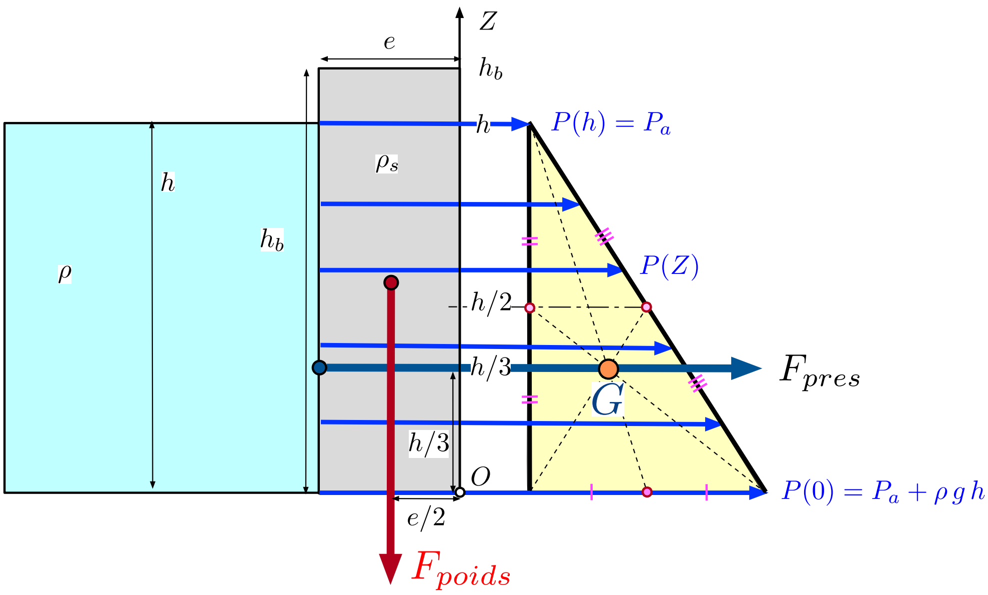

FIGURE **1**.7 – *Triangle des forces de pression (jaune) et son centre de gravité G.*

Corrigé 1.1 Barrage poids

1)La pression dans l'eau est $P(Z) = P_a + \rho\, g(h - Z)$ en prenant pour origine $Z = 0$ le fond de la retenue. La pression au fond vaut $P(0) = P_a + \rho\, g\, h = 2,0\, 10^5$ Pa. **2)**Le terme de pression P_a sur la face du barrage en contact avec l'eau est compensé par la pression atmosphérique exercée sur les autres faces. La résultante est donc obtenue en intégrant $P(Z) - P_a$ sur l'aire de contact entre l'eau et le barrage, ce qui conduit à $F_{pres} = \rho\, g\, l \int_0^h (h - Z)\, dZ = \frac{1}{2}\, \rho\, g\, h^2\, l = 4,0\, 10^7$ N. **3)**Le barycentre des forces de pression, c'est-à-dire le point où s'applique la résultante de ces forces, est situé à l'altitude $h_c = \int_0^h Z\,(h - Z)\, dZ / \int_0^h (h - Z)\, dZ = h/3 = 3$ m. C'est l'altitude du centre de gravité du triangle des forces de pression. **4)**Le moment de la force de pression $F_{pres} = \frac{1}{2}\, \rho\, g\, h^2\, l$ par rapport à l'axe de rotation du barrage (passant par le point O) est $\mathcal{M}_{pres} = F_{pres}\, h/3 = \frac{1}{6}\, \rho\, g\, h^3\, l$. Le moment du poids $F_{poids} = \rho_s\, g\, h_b\, e\, l$ par rapport à cet axe est $\mathcal{M}_{poids} = F_{poids}\, e/2 = \frac{1}{2}\, \rho_s\, g\, h_b\, e^2\, l$. Pour que le moment, stabilisant, du poids du barrage soit plus important que le moment, déstabilisant, de la poussée de l'eau, il faut que $\mathcal{M}_{poids} > \mathcal{M}_{pres}$, ce qui se traduit par $\rho_s/\rho > \frac{1}{3}\, h^3/(h_b\, e^2) = 1,5$. **5)**Si $h = h_b$, il faut que $\rho_s/\rho > \frac{1}{3}\, h_b^2/e^2 = 2,1$.

