Corrections de la série d'exercices n°2

ex 8.1

En régime stationnaire, les grandeurs étudiées ne varient pas avec le temps et l'équation précédente devient :

$$0 = \alpha\{\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\}$$

$\diamond$ $\lambda < 0$ on pose $\lambda = -a^2$

$g(x) = A\cos ax + B\sin ax$ avec A et B constantes réelles

$\diamond$ $\lambda = 0$ $g(x) = Ax + B$ avec A et B constantes réelles

$\diamond$ $\lambda > 0$ On pose $\lambda = a^2$

$g(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax)$ avec A et B constantes réelles

Pour la variable y :

$\diamond$ $\lambda < 0$, avec $\lambda = -a^2$, alors $h(y) = -\lambda h''(y) = a^2 h''(y)$ et on a :

$h(y) = C\cosh(ay) + D\sinh(ay)$, avec C et D constantes réelles

$\diamond$ $\lambda = 0$ $h(y) = Cy + D$ avec C et D constantes réelles

$\diamond$ $\lambda > 0$, avec $\lambda = a^2$, alors $h(y) = -\lambda h''(y) = -a^2 h''(y)$ et on a :

$h(y) = C\cos ay + D\sin ay$ avec C et D constantes réelles

D'où les solutions générales possibles :

$\diamond \quad \lambda = -a^2 < 0$

$T(x, y) = \{A\cos(ax) + B\sin(ax)\}\{C\cosh(ay) + D\sinh(ay)\}$

$\diamond \quad \lambda = 0$

$T(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$

$\diamond \quad \lambda = a^2 > 0$

$T(x, y) = \{A\cosh(ax) + B\sinh(ax)\}\{C\cos(ay) + D\sin(ay)\}$

On utilise les conditions aux limites, c'est-à-dire la connaissance des températures sur les frontières (4 cotés) du problème pour déterminer les coefficients.

$\diamond \quad \lambda = 0$

$T(x, y) = (Ax + B)(Cy + D)$

Pour tout y compris entre 0 et 1, on doit avoir $T(0, y) = B(yC + D) = 0$ donc B=0, ensuite, pour tout y compris entre 0 et 1, $T(1, y) = A(Cy + D) = 0$ donc A=0 et T(x, y)=0 mais alors la condition $T(x, 1) = T1$ ne peut être remplie et donc $\lambda \neq 0$

$\diamond \quad \lambda = a^2 > 0$

$T(x, y) = \{A\cosh(ax) + B\sinh(ax)\}\{C\cos(ay) + D\sin(ay)\}$

Alors, $\forall y \in [0, 1], \quad T(x = 0, y) = AC\cos(ay) + AD\sin(ay) = 0$ donc $A = 0$.

Et, $\forall y \in [0, 1]$,

$T(x=1,y) = B\sinh(a)(C\cosh(ay) + D\sinh(ay)) = 0$
donc $B\sinh(a) = 0$. La solution a=0 est exclue car $\lambda \neq 0$ donc B=0 et par suite T(x,y)=0 ce qui est exclu par la condition aux limites en y=1.

$\diamond$ $\lambda = -a^2 < 0$, reste la seule possibilité de satisfaire les conditions aux limites du problème
$T(x,y) = \{A\cos(ax) + B\sin(ax)\}\{C\cosh(ay) + D\sinh(ay)\}$
$\forall y \in [0,1]$,
$T(x=0,y) = AC\cosh(ay) + AD\sinh(ay) = 0$
donc $A = 0$.
Puis, $\forall y \in [0,1]$,
$T(x=1,y) = B\sin(a)\{C\cosh(ay) + D\sinh(ay)\} = 0$

B=0 redonne la solution nulle qui n'est pas possible, on doit donc avoir $\sin(a) = 0$ soit $a = n\pi$ avec n entier
On utilise ensuite le fait que $\forall x \in [0,1], \quad T(x,0) = 0$ soit $T(x,0) = BC\sin(ax) = 0$;
On en déduit C=0 et il nous reste :

$$T(x,y) = E_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

On a posé $BD = E_n$. Comme cette solution dépend de n, on aura une famille de solution et par superposition une solution générale de la forme :

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} T_n(x,y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

Pour identifier les valeurs des E_n, il nous faut encore utiliser la condition sur le dernier bord pour lequel la température est constante et vaut T1.

$$\forall x \in [0,1], \quad T(x,1) = T1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} E_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi)$$

En posant $E_n \sin(n\pi) = F_n$, on reconnaît dans $T1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} F_n \sin(n\pi x)$ le développement en série de Fourier de la fonction de x impaire de période 2 définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = T1$. F_n est le coefficient de Fourier de cette fonction et il vaut donc :

$$F_n = E_n \sinh(n\pi) = 2\frac{2}{2}\int_{x=0}^{x=1} T1 \sin(n\pi x) dx$$

Soit : $\quad E_n = \frac{2T1(1-\cos(n\pi))}{n\pi \sinh(n\pi)}$

Finalement

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2T1(1-\cos(n\pi))}{n\pi \sinh(n\pi)} \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

Si on calcule cette série par exemple jusqu'à n=15 on obtient la figure 3-0.3. Plus on calcule de termes plus le profil s'aplanit du coté de y=1 avant de redescendre brutalement sur les 3 autres cotés.

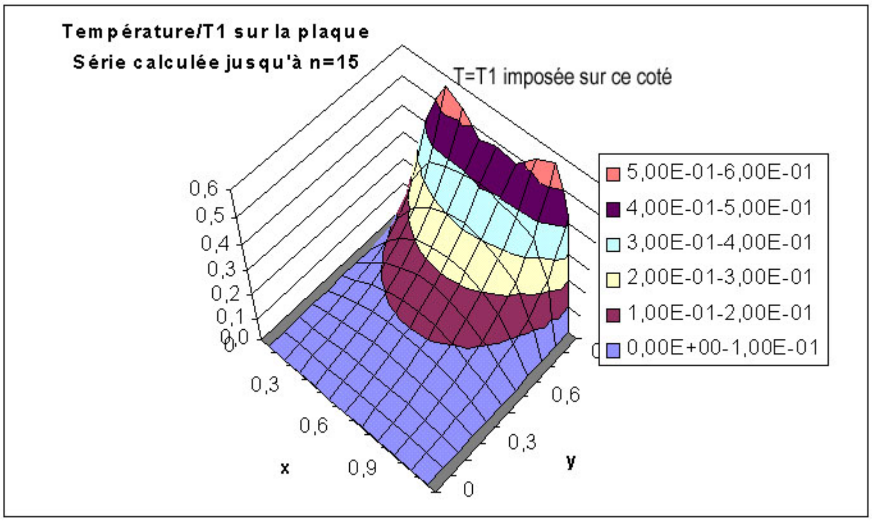

FIG. 3-0.3 – Profil de température stationnaire dans la plaque, série calculée jusqu'n=15