EXERCICE 1.2 Puissance récupérable

Un réservoir d'eau est situé à une hauteur $h_{brut} = 100$ m d'une turbine Francis de rendement $\eta_{turb} = 0,95$ (figure **1**.6). Le transformateur et l'alternateur induisent une perte de 5 % de l'énergie mécanique fournie par la turbine et l'on note $\eta_{mec} = 0,95$. On considère le débit $Q = 1$ m^3.s^{-1} auquel est associé la perte de charge dans les conduites $h_f = 10$ m.

1) Calculer la hauteur nette h_{net} en amont de la turbine. En déduire le rendement des conduites $\eta_{cond} = h_{net}/h_{brut}$.
2) Calculer le rendement global η de l'usine hydroélectrique.
3) Calculer la puissance électrique récupérable Π_{rec} pour le débit Q.
4) On définit le coefficient énergétique de l'usine par la relation $C = \Pi_{rec}/Q$. Exprimer C en kWh/m^3.

Corrigé 1.2 Puissance récupérable

1)La hauteur nette est $h_{net} = h_{brut} - h_f = 90$ m. On a donc $\eta_{cond} = h_{net}/h_{brut} = 0,9$. **2)**Le rendement global est $\eta = \eta_{turb}\,\eta_{mec}\,\eta_{cond} \sim 0,8$. **3)**La puissance est $\Pi_{rec} = \eta\,\rho\,g\,h_{brut}\,Q = 8\,10^5\,W = 800\,\text{kW}$. On retrouve ce résultat avec la formule abrégée $\Pi_{rec}(\text{kW}) = 8\,h_{brut}(\text{m})\,Q(\text{m}^3.\text{s}^{-1}) = 800$ kW. **4)**On a $C = 0,22$ kWh/m^3.

NOTATIONS

a	Aire d'une section (m^2)
A	Aire d'une section (m^2)
dA	Aire infinitésimale d'une section (m^2)
A'	Aire d'une section oblique (m^2)
C	Coefficient énergétique (W.s.m^{-3})
D	Diamètre (m)
e	Épaisseur (m)
F_{Arch}	Force d'Archimède (N)
F	Force (N)
f	Force (N)
f_{poids}	Poids (N)
F_{poids}	Poids (N)
F_{pres}	Résultante des forces de pression (N)
g	Gravité (m.s^{-2})
H	Charge hydraulique (m)
h	Profondeur (m)
h_{brut}	Hauteur brute (m)
h_{net}	Hauteur nette (m)
h_f	Perte de charge (m)
l	Largeur du barrage (m)
m	Masse (kg)
dm	Masse infinitésimale (kg)
$\mathcal{M}_{poids}$	Moment en O du poids (N.m)
$\mathcal{M}_{pres}$	Moment en O des forces de pression (N.m)
P	Pression (Pa)
dP	Pression infinitésimale (Pa)
P_a	Pression atmosphérique (Pa)
P_{brut}	Pression brute (Pa)
P_{net}	Pression nette (Pa)
Q	Débit volumique (m^3.s^{-1})
V	Vitesse (m.s^{-1})

dW	Travail infinitésimal (J)
Z	Coordonnée verticale (m)
dZ	Longueur infinitésimale dans la direction verticale (m)
Z_f	Cote du fond (m)
Z_s	Cote de la surface libre (m)
η	rendement global ()
η_{turb}	rendement d'une turbine ()
η_{mec}	rendement alternateur et transformateur ()
η_{cond}	rendement des conduites ()
Π_{the}	Puissance théorique (W)
Π_{rec}	Puissance récupérable (W)
Π	Puissance (kW)
ρ	Masse volumique de l'eau (kg.m^{-3})
ρ_s	Masse volumique d'un solide (kg.m^{-3})
Ω	Volume (m^3)